国际制造业先进技术译丛

CRC Press
Taylor & Francis Group

光学设计手册

Handbook of Optical Design

原书第3版
Third Edition

［墨］ 丹尼尔·马拉卡纳·赫尔南德斯（Daniel Malacara-Hernández） 扎卡里亚斯·马拉卡纳·赫尔南德斯（Zacarías Malacara-Hernández） 著

邢廷文 廖志杰 等 译

"一本紧随当前技术发展的优秀工具书，一本涵盖光学设计和几何光学的基本理论以及实用细节的综合手册。"
——詹姆斯 C. 怀恩特(James C. Wyant)
美国亚利桑那大学光学科学学院

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

国际制造业先进技术译丛

光 学 设 计 手 册

（原书第3版）

［墨］丹尼尔·马拉卡纳·赫尔南德斯
（Daniel Malacara - Hernández）
［墨］扎卡里亚斯·马拉卡纳·赫尔南德斯
（Zacarías Malacara - Hernández）
著

冯 婕 邢廷文 江海波 杜 猛 杨丽娟
按姓氏笔画排序 周 超 侯梦晗 姚政鹏 殷可为 黄 杨 译
黄金苹 廖志杰

机 械 工 业 出 版 社

本书包含了几何光学的基本原理及其在透镜设计中的应用，其中既包含了镜头设计的经典部分，也包含了重要的现代方法、工具和仪器，包括当代天文望远镜、高斯光束及计算机镜头设计。在受人尊敬的学者们的镜头设计课程中已经用本书进行了广泛的课堂教学。

本书简明扼要地解释了光学系统的设计和评价的复杂性。书中还讨论了元件的选择、优化和整合，并形成了有效的光学装置。本书分析了多种光学材料、元件和系统的性能，从简单的放大镜到复杂的摄影镜头、眼科光学设备、望远镜、显微镜、投影系统。

第 3 版更新的内容：

- 改进了插图，其中 32 张换成了彩图。
- 整体进行了更新，反映了在该领域的研究进展。
- 新添加了 Buchdahl 高阶像差的资料。
- 扩展并改进了基于光程计算波前像差的方法。
- 更新了附录中的光学材料的列表。
- 初级像差的描述更详细明确。
- 增加了重要的新出版物的引用。
- 按新的光学玻璃更新光学系统设计实例。
- 增加了 25 个新的设计实例。

结合光学系统设计的基本理论和实用细节，本书可供学生们使用，同时，对科学家和光学仪器工程师们来说也极具参考价值。

译 丛 序

一、制造技术长盛永恒

先进制造技术是20世纪80年代提出的，它由机械制造技术发展而来，通常可以认为它是将机械、电子、信息、材料、能源和管理等方面的技术，进行交叉、融合和集成，综合应用于产品全生命周期的制造全过程，包括市场需求、产品设计、工艺设计、加工装配、检测、销售、使用、维修、报废处理、回收利用等，以实现优质、敏捷、高效、低耗、清洁生产，快速响应市场的需求。因此，当前的先进制造技术是以产品为中心，以光机电一体化的机械制造技术为主体，以广义制造为手段，具有先进性和时代感。

制造技术是一个永恒的主题，它与社会发展密切相关，是设想、概念、科学技术物化的基础和手段，是所有工业的支柱，是国家经济与国防实力的体现，是国家工业化的关键。现代制造技术是当前世界各国研究和发展的主题，特别是在市场经济高度发展的今天，它更占有十分重要的地位。

把信息技术引入制造技术，使制造技术产生了革命性的变化，出现了制造系统和制造科学。制造系统由物质流、能量流和信息流组成，物质流是本质，能量流是动力，信息流是控制；制造技术与系统论、方法论、信息论、控制论和协同论相结合就形成了新的制造学科。

制造技术的覆盖面极广，涉及机械、电子、计算机、冶金、建筑、水利、电子、交通运输、农业以及化学、物理学、材料学、管理科学等领域。各个行业都需要制造业的支持，制造技术既有普遍性、基础性的一面，又有特殊性、专业性的一面，既具有共性，又有个性。

我国的制造业涉及以下三方面的领域：

- 机械、电子制造业，包括机床、专用设备、交通运输工具、机械设备、电子通信设备、仪器等；
- 资源加工工业，包括石油化工、化学纤维、橡胶、塑料等；
- 轻纺工业，包括服装、纺织、皮革、印刷等。

目前世界先进制造技术沿着全球化、绿色化、高技术化、信息化、个性化和服务化、集群化六个方向发展，在加工技术上主要有超精密加工技术、纳米加工技术、数控加工技术、极限加工技术、绿色加工技术等，在制造模式上主要有自动化、集成化、柔性化、敏捷化、虚拟化、网络化、智能化、协作化和绿色化等。

二、图书交流源远流长

近年来，国际间的交流与合作对制造业技术进步领域的发展及重大关键技术的

突破起到了积极的促进作用，制造业科技人员需要及时了解国外相关技术领域的最新发展状况、成果取得情况及先进技术应用情况等。

必须看到，我国制造业与工业发达国家相比，仍存在较大差距。因此必须加强原始创新，在实践中继承和创新，学习国外的先进的制造技术和经验、引进消化吸收创新，提高自主创新能力，形成自己的创新体系。

国家、地区间的学术、技术交流已有很长的历史，可以追溯到唐朝甚至更远一些，唐玄奘去印度取经可以说是一次典型的图书交流佳话。图书资料是一种传统、永恒、有效的学术、技术交流方式，早在20世纪初期，我国清代学者严复就翻译了英国学者赫胥黎所著的《天演论》，其后学者周建人翻译了英国学者达尔文所著的《物种起源》，对我国自然科学的发展起到了很大的推动作用。

图书是一种信息载体，图书是一个海洋，虽然现在已有网络、光盘、计算机等信息传输和储存手段，但图书更具有广泛性、适应性、系统性、持久性和经济性，看书总比在计算机上看资料要方便习惯，不同层次的要求可以参考不同层次的图书，不同职业的人员可以参考不同类型的技术图书，同时它具有比较长期的参考价值和收藏价值。当然，技术图书的交流具有时间上的滞后性，不够及时，翻译的质量也是个关键问题，需要及时、快速、高质量的出版工作支持。

机械工业出版社希望能够在先进制造技术的引进、消化、吸收和创新方面为广大读者做出贡献，为我国的制造业科技人员引进、纳新国外先进制造技术的出版资源，翻译出版国际上优秀的制造业先进技术著作，从而能够提升我国制造业的自主创新能力，引导和推进科研与实践水平的不断进步。

三、选择严谨质高面广

（1）精品重点高质　本套丛书作为我社的精品重点书，在内容、编辑、装帧设计等方面追求高质量，力求为读者奉献一套高品质的丛书。

（2）专家选择把关　本套丛书的选书、翻译工作均由国内相关专业的专家、教授以及工程技术人员承担，充分保证了内容的先进性、适用性和翻译质量。

（3）引纳地区广泛　主要从制造业比较发达的国家引进一系列先进制造技术图书，组成一套“国际制造业先进技术译丛”。当然其他国家的优秀制造科技图书也在选择之内。

（4）内容先进丰富　在内容上应具有先进性、经典性和广泛性，应能代表相关专业的技术前沿，对生产实践有较强的指导、借鉴作用。本套丛书尽量涵盖制造业各行业，例如机械、材料、能源等，既包括对传统技术的改进，又包括新的设计方法、制造工艺等技术。

（5）读者层次面广　面对的读者对象主要是制造业企业、科研院所的专家、研究人员和工程技术人员，高等院校的教师和学生，可以按照不同层次和水平要求各取所需。

四、衷心感谢不吝指教

首先要感谢许多积极热心支持出版“国际制造业先进技术译丛”的专家学者，感谢积极推荐国外相关优秀图书，仔细评审外文原版书，推荐评审和翻译的知名专家，特别要感谢承担翻译工作的译者，对各位专家学者所付出的辛勤劳动表示深切的敬意，同时要感谢国外各家出版社版权工作人员的热心支持。

本套丛书希望能对广大读者的工作提供切实的帮助，欢迎广大读者不吝指教，提出宝贵意见和建议。

机械工业出版社

原 书 前 言

这本书的前两版已经广泛应用于我们的学生们的透镜设计课程中。这种经历推动我们在每一次版本更新中去改进这本书。在第 3 版中，做出了一些重要修订。

为了使图片更加清晰，更有吸引力，所有的图片都用彩色形式重新绘制。本书在许多方面做了更新以使其包含近些年发表的一些重要成果，其中包括一些由我们的学生和读者建议的新材料。另外更新的参考文献中加入了一些最近发表的重要文章，以使这本书更加完整，更加契合时代。

本书中额外增加了一些材料，我们只举几个例子：对 Buchdahl 高级像差进行了描述；对基于光程的波前像差计算的部分进行了扩充和改进；书里提到的大多数光学系统用新的可用玻璃重新设计；更新了附录中的光学材料列表，更加清楚和详细地描述了初级像差。

感谢使用先前版本的朋友和同学们，尤其感谢 Armando Gomez – Vieyra 博士给予的极大帮助与支持。

Daniel Malacara – Hernández
Zacarías Malacara – Hernández

原书第 2 版前言

这本书的第 1 版已经在我们学生的透镜设计课程中使用了多年。基于这些经验，本书在几个方面有了很大的改进。

第 1 版的第 2 章中的大部分材料是非常重要和有用的参考。然而，为使镜头设计入门课程更流畅简单，大部分材料作为附录转移到书的结尾处。第 1 版的其他几个部分也以同样的目标进行了重组。

部分修改包括一些读者建议的澄清和对一些概念更完整的解释。增加了部分额外的材料，包括额外的新的参考资料，以使本书更完整并包含最新的信息。我们只举几个例子：一些梯度折射率系统现在有更详细的描述；引入了一种高斯函数阵列的新方法表示波前；Delano 图的部分增加了内容；两个正交方向曲率不同的像散曲面增加了更多的细节。

我们要感谢我们的朋友和学生使用本书的第 1 版。他们为我们提供了许多建议，并指出了几个印刷错误，从而完善了本书。

Daniel Malacara – Hernández
Zacarías Malacara – Hernández

原书第 1 版前言

这是一本关于光学设计主题的书，针对几何光学领域的学生和从事光学仪器研究的工程师。当然，这不是该领域的第一本书。一些经典的、著名的书已经绝版，也缺乏现代的话题。另一方面，大多数现代书籍的范围一般都很有限，不包括重要的经典甚至现代细节。

这本书不是光学设计的百科，但是本书试图覆盖大部分镜头设计的经典部分，同时介绍了一些现代的方法、工具和仪器，如当代天文望远镜、高斯光束和计算机辅助的镜头设计。

第 1 章向读者介绍几何光学的基本原理。第 2 章讲述球面和非球面光学表面与精确的斜光线追踪。第 3 章和第 4 章讲解了透镜设计理论中的一阶和三阶近似。在第 5 章 ~ 第 7 章中讲述了共轴光学系统初级像差理论的基本概念。在第 8 章、第 9 章和第 10 章中描述光学系统中的衍射效应和透镜设计中波像差与几何像差的评估方法。第 11 章 ~ 第 17 章描述了一些主要的经典光学仪器及其光学设计技术。最后，第 18 章研究了计算机辅助光学镜头设计的方法与像质评价方法。

总之，这本书不仅只有基本的理论，而且给出了一些实际光学系统设计的许多细节。我们希望这本书将成为光学学生有用的教科书，以及光学科学家和工程师有用的参考书。

我们非常感谢许多朋友和同事对手稿的仔细阅读和改进建议。这些朋友中我们要提到的是 Raul Casas 教授、Manuel Servin 教授、Ricardo Flores 教授和我们的几个学生。光学研究协会中大量的研究人员提供了许多有益的帮助，提出了许多建设性的意见和建议。他们的人数很多，我们不想只仅仅提到几个人的名字，这是不公平的。我们感谢光学研究中心及其总经理在资金上的支持和热情帮助。最后一点也非常重要，作者们非常感谢家人的鼓励和理解。作者之一（D. M.）特别感谢他的儿子 Juan Manuel 和 Miguel Angel，他们帮助处理了部分章节中许多的图片和部分文字。

Daniel Malacara – Hernández
Zacarías Malacara – Hernández

目　　录

译丛序

原书前言

原书第 2 版前言

原书第 1 版前言

第 1 章　几何光学原理 …… 1

1.1　光的波动性与费马原理 …… 1

1.2　反射和折射定律 …… 6

1.2.1　反射定律 …… 6

1.2.2　折射定律 …… 7

1.2.3　折射定律的矢量形式 …… 8

1.3　基本子午光线追迹方程组 …… 8

1.3.1　子午光线追迹的 $L-U$ 方法 …… 11

1.3.2　子午光线追迹的 $Q-U$ 方法 …… 11

1.4　高斯光学或者一阶光学 …… 12

1.5　成像 …… 14

1.6　孔径光阑、光瞳和主光线 …… 16

1.7　德拉诺关系 …… 20

1.8　光学正弦定理 …… 20

1.9　拉格朗日不变量 …… 22

1.10　赫歇尔不变量和成像放大率 …… 23

参考文献 …… 25

第 2 章　薄透镜和球面镜 …… 26

2.1　薄透镜 …… 26

2.2　薄透镜的成像公式 …… 28

2.3　薄透镜的节点 …… 29

2.4　会聚透镜的成像 …… 30

2.5　发散透镜的成像 …… 30

参考文献 …… 31

第 3 章　透镜组和厚透镜 …… 32

3.1　焦距和光焦度 …… 32

3.2 厚透镜或透镜系统的成像 …… 33
3.3 基点 …… 34
3.4 倾斜或弯曲物体的成像 …… 36
3.5 厚透镜 …… 38
3.6 薄透镜系统 …… 40
3.7 薄透镜系统中的拉格朗日-亥姆霍兹不变式 …… 42
3.8 物或者光阑的平移效应 …… 43
3.8.1 光阑的移动 …… 43
3.8.2 物和像平面的移动 …… 44
3.9 德拉诺 $y-\bar{y}$ 图 …… 45
3.9.1 光阑的移动 …… 47
3.9.2 物和像的移动 …… 47
参考文献 …… 48

第4章 色差 …… 50

4.1 引言 …… 50
4.2 近轴色差（位置色差） …… 51
4.2.1 薄透镜的近轴色差 …… 52
4.2.2 消色差双胶合透镜 …… 53
4.2.3 两块具有一定空气间隔的薄透镜组的消色差系统（消色差双分离透镜） …… 54
4.2.4 同种材料制造的两块透镜校正轴向色差 …… 54
4.2.5 色球差 …… 56
4.3 用 $D-d$ 方法消色差 …… 57
4.4 二级光谱 …… 58
4.5 倍率色差 …… 60
4.5.1 光阑位置对色差的影响 …… 61
4.5.2 倍率色差的校正 …… 62
4.5.3 同种材料制造的透镜校正倍率色差 …… 64
参考文献 …… 65

第5章 球差 …… 67

5.1 球差计算 …… 67
5.2 初级球差 …… 70
5.2.1 薄透镜的球差 …… 72
5.2.2 薄透镜系统 …… 75
5.2.3 会聚光通过平行平面板的球差 …… 75
5.3 非球面 …… 76

5.4　非球面的球差 …… 76
5.5　无球差的面 …… 77
5.5.1　折射球面 …… 77
5.5.2　二次曲面的反射 …… 78
5.5.3　笛卡儿卵形 …… 78
5.6　球差的多项式展开 …… 79
5.7　高阶球差 …… 82
5.8　用梯度折射率校正球差 …… 84
参考文献 …… 85

第6章　单色轴外像差 …… 86

6.1　介绍 …… 86
6.1.1　轴外像差介绍 …… 86
6.1.2　倾斜光线 …… 87
6.1.3　轴外像差定义 …… 90
6.2　佩兹伐场曲 …… 91
6.3　彗差 …… 93
6.3.1　反正弦条件 …… 93
6.3.2　每个面的彗差贡献 …… 95
6.3.3　单个薄透镜的彗差 …… 95
6.4　像散 …… 96
6.4.1　Coddington 方程 …… 97
6.4.2　佩兹伐场曲和像散间的关系 …… 100
6.4.3　有彗差和像散的像 …… 101
6.5　齐明面 …… 105
6.5.1　球面透镜的齐明面 …… 105
6.5.2　Wassermann – Wolf 齐明面 …… 106
6.6　畸变 …… 106
6.7　齐明面上的轴外像差 …… 108
6.8　对称原则和 Bow – Sutton 条件 …… 110
6.9　光阑平移方程 …… 111
6.10　光瞳像差 …… 113
参考文献 …… 114

第7章　像差多项式和高阶像差 …… 117

7.1　光学系统中的波面 …… 117
7.2　几何像差和波像差 …… 117

7.3 波像差多项式 …… 118
7.3.1 共轴系统的霍普金斯波像差多项式 …… 119
7.3.2 共轴系统的 Kingslake 波像差多项式 …… 121
7.3.3 共轴系统的塞德尔波像差多项式 …… 123
7.3.4 共轴系统的高阶 Buchdahl 像差多项式 …… 123
7.3.5 非共轴对称系统的波像差多项式 …… 126
7.4 泽尼克多项式 …… 128
7.5 波面变形拟合到多项式 …… 132
7.6 高斯函数阵列表示波面 …… 133
7.7 折射面的波像差 …… 134
7.8 反射面的波像差 …… 139
7.9 Aldis 理论 …… 142
参考文献 …… 143

第8章 光学系统的计算机评估 …… 145

8.1 横向像差多项式 …… 145
8.1.1 轴向像差曲线 …… 146
8.1.2 子午像差曲线 …… 147
8.1.3 弧矢像差曲线 …… 148
8.2 横向像差的 H. H. Hopkins，Seidel 和 Buchdahl 系数 …… 150
8.2.1 球差 …… 150
8.2.2 彗差 …… 150
8.2.3 像散 …… 151
8.2.4 畸变 …… 152
8.3 子午光线的追迹和光阑位置的分析 …… 153
8.4 点列图 …… 155
8.4.1 几何光点尺寸 …… 155
8.4.2 径向能量分布 …… 158
8.5 波阵面的形变 …… 159
8.5.1 通过横向像差计算 …… 159
8.5.2 通过光程直接计算 …… 159
8.5.3 Conrady 方法计算波阵面的形变 …… 161
8.6 点扩散函数和线扩散函数 …… 162
8.7 光学传递函数 …… 164
8.8 像差的容限 …… 165
参考文献 …… 166

第9章 光学系统中的衍射 …… 168

9.1 惠更斯-菲涅耳原理 …… 168

9.2　菲涅耳衍射 …… 169
9.3　夫琅禾费衍射 …… 171
9.3.1　圆形孔径 …… 172
9.3.2　环形孔径 …… 173
9.4　存在像差的衍射像 …… 174
9.5　斯特列尔比 …… 175
9.6　光学传递函数 …… 176
9.7　分辨率标准 …… 179
9.8　高斯光束 …… 181
参考文献 …… 182

第10章　棱镜 …… 185

10.1　展开图 …… 185
10.2　偏转光束 …… 185
10.3　图像变换 …… 186
10.4　棱镜的偏转和变换 …… 188
10.4.1　偏转棱镜 …… 188
10.4.2　反射系统 …… 189
10.5　保向变换棱镜 …… 191
10.5.1　上下镜像和左右镜像棱镜 …… 191
10.5.2　转像棱镜组 …… 192
10.6　分束棱镜 …… 195
10.7　色散棱镜 …… 195
10.7.1　等边棱镜 …… 196
10.7.2　恒偏向棱镜 …… 197
10.7.3　不偏转的色散棱镜 …… 198
10.8　非成像棱镜 …… 199
参考文献 …… 199

第11章　基本的光学系统和简单照相镜头 …… 201

11.1　光学系统分类 …… 201
11.2　放大镜和单片成像镜头 …… 202
11.2.1　放大镜 …… 202
11.2.2　双目放大镜 …… 204
11.2.3　单片成像镜头 …… 206
11.3　风景镜头 …… 209
11.4　周视镜头 …… 211

11.5 消色差风景镜头 …… 212
11.6 双胶合透镜 …… 214
11.6.1 未消球差的双胶合透镜 …… 214
11.6.2 双分离透镜 …… 217
11.6.3 消球差双胶合透镜 …… 219
11.6.4 复消色差透镜 …… 220
11.7 激光准直器 …… 220
11.8 球面和抛物面反射镜 …… 222
11.8.1 球面镜的离轴像差 …… 223
11.8.2 凹球面镜 …… 224
11.8.3 凹抛物面镜 …… 226
11.8.4 凸球面镜 …… 227
11.9 一些反射和折反系统 …… 229
11.9.1 孟琴反射镜 …… 229
11.9.2 戴森（Dyson）系统 …… 230
11.9.3 奥夫纳（Offner）系统 …… 231
11.10 $f-\theta$ 透镜 …… 231
11.11 菲涅耳透镜和伽柏平板 …… 232
参考文献 …… 233

第12章 复杂摄影镜头 …… 235

12.1 引言 …… 235
12.2 不对称系统 …… 236
12.2.1 佩兹伐镜头 …… 236
12.2.2 远摄镜头 …… 237
12.2.3 库克（Cooke）三片式镜头 …… 239
12.2.4 天塞（Tessar）镜头 …… 243
12.3 对称去像散系统 …… 244
12.3.1 Dagor 镜头 …… 244
12.3.2 分离镜头 …… 246
12.3.3 双高斯镜头 …… 246
12.4 可变焦面镜头和变焦镜头 …… 248
参考文献 …… 252

第13章 人眼和眼镜 …… 255

13.1 人眼 …… 255
13.2 眼镜片 …… 257
13.3 眼镜片设计 …… 260

13.3.1　Tscherning 椭圆 …… 262
13.3.2　非球面眼镜片 …… 263
13.4　楔形镜片 …… 264
13.5　球柱镜片 …… 265
参考文献 …… 266

第 14 章　天文望远镜 …… 268

14.1　分辨率和集光能力 …… 268
14.1.1　衍射效应和大气扰动 …… 268
14.1.2　望远镜的视觉限制 …… 269
14.1.3　望远镜的拍摄和 CCD 限制等级 …… 269
14.2　双反射式相机镜头和望远镜 …… 270
14.2.1　双反射镜系统的一阶近似设计 …… 271
14.2.2　双反射镜望远镜遮光罩 …… 273
14.3　折反相机镜头 …… 273
14.3.1　施密特相机镜头 …… 274
14.3.2　鲍沃斯（Bouwers）相机镜头 …… 276
14.3.3　鲍沃斯 – 马克苏托夫相机镜头 …… 277
14.3.4　去像散同心施密特 – 卡塞格林相机镜头 …… 277
14.3.5　平面场去像散施密特 – 卡塞格林相机镜头 …… 278
14.4　天文望远镜 …… 280
14.4.1　牛顿望远镜 …… 280
14.4.2　卡塞格林望远镜 …… 281
14.4.3　RC 望远镜 …… 284
14.4.4　达 – 客（Dall – Kirkham）望远镜 …… 286
14.4.5　格里（Gregory）望远镜 …… 286
14.4.6　施密特 – 卡塞格林望远镜 …… 287
14.4.7　马克苏托夫 – 卡塞格林望远镜 …… 288
14.4.8　折轴焦点结构和内氏焦点结构 …… 289
14.5　像场校正镜 …… 289
14.5.1　单视场致平器 …… 290
14.5.2　罗斯（Ross）校正器 …… 290
14.5.3　韦恩（Wynne）校正器 …… 291
14.5.4　非球面校正器 …… 291
14.6　多镜面望远镜 …… 293
14.7　主动光学和自适应光学 …… 294
参考文献 …… 295

第15章 目视系统和无焦系统 …… 299

15.1 目视光学系统 …… 299
15.1.1 在目视光学系统中出瞳的位置 …… 299
15.1.2 人眼的光学模型 …… 300
15.2 望远系统的基本原理 …… 301
15.3 无焦系统 …… 303
15.4 目视望远镜 …… 305
15.4.1 伽利略望远镜 …… 306
15.4.2 含正像目镜的望远镜 …… 309
15.4.3 含倒像棱镜的望远镜 …… 310
15.5 望远镜目镜 …… 311
15.5.1 惠更斯目镜和冉斯登目镜 …… 312
15.5.2 克耳纳目镜 …… 313
15.5.3 对称或普罗素目镜 …… 314
15.5.4 无畸变目镜 …… 315
15.5.5 埃尔弗目镜 …… 316
15.6 中继镜和潜望镜 …… 317
15.6.1 无影检眼镜 …… 318
15.6.2 内窥镜 …… 319
参考文献 …… 320

第16章 显微镜 …… 322

16.1 显微镜组成 …… 322
16.2 显微物镜 …… 325
16.2.1 低倍物镜 …… 327
16.2.2 李斯特物镜 …… 327
16.2.3 阿米西物镜 …… 329
16.2.4 油浸物镜 …… 329
16.2.5 其他类型的物镜 …… 330
16.2.6 反射式物镜 …… 330
16.2.7 紧凑型读写镜头 …… 330
16.3 显微目镜 …… 331
16.3.1 惠更斯目镜 …… 331
16.3.2 广角目镜 …… 334
16.4 显微镜照明 …… 335
参考文献 …… 336

第 17 章　投影系统 …… 338

17.1　成像投影仪 …… 338
17.2　投影仪的主要元件 …… 339
17.2.1　灯 …… 339
17.2.2　聚光镜 …… 340
17.2.3　投影镜头 …… 340
17.3　投影仪中的相干效应 …… 343
17.4　变形投影 …… 343
17.5　幻灯片和电影投影仪 …… 345
17.6　高射投影仪 …… 345
17.7　轮廓投影仪 …… 346
17.8　电视投影仪 …… 347
17.9　液晶电脑和家庭影院投影仪 …… 347
参考文献 …… 348

第 18 章　镜头设计优化 …… 350

18.1　基本原则 …… 350
18.2　优化方法 …… 351
18.3　格拉策尔自适应法 …… 352
18.4　约束阻尼最小二乘优化法 …… 352
18.4.1　问题线性化 …… 353
18.4.2　使用拉格朗日乘数法 …… 354
18.4.3　矩阵形式 …… 355
18.4.4　矩阵解的数值计算 …… 356
18.4.5　使用权重因子 …… 357
18.5　评价函数和边界条件 …… 358
18.5.1　评价函数 …… 358
18.5.2　边界条件 …… 360
18.6　现代光学设计的趋势 …… 361
18.7　镜头优化程序的流程 …… 362
18.8　镜头评估程序的实用技巧 …… 362
18.8.1　曲率、厚度和间隔符号约定 …… 362
18.8.2　指定曲率或者曲率 …… 363
18.8.3　指定厚度和间隔 …… 364
18.8.4　一些有用的技巧 …… 364
18.9　一些商业镜头设计程序 …… 364

参考文献 …… 365

附录 …… 368

附录 A　符号规则和初级像差系数概述 …… 368
A.1　符号规则 …… 368
A.2　初级像差系数概述 …… 370
A.2.1　Conrady 形式 …… 370
A.2.2　数值计算 …… 371
附录 B　光学表面的数学表示 …… 372
B.1　非球面法线的偏差 …… 374
B.2　二次曲面的一些参数 …… 375
B.3　离轴抛物面 …… 376
B.4　环面和球柱面 …… 377
参考文献 …… 378
附录 C　光学材料 …… 379
C.1　光学玻璃 …… 379
C.2　光学塑料 …… 383
C.3　红外材料和紫外材料 …… 384
参考文献 …… 384
附录 D　偏斜光线的精确光线追迹 …… 385
D.1　精确光线追迹 …… 385
D.1.1　从第一个表面转换到正切于下一个表面的平面 …… 385
D.1.2　从正切平面转换到密切球面 …… 386
D.1.3　从密切球面转换到非球面 …… 388
D.1.4　在非球面上折射 …… 390
D.1.5　环形面或者球柱面的折射 …… 391
D.2　光线追迹结果一览 …… 391
D.3　倾斜或者偏心表面的光线追迹 …… 393
参考文献 …… 395
附录 E　镜头设计方面的一些专业书籍 …… 395
E.1　书籍 …… 395
E.2　综述文章和一些书籍中的章节 …… 397

第 1 章　几何光学原理

1.1　光的波动性与费马原理

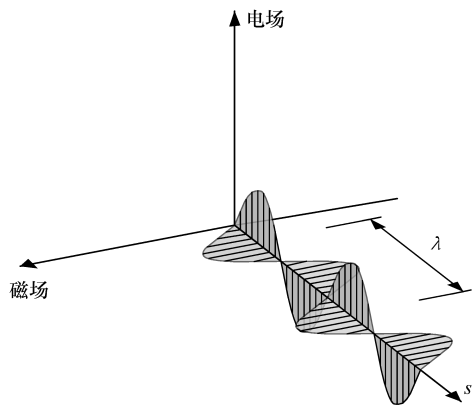


图 1-1　电磁波中的电场与磁场（有彩色插图）

在现代物理学中光的本性是最难的概念之一。因为它的量子属性，在一些试验中光必须被考虑成电磁波，但在另一些试验中又不得不把光当作粒子处理。但是，在一般的光学仪器中，我们可以只认为光是电磁波，电场与磁场相互垂直，并且它们都垂直于光的传播路径。如果光束是平面（线）偏振的，电场与磁场有一个固定的方向，随光波的传播，改变的只是振幅和符号。电场与磁场相互之间的相位关系如图 1-1 所示。这是电磁波最简单的形式，但是我们能找到更加复杂的光束形式，电场与磁场不在一个固定的平面内振动。电场和磁场的振动方向沿着光的运动轨迹而改变，这种不同的振动方向被称为偏振态。在任何物理光学教材中的表述是，任意偏振态能够被认为是两个相互垂直的平面偏振光束的叠加。偏振的类型取决于两个垂直分量的相位差和相对振幅。光波的频率 ν 和波长 λ 通过传播速度 v 联系起来，即

$$\lambda\nu = v \tag{1-1}$$

不同频率的光波有不同的颜色，对应于真空中确定的波长。在透镜设计中太阳光的夫琅和费谱线的频率（或者对应真空中的波长）用来定义光的颜色，见表 1-1。

表 1-1　部分夫琅禾费谱线及其波长

谱线	波长/nm	元素	颜色
i	365.01	Hg	紫外
h	404.66	Hg	紫色
g	435.84	Hg	蓝色
F′	479.99	Cd	蓝色
F	486.13	H	蓝色
e	546.07	Hg	绿色
d	587.56	He	黄色
D	589.29	Na	黄色
C′	643.85	Cd	红色
C	656.27	H	红色
r	706.52	He	红色

沿着光束传播路径，电场振幅 E 可以写成如下形式：

$$E = A\exp i(ks - \omega t) = A\exp i(\phi - \omega t) \tag{1-2}$$

这里的 A 是光波的振幅；k 是波数，定义为 $k = 2\pi/\lambda$；ω 是角频率，定义为 $\omega = 2\pi\nu$；λ 表示波长；ν 表示频率。在这个表达式中，s 是沿着光路的传播距离，ϕ 是所在点与原点之间的相位差，$\phi - \omega t$ 是瞬时相位。假定在原点处，$t = 0$ 时刻瞬时相位是 0。

在光束中，波前是在空间中有相同的瞬时相位 φ 的所有点组成的面。另一个等价的定义由 Kidger（2001）给出，波前是从物体上的一发光点，沿着光路光程为常数的面。因此，我们可以把光波想象为一族曲面，它们在一个确定的时刻振动达到最大，也就是光波的波峰。这些面就是波前，并且两个连续波前之间的距离是波长，如图 1-2 所示。

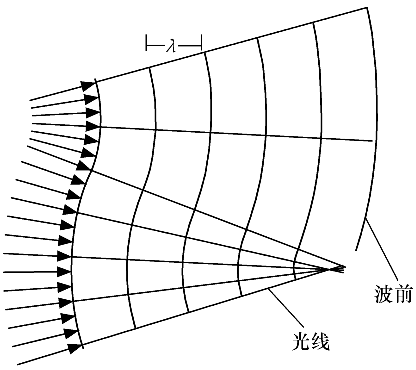


图 1-2　各向同性介质中光线与波前

光在真空中的传播速度大约为300000km/s，用字母 c 表示。在任何透明介质中，波速 v 小于 c（除了极少数已知的反常传播条件），它的值依赖于所考虑的介质。材料的折射率 n 被定义为

$$n = \frac{c}{v} \tag{1-3}$$

对于给定的材料，折射率 n 是光色（真空中波长）的函数。作为一般性的规律，随着波长的增加折射率减小，对于两种典型的玻璃如图 1-3 所示。只有在可见光谱区域之外一个确定的很小的光谱区域，折射率随着波长增加。

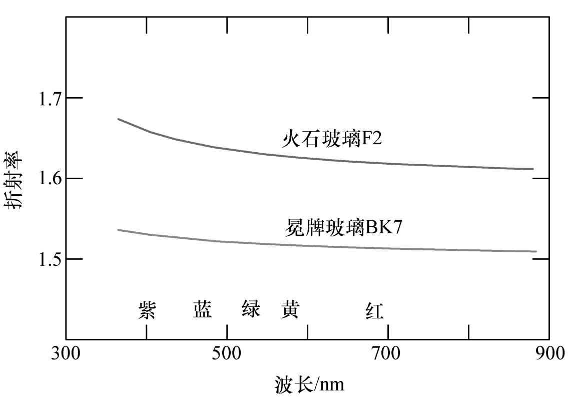


图 1-3　冕牌玻璃与火石玻璃折射率与波长的关系（有彩色插图）

人眼对于黄光有最大的敏感度，峰值为 555nm。这就是为什么通常选用钠双线的 D 线（589.3nm）作为参考光去测量材料对于可见光的折射率。但是发现使用这一双线测

量时测量的准确度不稳定。折射率测量的参考光采用了更加稳定的氦线 d（587.56nm）。表 1-2 给出了对于一些给定的材料在 d 线的折射率。

表 1-2　部分光学材料的折射率

介质	折射率
真空	1.0000
空气	1.0003
水	1.33
熔融石英	1.46
树脂玻璃	1.49
硼冕玻璃	1.51
一般冕玻璃	1.52
加拿大树胶	1.53
轻火石玻璃	1.57
重钡冕玻璃	1.62
重火石玻璃	1.72

尽管折射率的严格定义是相对于真空给出的，但实际上，它的测量与确定都是相对于空气做出的。

使用折射率的定义，对于光从点 P_1 到另一点 P_2，在各向同性的、均匀的或非均匀介质中传播的时间 t 可以由以下公式得出。

$$t = \frac{1}{c}\int_{P_2}^{P_1} n\mathrm{d}s \tag{1-4}$$

这里 $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$。光程 OP 的定义为

$$OP = \int_{P_2}^{P_1} n\mathrm{d}s \tag{1-5}$$

光束传播的方向定义为光线。如我们在第 8 章中看到的，由于衍射现象，分离不出来一根单独的光线。通过使用光栏，我们可以尝试分离一根单独的光线，如图 1-4 所示。当光栏口径的尺寸接近光波长时光束发散角增加，这种尝试变得不可能实现，这种效应对于越小的孔径越明显。当一个孔径或者透镜边缘的尺寸远大于光波长时，衍射效应变的不重要，我们可以在合理的精度内接受光线的概念。基于光线概念的光学分支就是几何光学。

如果光在介质中所有方向以相同的速度传播，则这个光学透明介质被称为均匀的和各向同性的介质，与电场（偏振）方向无关，如图 1-5a 所示。如果对于电场方向（偏振态）不同的光波传播速度不同，即使传播方向相同（见图 1-5b），则该透明介质是各向异性介质（如大多数晶体）。许多晶体，如石英和方解石都是各向异性晶体。在这些材料中，即使是均匀材质（介质内部每一点的折射率都相同），利用偏振方向，用一个点光源可以产生一个球面的或者椭球面的波前。本书中，我们将只考虑各向同性介质。如果光的速度依赖于传播方向而不是电场的振动方向（见图 1-5c），这种材料就是各向同性的和非均匀的（如梯度折射率玻璃或可变密度液体，将在后面讨论）。

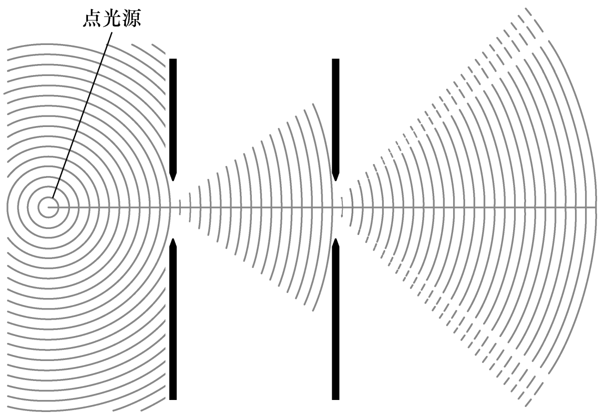


图 1-4　分离单个光线的失败试验

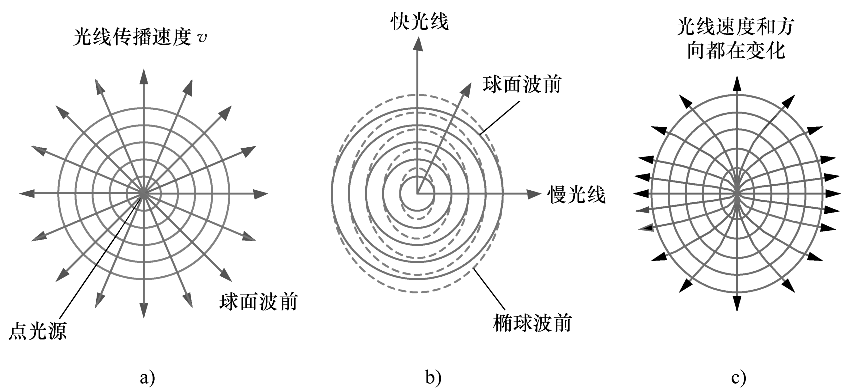


图 1-5　在不同类型介质中的波前

a）均匀的各向同性介质　b）均匀的各向异性介质　c）非均匀的各向同性介质

马吕斯定律。光程方程［式（1-5）］也可以写成如式（1-6）所示的微分形式。

$$\frac{\mathrm{d}OP}{\mathrm{d}s}=n \tag{1-6}$$

在这里 OP 沿着任何可能的几何路径 $\mathrm{d}s$ 测量。用另一种稍微不同的方式来说明这一点。我们设想一个点光源 p_0 位于均匀的各向同性介质中，这时，从光源 p_0 发出的所有光线传播光程 $V(p_0, p)$ 后到达点 $p(x, y, z)$，这些点在空间构成的空间面定义了一个波前。

根据马吕斯－杜宾（Malus－Dupin）原理，光传播路径总是垂直于波前。马吕斯－杜宾原理的表述：在各向同性介质中，光线总是垂直于波前。这是波前定义的一个推论。这个原理，如图 1-6 所示，通过数学中的光程函数描述，有

$$n(x,y,z)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = |\Delta V(p,p_0)|^2 \qquad (1\text{-}7)$$

光程 $V(p,\ p_0)$ 与相位 $\varphi(p,\ p_0)$ 的关系是 $V(p,\ p_0)=\phi(p,\ p_0)/k_0$，其中 $k_0=(2\pi/\lambda_0)$。光程函数最初由哈密尔顿（Hamilton）使用，但它的名字来源于 H. Bruns（1895）。如前面所表述的，马吕斯－杜宾原理对于均匀的和非均匀介质有效，但对于各向异性介质并不适用，诸如一些晶体。对于所有的几何光学来说这是基础，也是光线与波前关系或者在其他一些方面，如横向像差与波前变形之间的关系的基础，这将在第 7 章中更加详细地讨论。

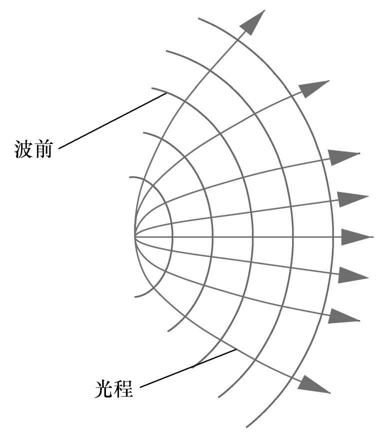


图 1-6　波前与光线的传播（光程函数）

费马原理：它是从马吕斯定律演变的必然结果，它是所有几何光学的基础。具体表述为："光波从一点传播到另一点，相对于可变的传播路径它的光程是恒定的。"

这一原理的等价说法是光的传播时间相对于其他传播路径来说必须是最大值、最小值或一个稳定的值。图 1-7 所示为对于两种情况的一些例子，光从 P_1 点必须经反射镜反射再到 P_2 点。在各向异性介质（见图 1-8a）或者非连续（见图 1-8b）介质中，光线的传播也可能有许多传播路径。

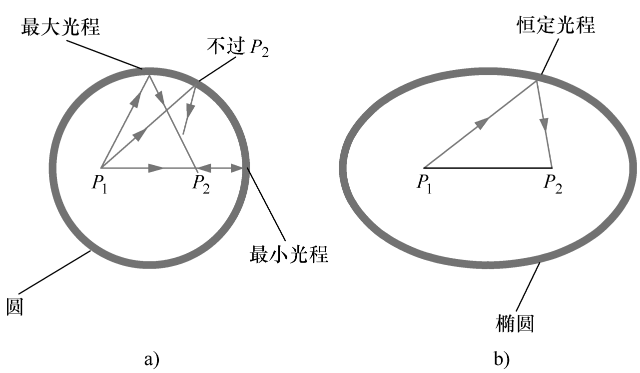


图 1-7　在中空的球体和中空的椭球体内的费马原理图示

a）球体　b）椭球体

在这种情况下，P_1 点是物，P_2 点是它的像。从物到像沿所有传播路径的光程是相同的。这个恒定的光程在几何光学的哈密尔顿理论中称为系统的点特性，因为它只依赖于初始点与截止点，而不是特殊路径。

梯度折射率：通过一些特殊工艺，玻璃的折射率能够被做成非均匀的，这就是梯度

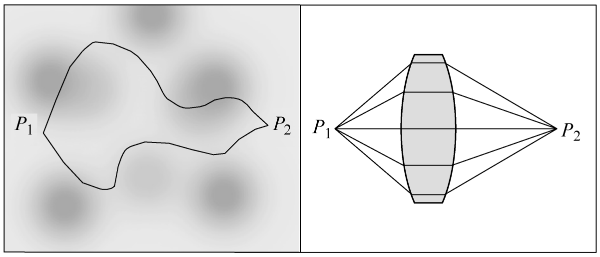


图1-8　对于任何可能路径从 P_1 点到 P_2 点的光程长度相同

a）各向异性介质　b）非连续介质

折射率（GRIN）（Marchand，1978；Moore，1995）材料。对于制造梯度折射率光学元器件，大多数方法是通过离子交换过程实现的。这种梯度折射率材料能够使用玻璃、聚合物、硒化锌/硫化锌或者锗制造出来。梯度折射率光纤也能通过化学气相沉积方法来制造。在自然界中，梯度折射率经常出现在路面上方的热空气中，产生幻景（海市蜃楼）。

在透镜中折射率变化或者梯度折射率可以是沿着光轴的方向的，这被称为轴向梯度折射率。它可以是在垂直于光轴方向变化，这就是径向梯度折射率。它也可以是关于一点对称的，被称为球梯度折射率。球梯度折射率在光学器件中很少使用，主要是因为它不容易制造。

梯度折射率透镜在光学器件中用来校正许多像差是非常有用的。用梯度折射率光学器件的两个非常流行的例子是单透镜校正球差和内窥镜成像器件，这些将在后面章节中讲到。

1.2　反射和折射定律

如下所述，反射和折射定律能够通过费马原理很容易地得到。

1.2.1　反射定律

反射定律的第一条内容表述为入射光线、反射光线和反射面法线位于同一平面内。这一定律可以解释为费马原理的一个推论。

反射定律的第二条内容表述为反射角的大小等于入射角的大小。如图1-9所示，光线从 $P_1(0, y_1)$ 点出发后在平面反射镜 $P(x, 0)$ 点反射，最终到达 $P_2(x_2, y_2)$ 点。如果折射率是 n，从 P_1 点到 P_2 点的光程

$$OP = n\sqrt{x^2 + y_1^2} + n\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2} \tag{1-8}$$

因为光程必须是极值，我们设置条件

$$\frac{\mathrm{d}OP}{\mathrm{d}x} = \frac{nx}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{n(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0 \tag{1-9}$$

由以上方程我们可以很容易地得到

$$\sin I = -\sin I' \tag{1-10}$$

这里的负号来引入一个约定，角 I 和 I'符号相反是因为它们位于反射面法线的两侧。因此，我们得出 $I = -I'$的结论，这就是反射定律的第二条内容。

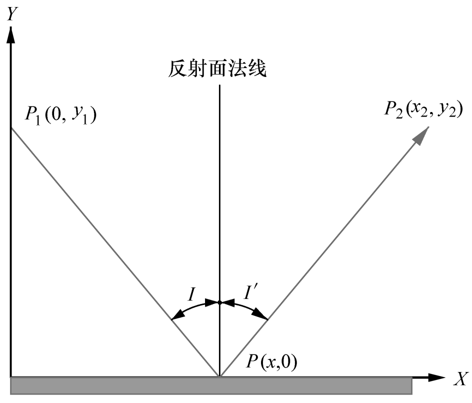


图 1-9　反射定律的推导

1.2.2　折射定律

折射定律的第一条内容表述为入射光线、折射光线和折射面法线位于同一平面内。这一定律也是费马原理的直接推论。

折射定律的第二条内容也被称为斯涅尔定律，由图 1-10 推导，这里我们能很容易地得到光程表达式

$$OP = n\sqrt{x^2 + y_1^2} + n'\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2} \tag{1-11}$$

运用费马原理，我们利用条件

$$\frac{\mathrm{d}OP}{\mathrm{d}x} = \frac{nx}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{n'(x_2 - x)}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}} = 0 \tag{1-12}$$

可以得到

$$n\sin I = n'\sin I' \tag{1-13}$$

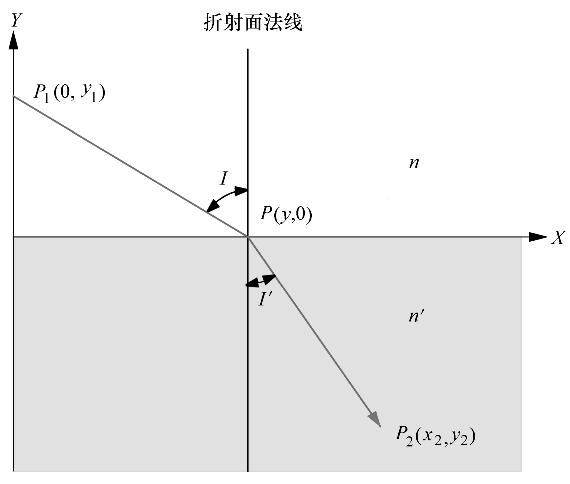


图 1-10　折射定律的推导

式（1-13）就是斯涅尔定律。当折射率 n 与 n'大小相同而符号相反时，折射定律与反射定律的关系式相同。这一事实被用于带反射镜的光学系统的光线追迹。

1.2.3　折射定律的矢量形式

通常，当光线不能限定在同一个平面内时，特别是光线经过许多次反射和折射的情况下，在三维空间中应用斯涅尔定律是不容易的。这时，折射定律矢量形式就体现出巨大的优势。依据图1-11，折射定律矢量形式可以很容易地得到。我们定义一个沿着入射光线方向的矢量 $\boldsymbol{S}_1$，大小为 n，沿着折射光线方向的矢量 $\boldsymbol{S}_2$，大小为 n'。斯涅尔定律可以被写成

$$|\boldsymbol{S}_1|\sin I = |\boldsymbol{S}_2|\sin I' \tag{1-14}$$

折射矢量 $\boldsymbol{S}_2$ 与入射矢量 $\boldsymbol{S}_1$ 的关系为

$$\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_1 - \boldsymbol{a} \tag{1-15}$$

另一方面，非常容易发现矢量 $\boldsymbol{a}$ 平行于折射面的法向矢量 $\boldsymbol{P}$，并且它的大小为

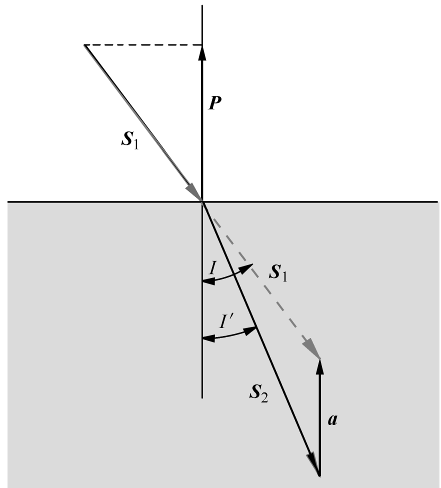


图1-11　折射定律矢量形式的推导

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}| &= \Gamma \\ &= (|\boldsymbol{S}_2|\cos I' - |\boldsymbol{S}_1|\cos I) \\ &= n'\cos I' - n\cos I\end{aligned} \tag{1-16}$$

这样，最终折射定律的矢量形式为

$$\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}_1 - \Gamma\boldsymbol{P} \tag{1-17}$$

这里的 Γ 的计算公式为

$$\begin{aligned}\Gamma &= n'\cos I' - n\cos I \\ &= n'\left[\left(\frac{n}{n'}\cos I\right)^2 - \left(\frac{n}{n'}\right)^2 + 1\right]^{1/2} - n\cos I\end{aligned} \tag{1-18}$$

1.3　基本子午光线追迹方程组

球面是光学中最常用的表面，平面可以认为是球面在曲率半径无限大的特殊情况。如图1-12所示，光线经球面折射时，我们定义如下参数：

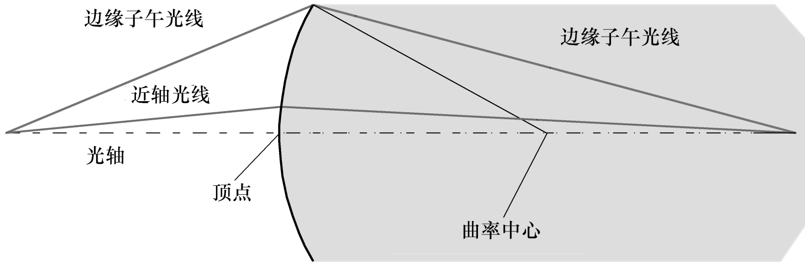


图1-12　折射球面中的一些定义

1）曲率中心：包含折射表面的虚构球体的中心。

2）曲率半径：折射表面到曲率中心的距离。

3）顶点：在折射表面自由孔径中心的点。这一定义假设孔径是一个对中的，且折射表面是球面。更一般的，如果折射表面不是球形的而是旋转对称的，顶点是对称轴与光学表面的交点。甚至大多数情况下，我们能说顶点就是表面方程参考坐标系的原点。

4）光轴：通过曲率中心和顶点的虚构直线。对于旋转对称的非球面，光轴是对称轴。

根据光线的入射方向，入射在球面上的光线分类如下：

1）子午光线：任何一条与光轴共面的光线。该平面称为子午面，这时，曲面的法线和折射后的光线也在该平面内。

2）斜光线：除子午光线以外的光线。在这种情况下，光线与光轴不在同一平面内。

3）近轴光线：相对于光轴有一个很小角度的子午光线或者斜光线是近轴光线。但是，更一般的，我们认为近轴光线是真实光线满足小角度近似条件下的近似结果。

4）真实光线：任何一条非近轴光线，要么是子午光线，要么是斜光线。

在像差理论中，还定义了轴上光线、轴外点子午光线、弧矢光线。轴上光线是光轴上物点发出的子午光线。轴外点子午光线（简称子午光线）是轴外物点发出的子午光线。或者说，所有的轴外点子午光线都是子午光线，但是，子午光线不全是轴外点子午光线。轴外物点发出的子午光线所在平面称为子午面。另一方面，弧矢平面是指包含物点和入瞳（将在本章后面定义）中心点，并垂直于子午面的平面，在弧矢平面内的斜光线称为弧矢光线。定义了子午与弧矢平面之后，上述这些概念以后将变得更加清晰。为了弄清楚这些概念，建议读者参看第 6 章图 6-1。

子午光线适用于追迹光线轴球面上的折射。依据子午光线的特性，我们可以得到光学系统许多有趣的性质。追迹斜光线的数学计算比子午光线更加复杂，这方面的研究在附录 D 中给出。

图 1-13 中显示了子午光线与球面在 P 点相交。球面在 P 点的法线是 N，球面的曲率中心是 C。

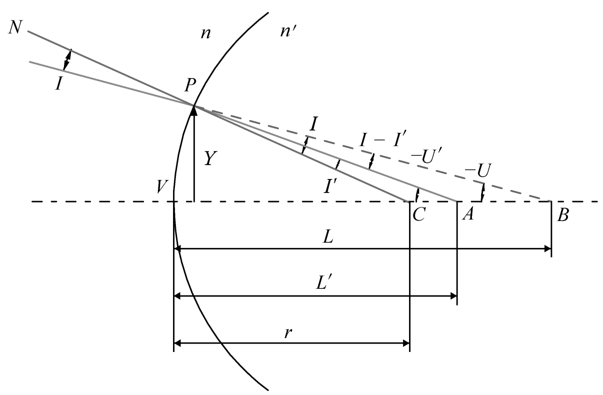


图 1-13　光轴面光线在球形表面的折射

在图1-13中，我们必须定义所有参数的符号规则。这个规则必须与大多数教科书和商用光学设计程序相一致。不幸的是，在各种光学著作中有许多种版本的符号定义规则，其中使用最为广泛的符号定义规则与Conrady（1957）的老符号定义规则相背离。在本书中，假定光线自左向右传播，光线经表面折射后各种基本量的符号规则定义如下：

1）曲率半径 r：如果曲率中心在顶点的右边，则曲率半径为正；反之，则曲率半径为负。曲率 c 是曲率半径的倒数（$c=1/r$）。

2）角 U 与 U'：用解析几何的观点，如果子午光线的斜率为正，则角为正，否则角为负。[㊀] Conrady（1957）和Kingslake（1965）用的是相反的约定。

3）角 I 与 I'：如果光线是从左到右入射至表面，同时在法线下方，或者光线是从右向左入射至表面，同时光线在法线上方，则入射角 I 为正，否则入射角为负。如果光线离开表面是从左向右，同时在法线上方，或者光线离开是从右向左，同时在法线下方，则折射角 I' 是正的，否则折射角为负的。这一符号约定在图1-14中说明。[㊁]

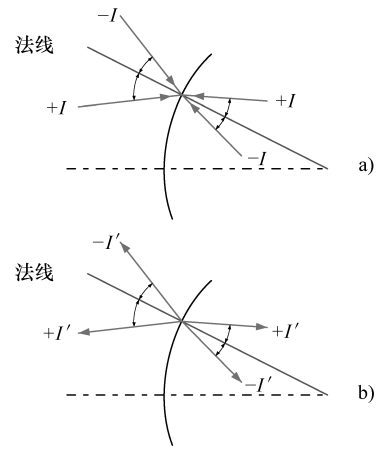


图1-14　对于入射角与折射角的符号约定

4）距离 L 和 L'：L 是从表面顶点到折射前（物方）子午光线与光轴的交点的距离。如果物在顶点的右侧，L 是正的，否则 L 为负的。L' 是从表面顶点到折射后（像方）子午光线与光轴的交点的距离。如果这一像在顶点的右侧，L' 为正，否则 L' 为负。对于光线从左向右传播这一规则是有效的，对于光线从右向左传播也是成立的。

5）厚度 t：在光学系统中当下一表面位于所考虑的光学表面右侧时，厚度 t 是正的，否则 t 为负的。

6）光线高度 Y：如果光线与光学表面的交点位于光轴的上方，光线高度 Y 为正，否则为负。

7）折射率 n：如果光从介质的左侧传播到右侧，折射率 n 为正，否则为负。在任意反射表面，该表面折射率改变一次符号，这样任意表面的反射都可以使用折射定律计算。

依据这一符号规则，可以发现，对于任意光线，三个参数 L、Y 和 U 不同时为正。再次观察图1-13，这里的负参数是暗含一个负号的，在三角形 PCB 中应用正弦定理，有

㊀ 光线与光轴的夹角 U、U' 的定义：光线以顺时针方向转到光轴，角度为正；光线以逆时针方向转到光轴，角度为负。——译者注

㊁ 入射角 I、出射角 I' 正负号的定义：光线以顺时针方向转到法线，则角度为正；光线以逆时针方向转到法线，则角度为负。——译者注

$$\frac{\sin I}{L-r}=\frac{-\sin U}{r} \tag{1-19}$$

同时，在三角形 PCA 中运用正弦定理，有

$$\frac{\sin I'}{L'-r}=\frac{-\sin U'}{r} \tag{1-20}$$

因为三角形 PCB 与 PCA 共有一个相同的角，三角形的内角和都是180°，所以必满足

$$I-U=I'-U' \tag{1-21}$$

最后我们依据斯涅尔定律得

$$n\sin I=n'\sin I' \tag{1-22}$$

在这些关系中，参数 r、n 和 n'固定已知，其中 L、L'、I、I'、U 和 U'是变量。因为我们有四个方程，如果对于确定一条入射光线 L、I、U 三个参数中任意两个已知，则所有剩下的变量是可以计算出来的。

一个光学系统通常是由一个接一个的许多光学表面组成的。当所有光学表面的曲率中心位于同一条直线上时，我们得到一个共轴光学系统。这条直线称为光轴。这些系统由多个表面形成，所有与下一表面相关的参数通过下标 +1 来表示。于是，得到转换方程组

$$U_{+1}=U' \tag{1-23}$$

$$n_{+1}=n' \tag{1-24}$$

$$L_{+1}=L'-t \tag{1-25}$$

这里 t 是当前表面顶点到下一表面顶点的距离。

1.3.1　子午光线追迹的 $L-U$ 方法

在前面章节中描述的方程组已经被 Conrady（1957）描述，并且可以用于光线追迹。这里之所以叫作 $L-U$ 方法是因为入射光线与折射光线是通过距离 L 和 L'以及角 U 和 U'来定义的。尽管这些方程是准确的，但它们从不用于实际光线追迹，因为对于平面与小曲率表面，以及对于光线平行于光轴即 L 和 L'是无穷量时，该方程组失效。

1.3.2　子午光线追迹的 $Q-U$ 方法

一种替代的光线追迹方法是通过角 U 与从表面顶点到子午光线垂线部分 Q 来定义子午光线，如图 1-15所示。从点 C 出发并且垂直于线 Q 的直线，将此部分分割为两块。因此，从图中我们可以得出

$$\sin I=Qc+\sin U \tag{1-26}$$

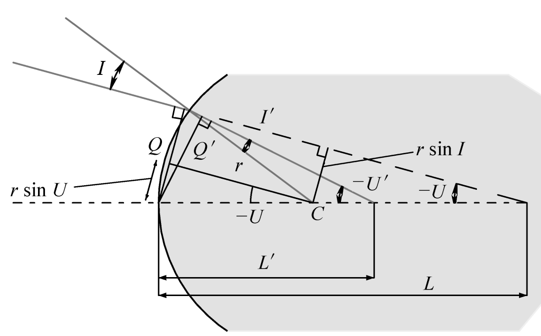


图 1-15　用 $Q-U$ 方法追迹子午光线（有彩色插图）

这里曲率 $c=1/r$ 用来替代曲率半径 r。然后，从式（1-22）折射定律我们得到：

$$\sin I' = \frac{n}{n'}\sin I \tag{1-27}$$

由式（1-21）可知

$$U' = U - I + I' \tag{1-28}$$

从式（1-26）中，我们可以得到 Q 的表达式，并且按照这一基本规则得到 Q'

$$Q' = \frac{\sin I' - \sin U'}{c} \tag{1-29}$$

当表面是平面（$c = 0$）时，为了得到等价的表达式，我们能从式（1-15）得出 $Q = -L\sin U$，对于平面，$\tan U = Y/L$。因此，对于平面可以得到一个替代的表达式

$$Q' = Q\frac{\cos U'}{\cos U} \tag{1-30}$$

转换方程，在图1-16中清晰地表示出来

$$Q_{+1} = Q' + t\sin U' \tag{1-31}$$

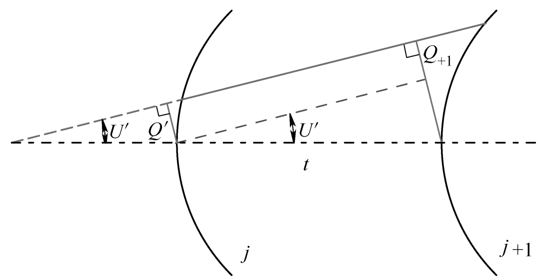


图1-16　对于子午光线的光线追迹转换关系的推导

1.4　高斯光学或者一阶光学

用近轴光线近似代替所有的光线追迹关系式就形成了一阶光学。由于这一原因，高斯光学被认为是一阶光学的同义词。在光学系统中对于给定位置的物，像的位置通过一阶光学近似计算得到，这些计算公式被称为高斯方程。接下来我们推导高斯方程。

高斯方程是一阶光学的主要成就之一，即它能从式(1-19)～式(1-22)推导得出。做任何近轴近似之前，我们将使用精确方程。从式（1-19），我们能得到

$$\frac{L}{r} = 1 - \frac{\sin I}{\sin U} = \frac{\sin U - \sin I}{\sin U} \tag{1-32}$$

从式（1-32）我们得到

$$\frac{r}{L} = 1 - \frac{\sin I}{\sin I - \sin U} \tag{1-33}$$

通过在方程两边同乘 n/r 得到

$$\frac{n}{L} = \frac{n}{r} - \frac{n}{r}\cdot\frac{\sin I}{\sin I - \sin U} \tag{1-34}$$

同样地，由式（1-20）可以得到：

$$\frac{n'}{L'} = \frac{n'}{r} - \frac{n'}{r}\cdot\frac{\sin I'}{\sin I' - \sin U'} \tag{1-35}$$

现在我们用式（1-35）减去式（1-34），并且使用斯涅尔定律式[（1-22）]得

$$\frac{n'}{L'} - \frac{n}{L} = \frac{n' - n}{r} + \frac{n\sin I}{r}\left(\frac{1}{\sin I - \sin U} - \frac{1}{\sin I' - \sin U'}\right) \tag{1-36}$$

式（1-36）是准确的，但是现在我们将进行近轴近似。近轴光线近似是以角 I 和 U 的弧度值替代三角函数 $\sin I$ 和 $\sin U$。如果角度 I 和 U 非常小，则这些近似在精度方面没有重大损失，近似是有效的。如前面所阐述的，一阶光学或者说高斯光学是几何光学中只计算近轴光线的分支。如下所示，在精确方程中进行相应的替代，可以得到一阶光学光线追迹的方程组：

$$\begin{gathered}\sin I \Rightarrow i \\ \sin I' \Rightarrow i' \\ \sin U \Rightarrow u \\ \sin U' \Rightarrow u' \\ L \Rightarrow l \\ L' = l'\end{gathered} \tag{1-37}$$

从式（1-19）到式（1-22）经替换后可以得到

$$\frac{i}{l-r} = \frac{-u}{r} \tag{1-38}$$

$$\frac{i'}{l'-r} = \frac{-u'}{r} \tag{1-39}$$

$$-u + i = -u' + i' \tag{1-40}$$

$$ni = n'i' \tag{1-41}$$

转换方程［式（1-23）和式（1-25）］现在成为

$$u_{+1} = u' \tag{1-42}$$

$$l_{+1} = l' - t \tag{1-43}$$

在近轴方程组中为了区别于准确值，变量 L 和 L' 已经被 l 和 l' 替换。一阶光学能在相当准确的程度内得到大多数透镜和光学系统性质，但单色像差除外。

对于近轴光线（一阶光学）通过近似方程［式（1-36）和式（1-40）］，我们最终得到高斯方程

$$\frac{n'-n}{r} = \frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} \tag{1-44}$$

当给定的从折射表面到物的距离是 l，用这个方程，我们就能得到从折射表面到像的距离 l'，而且距离 l' 与入射角无关的。从这一点，我们能得出结论，在一阶光学近似中，点物成点像。

高斯光学非常重要，于是人们使用多种不同的方法推导出该方程。这些方法有的是基于几何光学，也有的是基于波动光学推导的。Greco 等（1992）已经给出了所有这些不同方法的对比。

通常，透镜设计者使用高斯方程时，更倾向于使用角度 u 和 u' 描述，而不是用距离 l 和 l' 描述。然后，再用曲率 c 替代半径 r，这一关系变成

$$(n'-n)cy = -n'u' + nu \tag{1-45}$$

这里光线高度 y 与距离 l 和 l'，以及角度 u 和 u' 的关系为

$$u = -\frac{y}{l} \tag{1-46}$$

$$u' = -\frac{y}{l'} \tag{1-47}$$

依据我们的符号约定，转换方程［式（1-43）］替换为

$$y_{+1} = y + tu' \tag{1-48}$$

一个光学系统的近轴子午光线追迹可以依据下面的一组方程计算，假定曲面数据（r、t 和 n）已知，对于光线的初始数据也已知。在 $y-nu$ 方法中这些初始数据是光线高度 y 和折射率 n 与角度 u 的乘积 nu。

通过下面从高斯方程［式（1-45）］推导的关系可以追迹光线：

$$n'u' = nu - (n' - n)yc \tag{1-49}$$

用转换方程［式（1-48）］写成

$$y_{+1} = y + \frac{tn'u'}{n'} \tag{1-50}$$

如果想得到入射角的值，它能用方程式（1-38）和式（1-46）计算

$$i = yc + u \tag{1-51}$$

如果我们定义球形光学表面的光焦度 ϕ 为

$$\phi = (n' - n)c \tag{1-52}$$

我们能把式（1-49）写为

$$n'u' = nu - \phi y \tag{1-53}$$

这样，用矩阵的形式，这个表达式被写成

$$\begin{pmatrix} n'u' \\ y_{+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (t/n') & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} nu \\ y \end{pmatrix} \tag{1-54}$$

其中的矩阵就是我们熟知的折射矩阵。这样，传递到下一面可以写成

$$\begin{pmatrix} n'u' \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\phi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} nu \\ y \end{pmatrix} \tag{1-55}$$

这个矩阵就是转换矩阵。这样，正如 Brower（1964）所描述的，通过整个光学系统近轴光线追迹可以由矩阵的乘积计算。

1.5　成像

一个折射表面、一个透镜或者一个透镜系统，在成像时，建立了物面上一点到像面上一点的一一对应关系。如图1-17所示，成像系统功能是将物面上一点出射的光经折射（或反射）后聚焦至像面的单个点上。

依据物与成像系统的相对位置，物可以分为实物和虚物两个类型。

1）实物。与光学表面的距离 L 为负时，物是实物。换句话说，也就是物位于光学表面左侧，如图1-18和图1-19所示。相反地，当光从右向左传播时，L 为正时物是实物。实物可以是一个物理的实体或由另一个光学系统所成的像。

2）虚物。与光学表面的距离 L 为正时，物是虚物。换句话说，也就是物位于光学

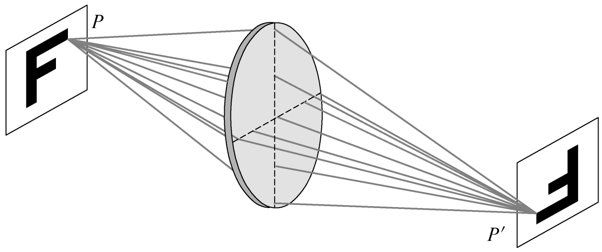


图 1-17　光系统成像

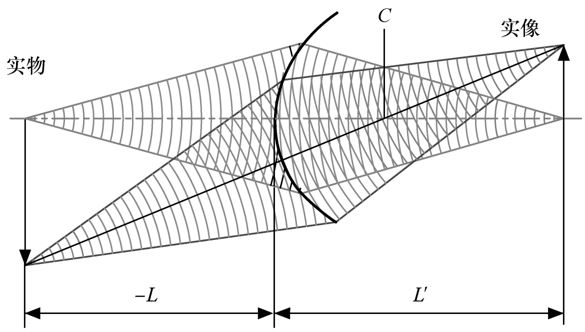


图 1-18　实物成实像

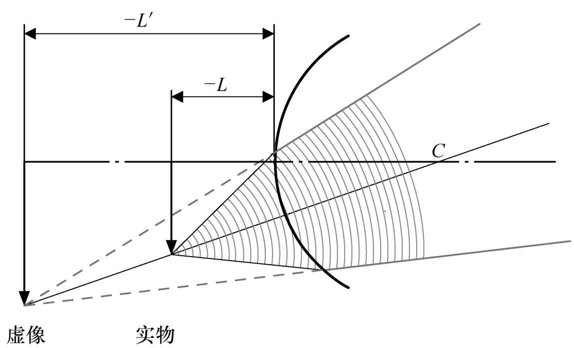


图 1-19　实物成虚像

表面右侧，如图 1-20 和图 1-21 所示。当光从右向左传播时，L 为负时物是虚物。我们考虑另一个光学系统位于光学系统与它的像之间时，新的光学系统将改变像的位置、大小和它的方向。第一光学系统的像是第二光学系统的虚物。

和物类似，像也可分为实像与虚像，具体如下：

1）实像。如果与光学表面的距离 L' 为正时，像为实像。换句话说，也就是像位于光学表面的右侧，如图 1-18 和图 1-20 所示。当光从右向左传播时，L' 为负时像为实像。一个实像能够用下面任意两种方式观察到：在成像处放置一个接收屏或在离成像位

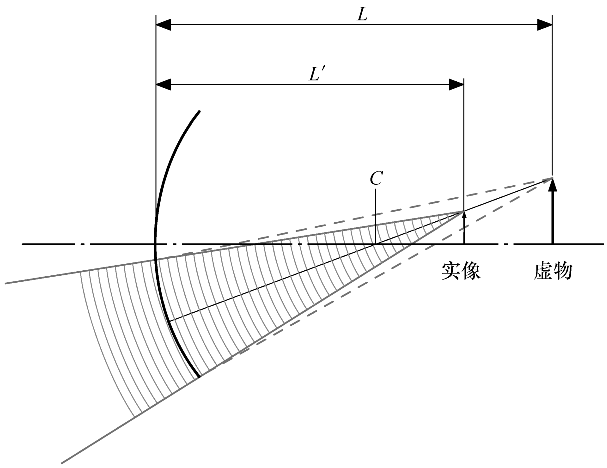


图 1-20　虚物成实像

置较远处用眼睛直接观察。

2）虚像。如果与光学表面的距离 L' 为负时，像为虚像。换句话说，也就是像位于光学表面左侧，如图 1-19 与图 1-21 所示。当光从右向左传播时，L' 为正时像为虚像。物上一点发出的光线经过光学表面或光学系统后，光线不会聚而是发散，这时成的像就是虚像。这时光束有一个明显散开的位置点，这个点就是虚像点。虚像可以用眼睛观察到，但不能用屏接收到。

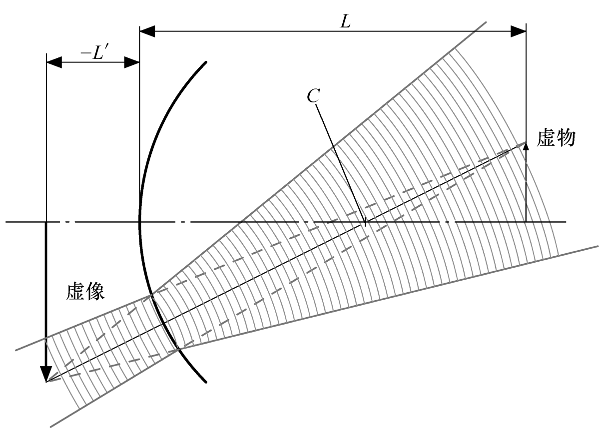


图 1-21　一个虚物成一虚像

1.6　孔径光阑、光瞳和主光线

光学系统中的折射或反射表面尺寸不是无限大的，是有限的，通常情况下，其形状

是圆形。光学系统有限的横向尺寸限制了通过它的光束。我们考虑一个共轴光学系统，如果光线由一个位于光轴上的点物发出，进入光学系统后，很可能只有一个表面限制光束的横向尺寸，如图 1-22 所示。这一限制表面称为光学系统的孔径光阑。如果孔径光阑是一个薄片光栏，我们可能认为这个表面（光栏）是前后折射率相同的虚假的折射面。系统孔径光阑可能在任意位置的表面。它可以不必在系统的中间或者最后。

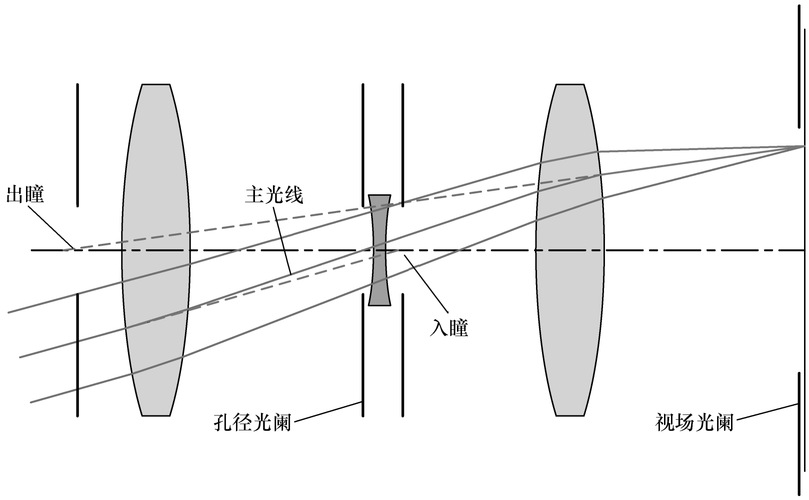


图 1-22　主光线、入瞳、出瞳的定义

一些光学表面位于孔径光阑之前，另一些光学表面位于孔径光阑之后。如果从系统的入口观察孔径光阑，这时将通过位于光阑之前的表面观察到光阑，它的大小与位置明显改变了。这个被观察到的孔径光阑的像称作入瞳。如果从系统后方观察孔径光阑，这时将通过位于它之后的表面观察到光阑，同样地，它的大小和位置明显改变了。这个被观察到的孔径光阑的像称作出瞳。

如图 1-22 所示，所有从物面上轴外点出射并到达像面上像点的子午光线中只有一条通过光阑中心。这条光线称为主光线，它被定义为从轴外物点出发并且通过光阑中心的光线。在物空间的主光线的延伸线与光轴相交于入瞳中心。类似地，在像空间的主光线的延伸线与光轴相交于出瞳中心。

在光学系统中从任意介质也能观察孔径光阑的像，而不仅仅只是从物方介质或者从像方介质观察。如图 1-23 所示，孔径光阑的实（或虚）像位于主光线（或它的延伸线）与光轴的交点处。孔径光阑的这个像就是对应的那个折射面或介质里的光瞳。

有关主光线的所有参量通过在字符上面加一短横线来表示。例如，$\bar{y}$表示主光线的近轴高度，$\bar{u}$表示主光线关于光轴的近轴角。由定义可知，$\bar{y}$的值在光阑处等于 0。相对于轴向光线（从一个轴上物点出射的子午光线）的所有量在表示时，字符上面不加短横线。

在介质 j 里的光瞳上边缘子午光线高度由 Y_{pj}表示，近轴子午光线在光瞳上的高度由

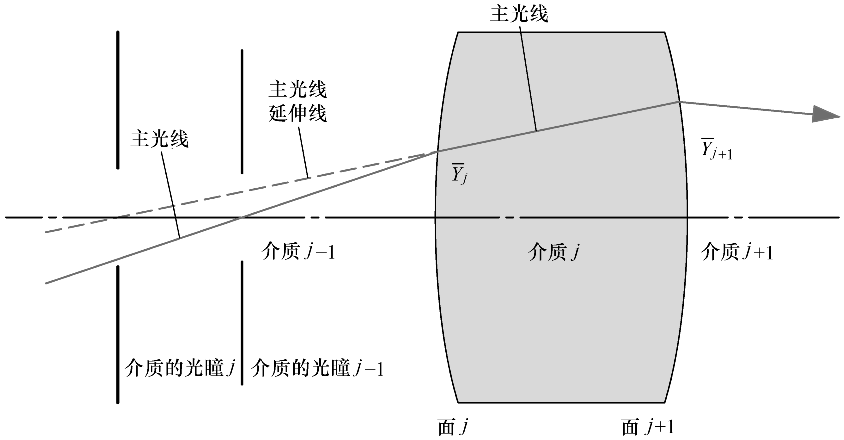


图1-23　在光学系统中表面光瞳的位置

y_{pj}表示。在入瞳和出瞳处的边缘子午光线的高度由 Y_{entr}和 Y_{exit}表示，或者近轴边缘子午光线的高度由 y_{entr}和 y_{exit}表示。

总之，孔径光阑是限制进入光学系统光线数量的孔径，并且它的像是光瞳。另一方面，视场光阑位于像面，限制像的横向尺寸，如图1-22所示。

如图1-24所示，如果进入系统的光束来自于轴外物点，一些面可能限制光束的横向尺寸，并形成明显的近椭圆形的孔径，这时便说这一光学系统存在渐晕。只有当光束的入射角度超过一定限制时才会出现渐晕效应。如图1-25所示，共轴光学系统经常采取一些可行方式来避免渐晕，以避免在场边缘的像的照度过分降低以及在设计阶段对成像分析有一个很好的控制。但是，有时为了去除一些很难校正的像差而在光学系统中引入渐晕。

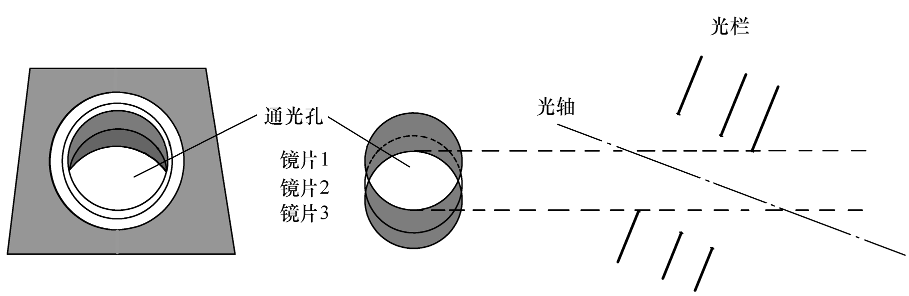


图1-24　透镜的渐晕

先前在1.3节中定义的子午面与弧矢面现在可以更加规范地定义了。子午面是包含主光线（也是轴外物点的出射光线）的一个光轴面。弧矢面是一个垂直于子午面的平面，它包含主光线。我们可能注意到，在一个共轴光学系统中，对于两个连续光学表面之间的所有介质仅有共同的一个子午面。但是，对于每一介质都有对应的一个弧矢面，

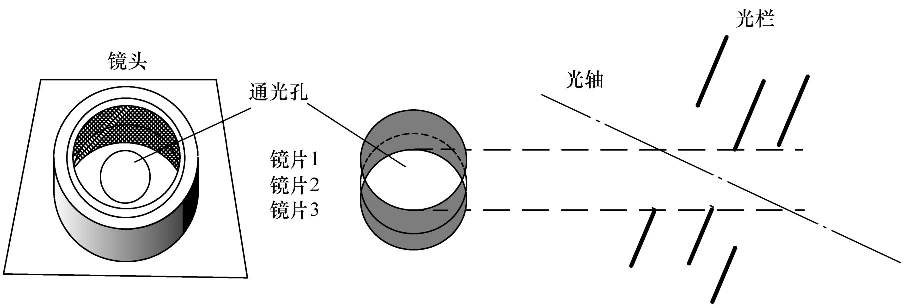


图 1-25　对于一个给定的离轴角度光阑尺寸可以避免渐晕

因为主光线在每一表面都被折射。

为了追迹通过光学系统的主光线，我们必须知道它在物方介质中的传播方向。这一方向必须满足主光线通过光阑中心。

我们考虑一个位于入瞳中心的小圆，它的直径与离轴点光源到光学系统的距离相比非常小。之后，所有从点光源出发通过这个小圆进入光瞳的光线将是近似平行的，并且靠近主光线。这些光线是真实的（非近轴的），并且我们将把它们归为近轴光线。

物方远心系统是入瞳位于无限远的光学系统。因为孔径光阑在后焦平面上，所以物必须在有限距离内，避免像成在焦平面上。我们考虑图 1-26a所示的光学系统，因为入瞳在无限距离处，所以主光线平行于光轴。物与系统之间距离的微小改变引入的小的离焦，不会引起成像放大率的任何改变。物方远心系统的这一特性在测量系统中非常有用，因为小的离焦不引入任何误差。

如图 1-26b 所示，像方远心系统的出瞳在无限距离处。孔径光阑在前焦平面处。物可能在离系统的任意距

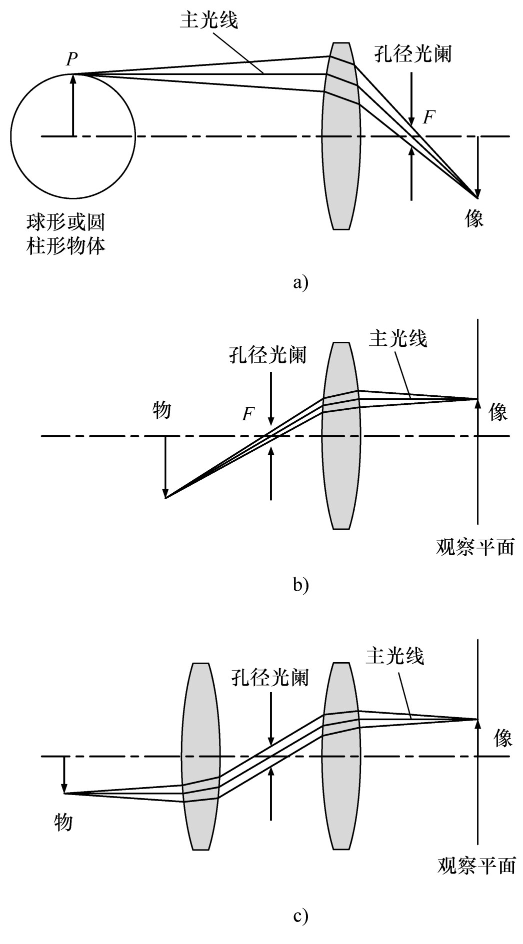


图 1-26　远心透镜
a）物方远心　b）像方远心　c）物方和像方远心

离处。在这样的系统中，通过改变光学系统到观察屏之间的距离引起的小的离焦不改变像的大小。

光学系统可能同时是物方与像方远心的系统，这时物和像与光学系统之间的距离是有限的。在这种情况下，孔径光阑在系统的中间，位于孔径光阑前面的部分系统的后焦面，同时也是孔径光阑后面的部分系统的前焦平面上，如图1-26c所示。

1.7　德拉诺关系

德拉诺（Delano，1952）发现了边缘子午光线和近轴光线折射时一个有意义的关系。如图1-27所示，我们考虑一个近轴光线和一个边缘光线。这些光线不需要由同一物点出射。

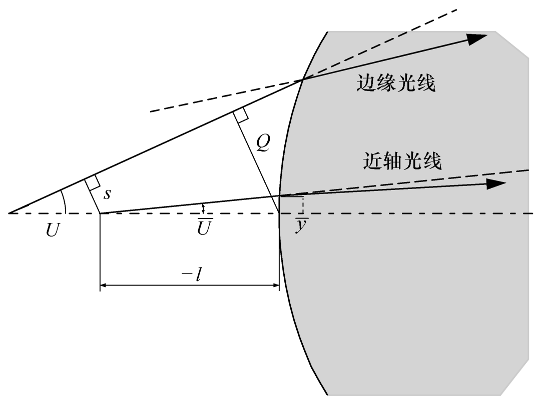


图1-27　德拉诺关系的推导

从光学表面的顶点到入射和折射后的边缘光线的垂直距离分别是 Q 和 Q'。从入射和折射后的近轴光线与光轴的交点到入射和折射后的边缘光线的垂直距离分别是 s 和 s'。因此，通过 Q 和 U 定义边缘光线，并且通过 y 和 u 定义近轴光线。容易得到

$$s = Q + l\sin U \tag{1-56}$$

因此，在式（1-56）两边同乘以 u，并且运用式（1-46），有

$$su = Qu - y\sin U \tag{1-57}$$

利用式（1-26）和式（1-51），我们得到

$$snu = -yn\sin I + Qni \tag{1-58}$$

同理，对于折射后的光线我们能得到

$$s'n'u' = -yn'\sin I' + Q'n'i' \tag{1-59}$$

因此，用式（1-59）减去式（1-58），并利用斯涅尔定律［式（1-22）和式（1-41）］，我们最终得到

$$s'n'u' = snu + (Q' - Q)ni \tag{1-60}$$

这就是德拉诺关系，在研究球差时非常有用，将在后面讲述。

1.8　光学正弦定理

这一原理差不多同时由阿贝和亥姆霍兹发现。在研究它之前，我们先定义光学表面

的一个辅轴，它是通过离轴物点（对于这个光学表面）和光学面曲率中心的虚构直线。因此，共轴光学系统的每个表面都有不同的辅轴。正弦定理定义了在像平面上像的大小和光线的会聚或者发散度之间的比率。这一定理可以依据图 1-28 推导得出。我们考虑一个高度为 H 的物点 O 和辅轴。我们也假定像 O' 在辅轴（这只有对弧矢光线是成立的，接下来将描述）上，高度为 H'。然后，我们能得到

$$\frac{H'}{H}=\frac{L'-r}{L-r} \tag{1-61}$$

现在利用式（1-19）和式（1-20），我们能得到

$$nH\sin U=n'H'\sin U' \tag{1-62}$$

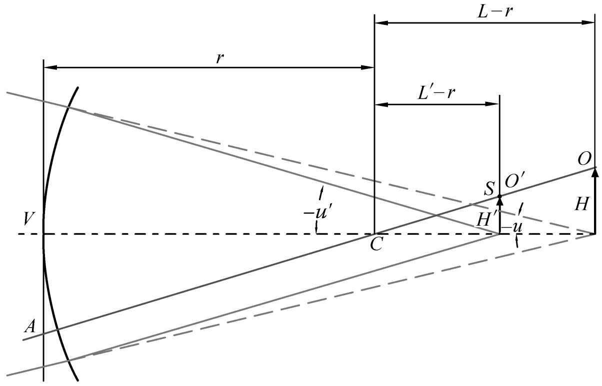


图 1-28　光学正弦定理

现在我们利用图 1-29 来证明弧矢像 S 在辅轴上。光线 T_1 和 T_2 是两个子午光线，它们分别通过入瞳的上边缘和下边缘。这两个光线会聚于点 T，它被称作子午焦点，但并不一定在辅轴上。两个弧矢光线 S_1 和 S_2 关于辅轴对称，它们会聚于 S，称为弧矢焦点。因为关于辅轴对称，点 S 在这个辅轴上。

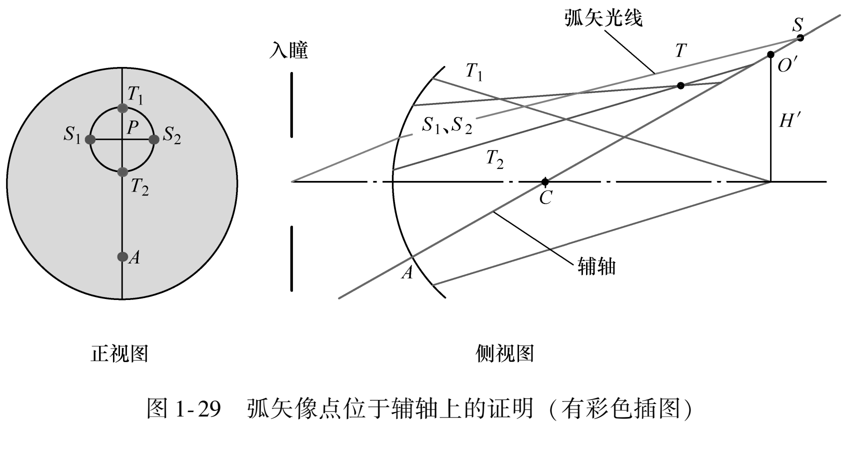


图 1-29　弧矢像点位于辅轴上的证明（有彩色插图）

如果视场很小（与曲率半径相比 H' 很小），弧矢焦点 S 接近于点 O'。于是，我们可以说这一关系只有对弧矢光线和对于光轴附近相对较小的轴外视场区域严格有效，这时距离 $O'S$ 可以被忽略。这个关系就是光学正弦定理。

注意到小视场是假定的很重要，而不是对于子午边缘光线的近轴近似。这意味着角 U 和 U' 可以很大，光学正弦定理依然有效。

三重积 $nH\sin U$ 可以说是一个光学不变量，因为该参量的大小在光线通过同轴折射面和反射面形成的任意光学系统所有面的前后保持不变。

因为出瞳是入瞳的像，我们可以对光瞳和主光线应用这个理论，于是得到

$$n_1 Y_{\mathrm{entr}} \sin \overline{U}_1 = n'_k Y'_{\mathrm{exit}} \sin \overline{U}'_k \tag{1-63}$$

这里的 Y_{entr} 和 Y'_{exit} 分别是在入瞳和出瞳处的子午光线高度。

1.9　拉格朗日不变量

光学正弦定理的近轴近似被称为拉格朗日定理，它可写为

$$\Lambda = hnu = h'n'u' \tag{1-64}$$

这里的 Λ 被称为拉格朗日不变量，因为在光学系统中对于所有的光学表面，它有一个恒定的值。对于所要考虑的光学表面，主光线高度在物平面和像平面上测量，这里是 h 和 h'。在物面和像面上子午光线的高度为0。

除了相对近轴焦面的轴向位移（如果存在球差），位于辅轴上的弧矢像的位置可以用拉格朗日理论来计算。在近轴近似中，不存在像散，所以子午像必须与弧矢像同时在辅轴上。像的位置作为高斯像是已知的。拉格朗日理论的物理解释可能是能量守恒定律。从物面出射的所有光线被光学系统收集，这直接与角 u 二次方成比例。因此，扩展物体所成像的照度与从透镜到物体的距离无关，只依赖于透镜的直径和像的距离。

通过子午光线与主光线的交换，按照对于出瞳和入瞳的放大率，拉格朗日不变量也能被写成

$$\Lambda = -ny_{\mathrm{entr}}\overline{u} = -n'y_{\mathrm{exit}}\overline{u}' \tag{1-65}$$

这里的 y_{entr} 和 y_{exit} 分别是对于所考虑表面的入瞳和出瞳的半口径。这里存在的负号将在下面说明。该半口径是在所对应的光学表面的入瞳和出瞳面上测量子午光线的高度。在入瞳和出瞳面上主光线高度是0。

拉格朗日不变量一般的表达式可以依据子午光线（u 和 y）和主光线（$\overline{u}$ 和 $\overline{y}$）的高度和斜率计算，不必一定要在像面或者光瞳面上计算。为了推导式（1-65），我们考虑子午光线和主光线如图1-30所示的光学系统。物高 h 可以写成

$$h = (l - \overline{l})\overline{u} \tag{1-66}$$

因此，拉格朗日不变量可以写为

$$n(l - \overline{l})\overline{u}u = n'(l' - \overline{l}')\overline{u}'u' \tag{1-67}$$

现在，利用式（1-46）和它对于主光线的等价形式得：

$$\Lambda = n(\overline{y}u - y\overline{u}) = n'(\overline{y}u' - y\overline{u}') \tag{1-68}$$

在沿着光轴的任意地方都能够计算式（1-68）。如果在像面测量主光线$\bar{y}$，则边缘光线高度是0。如果边缘光线高度是一个光瞳的半径，则主光线高度$\bar{y}$是0。请注意负号的存在，这在之前已经指明。通过写出对子午光线和主光线的高斯方程，然后再取两个方程的比值，不变量的这一形式也能容易地从高斯方程［式（1-45）］中得到。

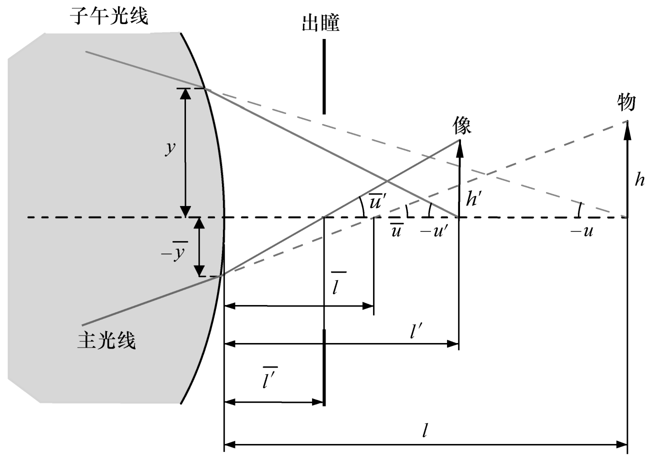


图 1-30　拉格朗日不变量另一种形式的推导

从式（1-68）中得到另一种有用的不变量表达式

$$(\bar{y}_{+1}-\bar{y})u'=(y_{+1}-y)\bar{u}' \tag{1-69}$$

将这一表达式中角$\bar{u}'$的值带入式（1-68），我们得到

$$\Lambda=n'u'\frac{\bar{y}(y-y_{+1})-y(\bar{y}-\bar{y}_{+1})}{y-y_{+1}}=n'u'\frac{y\bar{y}_{+1}-y_{+1}\bar{y}}{y-y_{+1}} \tag{1-70}$$

因此，利用式（1-47）和式（1-42）得

$$\Lambda=n'\frac{y\bar{y}_{+1}-y_{+1}\bar{y}}{l'-l_{+1}} \tag{1-71}$$

我们可以看出$l'-l_{+1}$是两个光学表面之间的距离t，因此我们最终得到拉格朗日不变量的另一形式

$$\Lambda=n'\frac{y\bar{y}_{+1}-y_{+1}\bar{y}}{t} \tag{1-72}$$

这是在光学系统中光学表面上的子午光线和主光线的高度，与在下一表面上对应光线高度的关系。

1.10　赫歇尔不变量和成像放大率

光学系统的垂轴放大率的定义为

$$m=\frac{H'}{H} \tag{1-73}$$

这里的H是物高，H'是像高。利用光学正弦定理，这一放大率公式可以写成

$$m=\frac{n\sin U}{n'\sin U'} \tag{1-74}$$

我们看出光学系统的横向放大率依赖于从光轴上物体出射的轴向光线会聚角U'的

大小和折射率的比值 n/n'。这一放大率的近轴近似为

$$m=\frac{h'}{h}=\frac{nu}{n'u'} \tag{1-75}$$

轴向放大率$\bar{m}$定义为小的像移 $\Delta l'$ 和相应的物体位移 Δl 的比。通过高斯方程［式（1-44）］的微分得

$$\bar{m}=\frac{\Delta l'}{\Delta l}=\frac{nl'^2}{n'l^2} \tag{1-76}$$

但是利用式（1-46）与式（1-47）的关系，我们可以得到

$$\bar{m}=\frac{\Delta l'}{\Delta l}=\frac{nu^2}{n'u'^2} \tag{1-77}$$

重写这一表达式，有

$$\Delta l nu^2=\Delta l' n' u'^2 \tag{1-78}$$

对于系统的所有面折射前后，量 Δlnu^2 是一个常量，它被称作赫歇尔不变量。从式（1-75）和式（1-77）中我们能得到两种放大率之间的关系

$$\bar{m}=\frac{n'}{n}m^2 \tag{1-79}$$

因此，我们能看到只有当折射率比值 n/n' 等于横向放大率 m 时，横向放大率才等于轴向放大率。

利用式（1-66）的不变量，一个光学系统的近轴角放大率 M 定义为光学系统折射前后主光线斜率的比，可以写为

$$M=\frac{\bar{u}'_k}{\bar{u}_1}=\frac{n_1 y_{\text{entr}}}{n_k' y_{\text{exit}}} \tag{1-80}$$

比值 $y_{\text{exit}}/y_{\text{entr}}$ 被称作光瞳放大率。如果物方和像方介质是空气，角放大率等于入瞳和出瞳的比值。也就是说，角放大率等于光瞳放大率的倒数。

本章描述的光学不变量不止一种，还有一些其他的，比如由 Welford（1968）描述的偏斜不变量。

为了对本章做一个总结，我们现在研究一个有意思的关系，像一个不变量，但不是刚刚描述的一个面到另一个面的形式。相反地，这是一个对于任意入射方向和路径的折射光线都保持恒定的量。很容易从式（1-40）和斯涅尔定律方程［式（1-41）］得出这一关系

$$\frac{u-u'}{i}=\frac{\bar{u}-\bar{u}'}{\bar{i}}=1-\frac{n}{n'} \tag{1-81}$$

因为这一表达式对于任意光线是一个常量，所以它对于子午光线和主光线有相同的值。这一关系的另一种解释是在球面上折射光线方向的变化（$u-u'$）直接与入射角 i 成比例。

关于几何光学基础的更多细节可以在 Herzberger（1963）的文章中，以及由 Hopkins、Hanau（1962a，1962b）和 Hopkins、Malacara（1988）所著书中的一些章节中找到。

参考文献

[1] Brower, W. , *Matrix Methods in Optical Instrument Design*, W. A. Benjamin, New York (1964) .

[2] Conrady, A. E. , *Applied Optics and Optical Design*, Dover Publications, New York (1957) .

[3] Delano, E. , "A General Contribution Formula for Tangential Rays," *J. Opt. Soc. Am.* , **42**, 631 - 633 (1952) .

[4] Greco, V. , Molesini, G. , and Quercioli, F. , "Remarks on the Gaussian Formula for the Refraction at a Single Spherical Interface," *Am. J. Phys.* , **60**, 131 - 135 (1992) .

[5] Herzberger, M. , "Some Recent Ideas in the Field of Geometrical Optics," *J. Opt. Soc. Am.* , **53**, 661 - 671 (1963) .

[6] Hopkins, R. E. and Hanau, R. , "Fundamentals of Geometrical Optics," in *Military Standardization Handbook: Optical Design*, *MIL - HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962a) .

[7] Hopkins, R. E. and Hanau, R. , "First Order Optics", in *Military standardization Handbook: Optical Design*, *MIL - HDBK* 141, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962b) .

[8] Hopkins, R. E. and Malacara, D. , "Applied Optics and Optical Methods," in *Methods of Experimental Physics*, *Geometrical and Instrumental Optics*, Vol. 25, D. Malacara, ed. , Academic Press, San Diego, CA (1988) .

[9] Kidger, M. J. , *Fundamentals of Optical Design*, SPIE. The International Society for Optical Engineering, Bellingham, WA (2001) .

[10] Kingslake, R. , "Basic Geometrical Optics," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. I, R. Kingslake, ed. , Academic Press, New York (1965) .

[11] Marchand, E. W. , *Gradient Index Optics*, Academic Press, New York (1978) .

[12] Moore, D. T. , "Gradient - Index Materials," in *CRC Handbook of Laser Science and Technology*, *Supplement 1 : Lasers*, M. J. Weber, ed. , 499 - 505, CRC Press, New York (1995) .

[13] Welford, W. T. , "A Note on the Skew Invariant of Optical Systems," *Opt. Acta*, **15**, 621 - 623 (1968) .

第 2 章　薄透镜和球面镜

2.1　薄透镜

透镜是一个有会聚功能的玻璃片，它的表面是球面的、凹的或者凸的，并且表面在中心几乎是平行的。我们首先考虑平行光束到达透镜前表面的情况，如果平行光束经过透镜折射后会聚于一点，那么这种透镜就叫作会聚透镜或者正透镜；如果平行光束经过透镜折射后是发散的，那么这种透镜就叫作发散透镜或者负透镜，如图 2-1 所示。

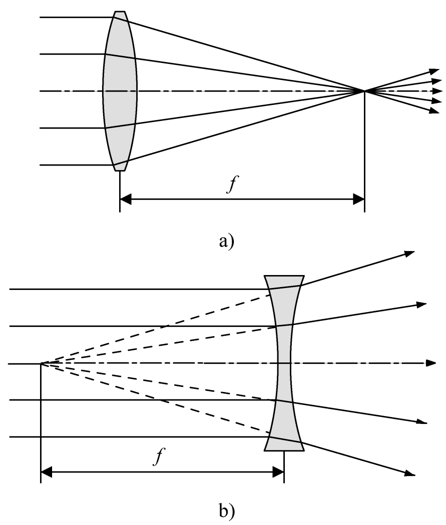


图 2-1　会聚透镜和发散透镜

a）正透镜　b）负透镜

在正常情况下，当透镜周围介质比透镜材质密度低时（或者透镜周围介质比透镜材质的折射率小），中间厚边缘薄的透镜是会聚透镜，中间薄边缘厚的透镜是负透镜。薄透镜有很多不同形状，如图 2-2 所示。

由于透镜有两个球面（平面是曲率半径为无穷大的球面），我们定义光轴为经过透镜两个球面曲率中心的直线。如果透镜有一个面是平面，那么光轴为经过球面曲率中心并且垂直于平面的直线。显而易见，光轴会经过透镜最厚或者最薄的地方。

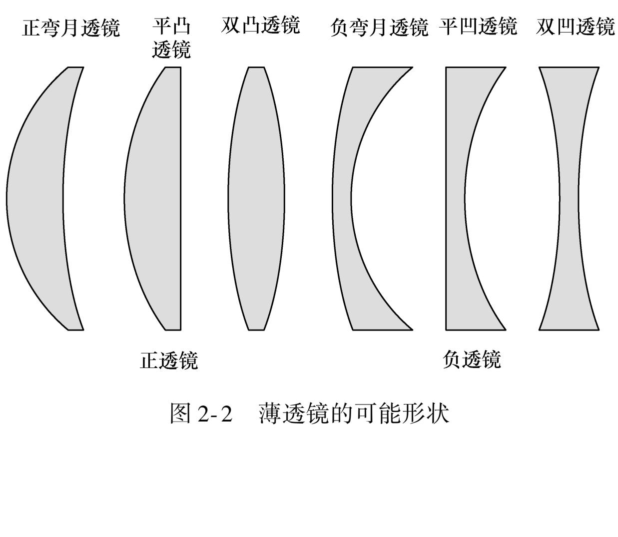


图 2-2　薄透镜的可能形状

透镜的焦点是平行光束经过透镜折射后的会聚点或者是平行光束经过透镜折射后的发散光束的发散源点。焦距是会聚点或者发散源点到薄透镜的距离。会聚透镜具有正焦距，发散透镜具有负焦距。透镜的光焦度 P 定义为焦距的倒数。

$$P=\frac{1}{f} \tag{2-1}$$

当焦距的单位是 m 的时候，光焦度的单位是屈光度。

为了理解透镜是如何折射光束的，我们对透镜的每个面应用高斯定理［式(1-44)］，如图 2-3 所示。对于透镜第一个面，我们可以写出

$$\frac{n'_1}{l'_1}-\frac{n_1}{l_1}=\frac{n'_1-n_1}{r_1} \tag{2-2}$$

对于透镜第二个面，有

$$\frac{n'_2}{l'_2}-\frac{n_2}{l_2}=\frac{n'_2-n_2}{r_2} \tag{2-3}$$

利用传递方程［式（1-42）和式（1-43)］，厚度 t 等于零（$l_2=l'_1$），折射率 $n'_1=n_2$，透镜的折射率表示为 n，我们可以得到

$$\frac{n-n_1}{r_1}+\frac{n'_2-n}{r_2}=\frac{n'_2}{l'_2}-\frac{n_1}{l_1} \tag{2-4}$$

式（2-4）中，l_1 是透镜的物距，l'_2是透镜的像距。如果物是虚物，那么 l_1 是正的；如果物是实物，那么 l_1 是负的。如果像是实像，那么 l'_2是正的；如果像是虚像，那么 l'_2是负的。

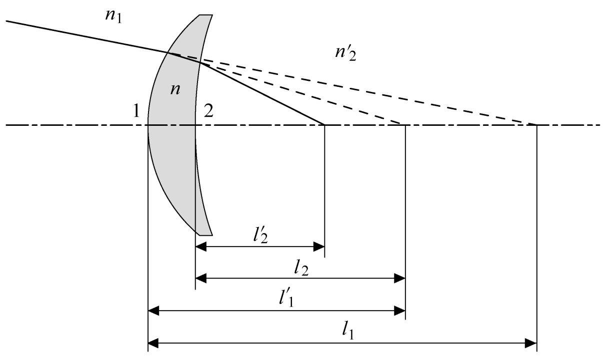


图 2-3　在薄透镜中的光线折射

给定一个薄透镜，式（2-4）的左边是一个常数，因此其右边对于所有位置的物和像也是一个常数。一个特殊情况引起了我们的兴趣，当物在无限远时（$\frac{1}{l_1}=0$），像距 l'_2等于焦距 f'，对于平行光束从左边到达透镜表面，从式（2-4），我们可以得到

$$\frac{n'_2}{f'}=\frac{n-n_1}{r_1}+\frac{n'_2-n}{r_2}=\frac{n'_2}{l'_2}-\frac{n_1}{l_1} \tag{2-5}$$

如果平行光束从右向左传播进入薄透镜，那么会聚点就在透镜左边的焦点上，即 $-l_1=f$，可以得到

$$\frac{n_1}{f}=\frac{n-n_1}{r_1}+\frac{n'_2-n}{r_2}=\frac{n'_2}{l'_2}-\frac{n_1}{l_1} \tag{2-6}$$

对于物方介质和像方介质不同的透镜，它的两个焦距并不等于透镜两边都是空气时的焦距，它们之间满足

$$\frac{n'_2}{f'}=\frac{n_1}{f} \tag{2-7}$$

在透镜前后介质都是空气的特殊情况下，焦距都是相等的（$f=f'=f$）。

$$\begin{aligned}\frac{1}{f}&=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\\&=(n-1)\kappa=(n-1)(c_1-c_2)\\&=P=P_1+P_2\end{aligned} \tag{2-8}$$

式中，κ 是透镜总的曲率。式（2-8）叫作透镜制造公式。

2.2　薄透镜的成像公式

在薄透镜成像中某些光线路径如图2-4所示。我们注意到当透镜前后的介质相同时，经过透镜中心的光线是直的。从式(2-5)～式(2-7)，我们发现，在经过一些代数运算后，物像位置的关系可以表示为

$$1=\frac{f'}{l'_2}-\frac{f}{l_1} \tag{2-9}$$

我们定义 x 为物方焦点到物之间的距离，如果物在焦点的右边，那么 x 为正值。

$$x=l_1+f \tag{2-10}$$

同样，我们定义 x' 是像方焦点到像之间的距离，如果像在焦点的右边，那么 x' 是正值，如图2-4所示。

$$x'=l'_2+f' \tag{2-11}$$

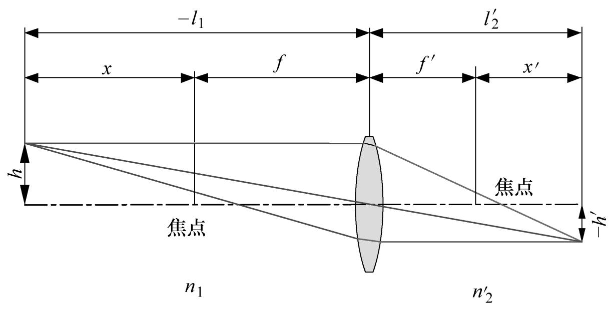


图2-4　薄透镜成像

我们发现

$$xx' = -ff' \tag{2-12}$$

这就是我们熟知的牛顿公式。

如果透镜周围的介质是空气，那么在式（2-7）中，$n'_2 = n_1 = 1$，$f = f'$，因此我们可以写出

$$\begin{aligned}\frac{1}{f} &= \frac{1}{l'_2} - \frac{1}{l_2} \\ &= \frac{1}{y}(u'_2 - u_1)\end{aligned} \tag{2-13}$$

或者

$$xx' = -f^2 \tag{2-14}$$

如果物像位置可以用上面这些关系式来表示，那么我们就认为物像是彼此共轭的。

近轴横向放大率 m 可以用下列任何一个关系式表达，这些关系式是通过式（2-7）、式（2-10）和式（2-11）以及图 2-4 推导出的。

$$\begin{aligned}m &= \frac{h'}{h} = \frac{n_1 l'_2}{n'_2 l_1} \\ &= \frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'} \\ &= 1 - \frac{l'_2}{f'} = \left(1 + \frac{l_1}{f}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{2-15}$$

2.3　薄透镜的节点

我们注意到光线在通过薄透镜中心后会改变之前传播的方向，除非透镜前后介质的折射率是相同的。中心光线的偏差可以通过式（2-16）得到。

$$n_1 \sin\theta_1 = n'_2 \sin\theta_2 \tag{2-16}$$

薄透镜的节点 N 被定义为光轴上的一点，任何光线进入透镜指向节点并经过节点后从透镜出射的光线不会改变原先的传播方向。节点位置如图 2-5 所示。当 $l'_2 = -l_1$，根据图 2-5 所示，利用式（2-7）和式（2-9），薄透镜到节点的距离 $A = l'_2$ 可以用式（2-17）表示。

$$A = \left(1 - \frac{n_1}{n'_2}\right)f' \tag{2-17}$$

正如我们所预想的，当薄透镜置于空气中时，节点就在薄透镜的中心。

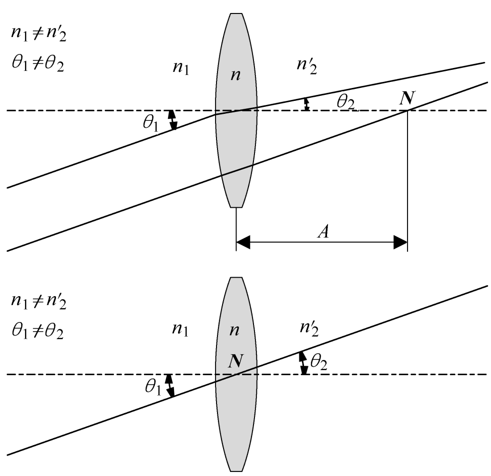


图 2-5　薄透镜的节点位置

2.4 会聚透镜的成像

图2-6给出了三种不同类型会聚透镜的成像。会聚透镜的成像可以通过式（2-13）求出的值所绘出的图2-7来研究。我们发现，会聚透镜不可能对虚物成实像。当我们移动物体使其接近焦点的时候，会出现一个奇点。在焦点的一侧，所成的像是实像；在焦点的另一侧，所成的像是虚像。

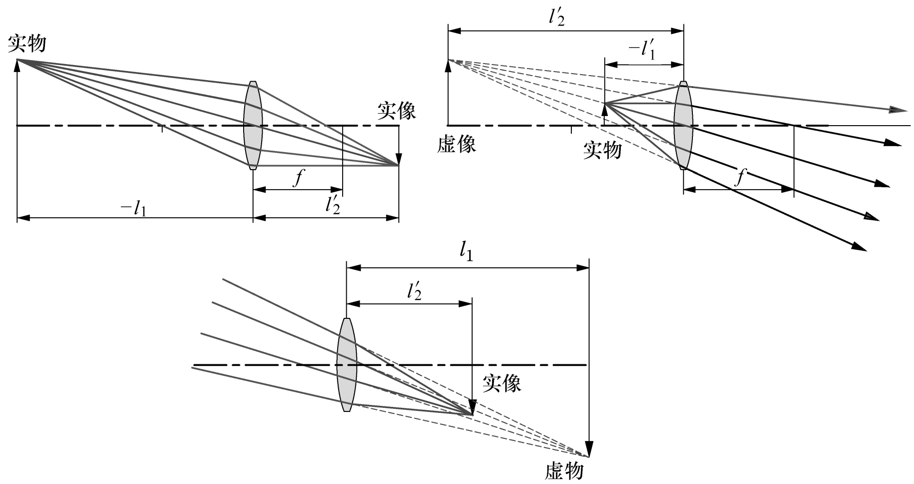
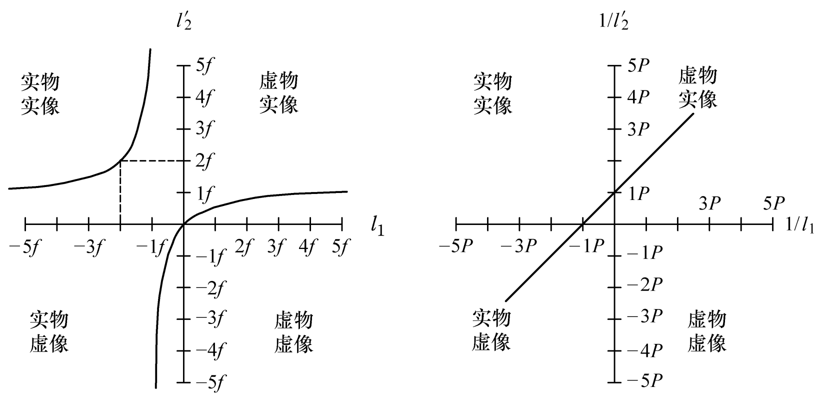


图2-6 会聚薄透镜的成像



a) b)

图2-7 会聚透镜成像图表

2.5 发散透镜的成像

图2-8给出了三种不同类型发散透镜的成像。发散透镜的成像可以用和会聚透镜成

像相同的方式研究，通过图 2-9 我们发现发散透镜是不可能对实物成实像的。当我们移动虚物使其接近焦点 f' 的时候，会出现一个奇点。在焦点的一边，所成的像是实像；在焦点的另一边，所成的像是虚像。关于一阶近轴光学更多的细节可以查阅 Hopkins 和 Hanau 的文章。

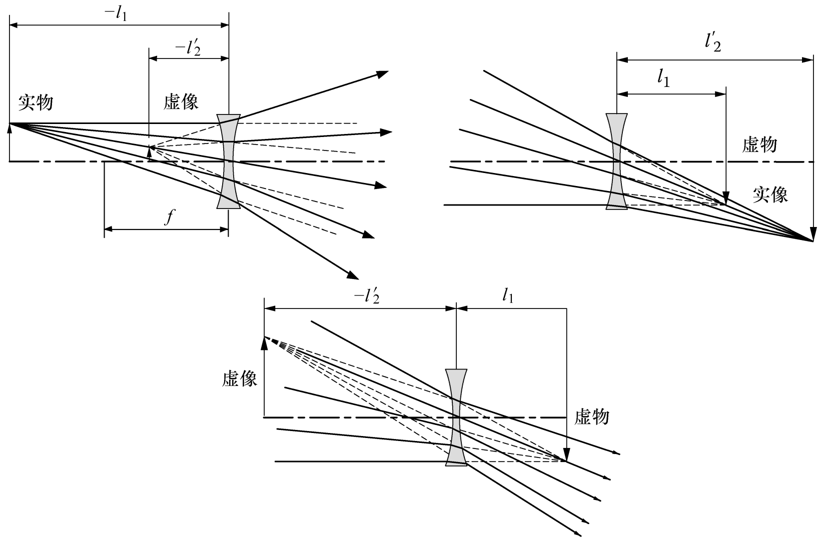


图 2-8　发散薄透镜的成像

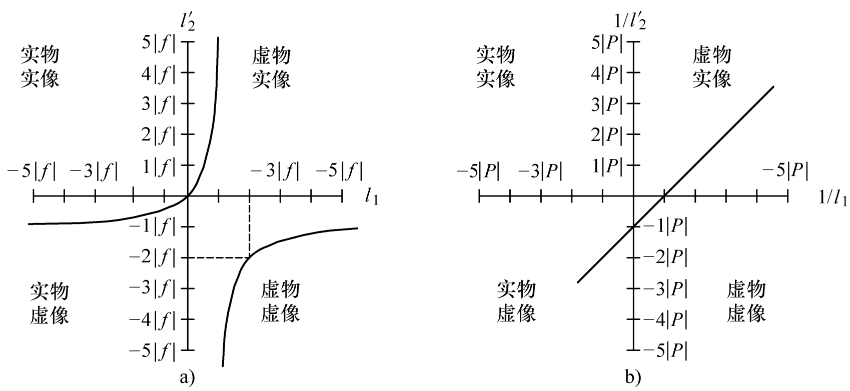


图 2-9　发散透镜成像图表

参考文献

[1] Hopkins, R. E. and Hanau, R.,“Fundamentals of Geometrical Optics,” in *Military Standardization Handbook: Optical Design*, *MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962a).

[2] Hopkins, R. E. and Hanau, R.,“First Order Optics,” in *Military Standardization Handbook: Optical Design*, *MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962b).

第 3 章　透镜组和厚透镜

3.1　焦距和光焦度

依据拉格朗日定理的式（1-64）和某一距离物体的横向放大率的定义，一个位于空气中厚的共轴光学系统的横向放大率可以表示为

$$m = \frac{u_1}{u'_k} = \frac{y_1}{l_1 u'_k} \tag{3-1}$$

这里假设物方和像方介质是一样的（一般是空气）。

厚透镜或透镜系统的有效焦距定义为

$$F' = -\frac{y_1}{u'_k} \tag{3-2}$$

因此，有一定物距的横向放大率只依赖于有效焦距 F，与某一特定透镜的结构无关。通过此定义，我们可以从图 3-1 看到有效焦距是从焦平面到一个被称为主平面的假想平面的距离。

一般情况下，在任何共轴光学系统中有两个主平面对应系统的两个方向。在图 3-1 中，图形化定义了主平面 P_1、P_2 和有效焦距 F、F'。有趣的是，一个系统可能是会聚的并具有负的有效焦距，也可能是发散的并有正的有效焦距。当入射的近轴光线在到达焦点之前穿过光轴奇数次时会发生这种情况。

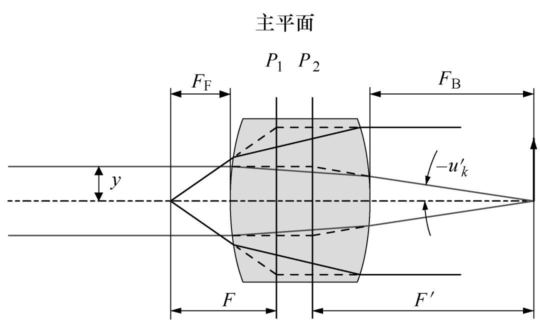


图 3-1　主平面与有效焦距的图示说明

给定一个共轴光学系统，有效焦距可以通过高斯方程［式（1-45）］计算得到。结合有 k 个表面的系统的表达式，我们发现

$$-n'_k u'_k + n_1 u_1 = \sum_{i=1}^{k} y\left(\frac{n' - n}{r}\right) \tag{3-3}$$

然后，用有效焦距的定义，令 $u_1 = 0$，得

$$P = \frac{1}{F'} = \sum_{i=1}^{k} \frac{y}{y_1}\left(\frac{n' - n}{n'_k r}\right) \tag{3-4}$$

对于一个薄透镜系统的特殊情况，表达式变成

$$P = \frac{1}{F} = \sum_{i=1}^{k} \frac{y}{y_1}\left(\frac{1}{f}\right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{y}{y_1} P_i \qquad (3\text{-}5)$$

式中，P_i 是透镜 i 的光焦度。我们可以看到，在一个系统中，一个表面或薄透镜的总光焦度的贡献是直接正比于该表面或透镜的边缘光线的高度 y。

由式（2-13），我们可以写出每个透镜的光焦度

$$P_i = \frac{1}{f_i} = \frac{1}{y}(u'_i - u_i) = \frac{1}{\bar{y}}(\bar{u}'_i - \bar{u}_i) \qquad (3\text{-}6)$$

在图 3-1 上定义了后工作距 F_B 和前焦点距 F_F。在大多数系统中，一个正的有效焦距意味着该系统是会聚的。在这些系统中，子午光线的光线高度 y_1 是正的且后会聚角度 u'_k 是负的，使得有效焦距为正的并且在物方无穷远的放大倍数为负。如果子午光线在最终的焦点之前会聚到光轴上，最终的会聚角度 u'_k 是正的，如图 3-2 所示。这个系统是会聚的，但有效焦距为负的并且在物方无穷远的放大倍数为正。

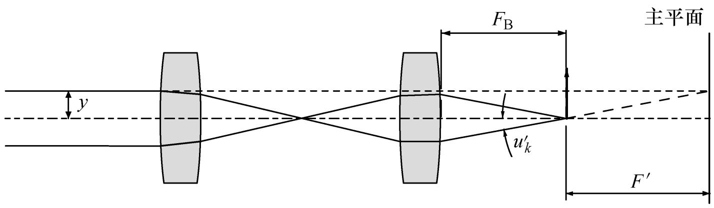


图 3-2　有效焦距的符号图示说明

3.2　厚透镜或透镜系统的成像

仅仅基于有效焦距的定义和拉格朗日理论，就可以得出厚透镜的光学系统中几个重要关系。要做到这一点让我们考虑图 3-3。在第一近似条件下，对于近轴光线有

$$\frac{u}{u'} = \frac{L'}{L} \qquad (3\text{-}7)$$

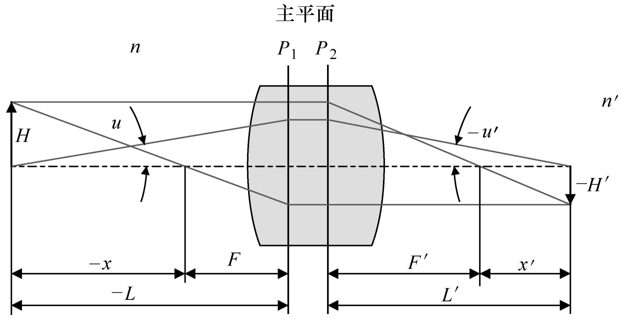


图 3-3　厚透镜光学系统的成像

在拉格朗日理论的帮助下，我们得到横向放大率为

$$m=\frac{H'}{H}=\frac{nL'}{n'L} \tag{3-8}$$

这个表达式类似于薄透镜的方程式（2-15）。从图3-3可得

$$\frac{-H'}{H}=\frac{L'-F'}{F'} \tag{3-9}$$

$$\frac{-H'}{H}=\frac{F}{-L-F} \tag{3-10}$$

我们现在定义距离 $X=L+F$ 和 $X'=L'-F'$，其中如果像在焦点 F' 的右边 X' 是正的，如果物在焦点 F 的右边 X 是正的。这样，我们又得到如式（2-12）所示的薄透镜的牛顿公式

$$XX'=-FF' \tag{3-11}$$

但通过式（3-9）和式（3-10）也可得

$$1=\frac{F'}{L'}-\frac{F}{L} \tag{3-12}$$

展开后，有

$$L'-F'=-\frac{FL'}{L} \tag{3-13}$$

并代入式（3-8）和式（3-9）得

$$\frac{n'}{F'}=\frac{n}{F} \tag{3-14}$$

等效的薄透镜表达式为式（2-7）。对于最常见的情况下，当物方和像方折射介质相同时，两个焦距具有相同的值。三种可能的例外情况是：①一种水下摄像机，其中物在水中而像在空气中；②浸没式显微镜，其中物在油中而像在空气中；③人眼，其中物在空气中而像在眼睛中的液体里。

通过式（3-12）和式（3-14）得

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{L'}-\frac{n}{n'L};\quad \frac{1}{F'}=\frac{n'}{nL'}-\frac{1}{L} \tag{3-15}$$

对于大多数情况，物方和像方介质是一样的，有

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{L'}-\frac{1}{L} \tag{3-16}$$

其薄透镜类似于式（3-14）。

3.3　基点

光学系统的节点是光轴上的两点，其特性是凡是通过物方节点 N_1 的光线，经过光学系统折射后，其出射光线必定通过像方节点 N_2，并且和入射光线相平行。让我们考虑图3-4中在焦平面 F 处的点光源 S。如果由 S 发出的光线为 R_1 和 R_2，那么折射后从该

光学系统射出的光线 R_3 和 R_4 彼此平行。选择光线 R_2 经过节点 N_1，因此通过节点的定义，光线 R_4 将经过节点 N_2 且平行于 R_2。由于光线 R_3 和 R_4 彼此平行，光线 R_3 也将平行于 R_2。三角形 SAN_1 和三角形 F_2P_2B 是全等的，因此距离 F_1N_1 和 F_2P_2 都是相等的。因此有

$$\overline{F_1N_1} = F' \tag{3-17}$$

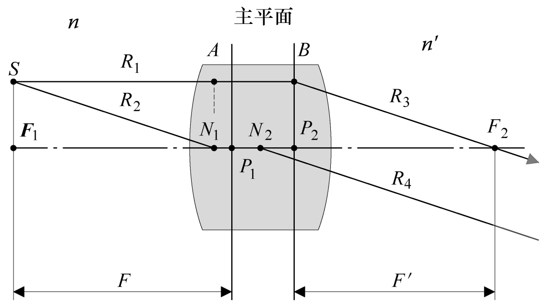


图 3-4　厚透镜光学系统的基点

然后，从节点 N_1 到主点 P_1 的距离，如图 3-4 所示，为

$$\overline{N_1P_1} = F - \overline{F_1N_1} = F - F' \tag{3-18}$$

使用式（3-14）得

$$\overline{N_1P_1} = \left(1 - \frac{n'}{n}\right)F \tag{3-19}$$

对称地，节点 N_2 到主平面 P_2 的距离为

$$\overline{N_2P_2} = \left(1 - \frac{n}{n'}\right)F' \tag{3-20}$$

对于这些关系的类似的薄透镜表达式为式（2-17）。如果物方和像方折射介质相同，两个节点和两个主点是重合的。在这种情况下，焦距可以通过绕垂直轴旋转透镜反复试验直到发现节点（Kingslake，1932）来测量，如图 3-5 所示。节点以及主点总称为基点。

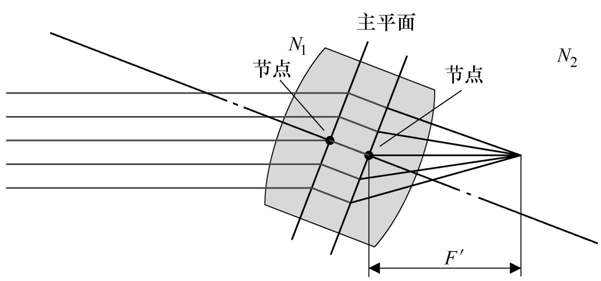


图 3-5　厚透镜光学系统的有效焦距测量

节点的定义中一个有趣的结果是它们是彼此共轭成像的，且横向放大率为 1 倍。因此，如果入射光瞳位于第一个节点，那么出射光瞳将位于第二个节点的位置，并且与入射光瞳大小相等。

与节点类似，光学系统也可能在某些情况下（不总是）有一个点，直接朝该点入射光线，经系统后出射光线好像由该点直接出射，如图 3-6a 所示（Malacara，1992），但是入射光线和出射光线的方向不一定相同。若会聚光束聚焦在这一点上，如图 3-6b

所示，经过光学系统后的发散光线从这一点发出，但不一定具有和入射光束相同的发散角。

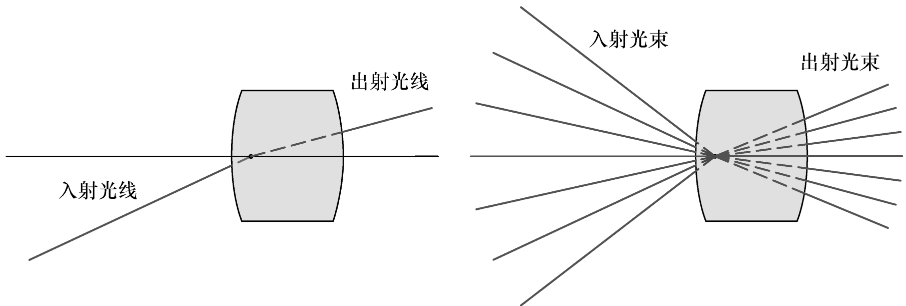


图 3-6　入射光线与折射光线相交于光轴上的同一点
a）入射光线　b）入射会聚光束

这些点的位置可以用式（3-16）得到（如果物方和像方有相同的折射率），通过强制性条件

$$L' + T = L \tag{3-21}$$

式中，T 是主平面之间的间距。所以这一点既是物方又是像方，它们在同一位置。因此，我们可以看到，这两个点与所述第一主点的距离由式（3-22）给出

$$L = \frac{T \pm [T(T + 4F)]^{\frac{1}{2}}}{2} \tag{3-22}$$

由于平方根的自变量必须是正数，我们看到这些点存在的条件为

$$\frac{4F}{T} \geqslant -1 \tag{3-23}$$

如图 3-7 所示的阴影区域。

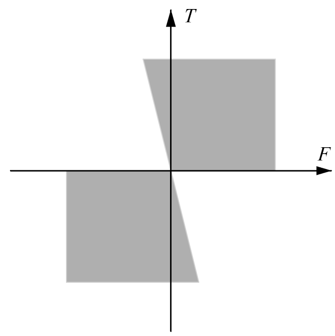


图 3-7　在图 3-5 中点存在的区域

3.4　倾斜或弯曲物体的成像

让我们考虑一个相对于光轴倾斜的小平面物体，放在一个会聚透镜系统前面的情况，如图 3-8 所示。要找出像平面的倾斜，让我们用式（1-77）和式（1-79）来写出

$$m^2 = \frac{z'}{z} \tag{3-24}$$

从图 3-8 中，我们可以很容易地看到

$$\frac{z}{h} = -\frac{L}{A} \tag{3-25}$$

且

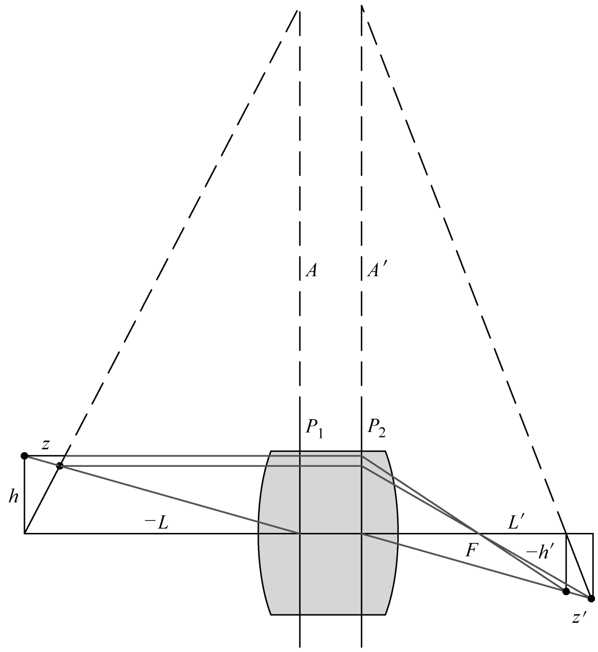


图 3-8　倾斜物体的成像

$$-\frac{z'}{h'}=-\frac{L'}{A'} \tag{3-26}$$

式中，距离 A 和 A'是通过第一主点到倾斜面本身和主平面交叉点的距离以及第一主点到倾斜面的像和主平面交叉点的距离来测得的。通过式(3-24)~式(3-26)和式（3-8）我们可以发现，$A'=A$。当成像系统是薄透镜时，物、像和透镜平面相交于同一直线上。Theodor Scheimpflug 于 20 世纪初在奥地利首次对这种情况进行描述，由于这个原因，它被称为 Scheimpflug 条件。

应当指出，当物平面和像平面不相互平行时就会产生一种叫作梯形畸变的图像变形。这样，矩形物体就会成像为一个梯形。一些现代数字投影仪屏幕不得不位于比投影仪更高的位置。产生的梯形畸变可以通过往下移动物体（照片或者液晶显示器）到离轴的位置但保持屏幕和载物片彼此平行来补偿。

让我们考虑当物不是平面的而是弯曲的情况，如图 3-9 所示。对于弯曲的物和像的弦长 z 和 z'，式（3-24）仍然适用。如果该物和像的曲率半径分别为 ρ 和 ρ'，我们可以很容易得到

$$m=-\frac{\rho}{\rho'} \tag{3-27}$$

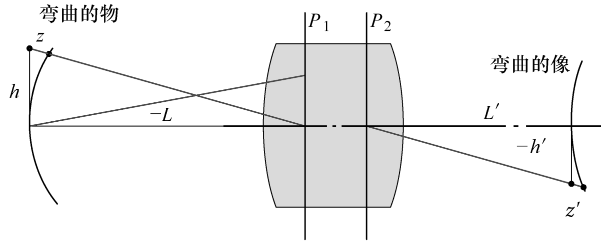


图3-9　弯曲物体的成像

3.5　厚透镜

厚透镜在文献中（Herzberger，1944，1952）已被广泛研究。让我们考虑一个厚透镜，如图3-10所示，它的厚度是t，曲率半径是r_1和r_2。为了研究这个透镜，让我们先找到使用式（3-3）计算子午光线高度的比值。如果设置$u_1=0$，我们发现经过第一表面后的折射角为

$$u'_1=-y_1\left(\frac{n'_1-n_1}{n'_1r_1}\right) \tag{3-28}$$

另一方面，该角度表达式可写为

$$u'_1=\frac{y_1-y_2}{t} \tag{3-29}$$

因此，光线高度的比值为

$$\frac{y_2}{y_1}=1-\left(\frac{n'_1-n_1}{n'_1r_1}\right)t \tag{3-30}$$

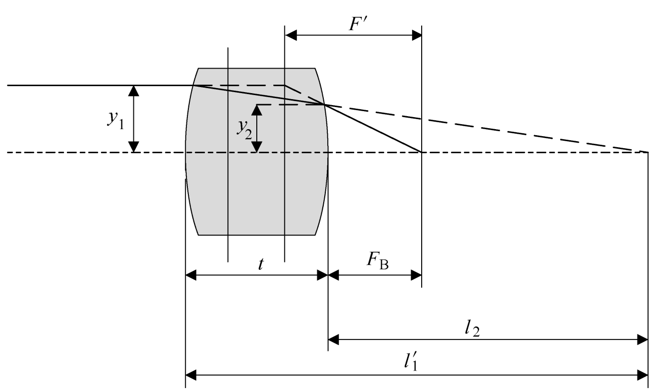


图3-10　在厚透镜中光的折射

有效焦距可以通过式（3-4）计算，即

$$P=\frac{1}{F}=\left(\frac{n'_1-n_1}{n'_2r_1}\right)+\frac{y_2}{y_1}\left(\frac{n'_2-n_2}{n'_2r_2}\right) \tag{3-31}$$

但是，如果我们在这里代入式（3-30）并使用关系式 $n'_1=n_2=n$，有

$$P=\frac{1}{F}=\left(\frac{n-n_1}{n'_2r_1}\right)-\left(\frac{n-n'_2}{n'_2r_2}\right)+\frac{(n-n'_2)(n-n_1)}{n'_2nr_1r_2}t \tag{3-32}$$

式（3-32）是一个通式，对任何物、像介质都正确。如果这个介质是空气，那么 $F=F'$，式（3-32）简化为

$$\begin{aligned}P&=\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)+\frac{(n-1)^2t}{nr_1r_2}\\&=(n-1)\kappa+\frac{(n-1)^2}{n}c_1c_2t\end{aligned} \tag{3-33}$$

式中，$\kappa=c_1-c_2$。用第 2 章定义的表面光焦度 P_1 和 P_2，我们可以写出

$$P=P_1+P_2-P_1P_2\frac{t}{n} \tag{3-34}$$

一个有趣的特定情况是同心透镜，它的 $r_1=r_2+t$。有效焦距变为

$$P=\frac{1}{F'}=-\frac{(n-1)^2t}{nr_1(r_1-t)} \tag{3-35}$$

这个透镜有一些有趣的性质，由 Rosin（1959）所描述，这使得它在许多仪器中非常有用。

但是，回到一般情况下，由图 3-10 可知，如果我们在空气中观察透镜的特殊情况，则一个厚透镜后工作距 F_B 可以计算得到。

$$F_B=\frac{y_2}{y_1}F'=\left(1-\frac{(n-1)t}{nr_1}\right)F' \tag{3-36}$$

或者，我们可以写成

$$\frac{1}{F_B}=(n-1)\left(\frac{1}{r_1-t(n-1)/n}-\frac{1}{r_2}\right) \tag{3-37}$$

现在很容易从式（3-32）得到从第二表面到第二主平面的距离为

$$F_B-F'=\frac{(n-1)t}{nr_1}F=-P_1F\frac{t}{n} \tag{3-38}$$

如果第二主平面在最后一面的右边，它是正的。我们看到主平面的位置取决于第一曲率半径 r_1 的大小和符号。

同理，前焦点距通过替换 r_1 为 $-r_2$ 和 r_2 为 $-r_1$ 得到，从而有

$$\frac{1}{F_F}=(n-1)\left(\frac{1}{-r_2-t(n-1)/n}+\frac{1}{r_1}\right) \tag{3-39}$$

因此，第一主平面和第一表面的距离为

$$F-F_F=-\frac{(n-1)t}{nr_2}F=P_2F\frac{t}{n} \tag{3-40}$$

如果主平面在第一表面的右边这个距离是正的。我们可以很容易地证明，在任何厚透镜主平面之间的间距

$$T=\left(1-\frac{F(P_1-P_2)}{n}\right)t \sim (n-1)\frac{t}{n} \quad (3\text{-}41)$$

于是，我们看到对于任何弯曲透镜，如果透镜不是太厚或者不具有很强的弯月面形，其主平面之间的间距几乎是常数，大约是透镜厚度的1/3。一些透镜的主平面的位置如图3-11所示。

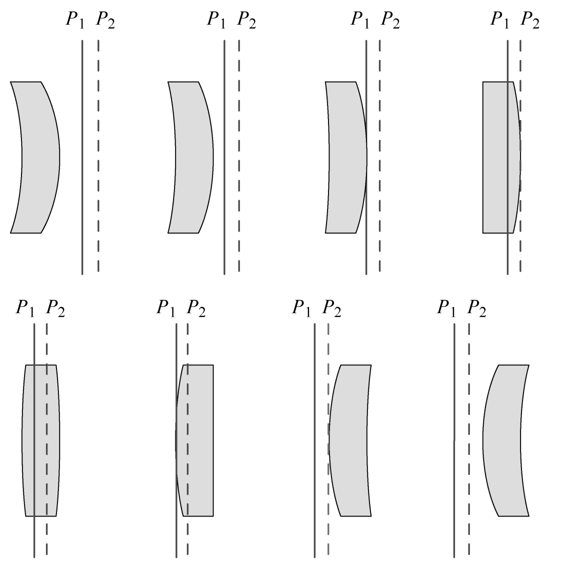


图3-11　一些弯曲面形厚透镜中的主面位置

3.6　薄透镜系统

仅使用薄透镜就可设计出许多光学设备（Hopkins和Hanau，1962）。让我们考虑最简单的情况下，有限距离的两块薄透镜系统。如图3-12所示，间隔距离为d、焦距为f_1和f_2的两块薄透镜系统，其有效焦距可以通过式（3-5）得到，即

$$P=\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{y_2}{y_1}\left(\frac{1}{f_2}\right) \quad (3\text{-}42)$$

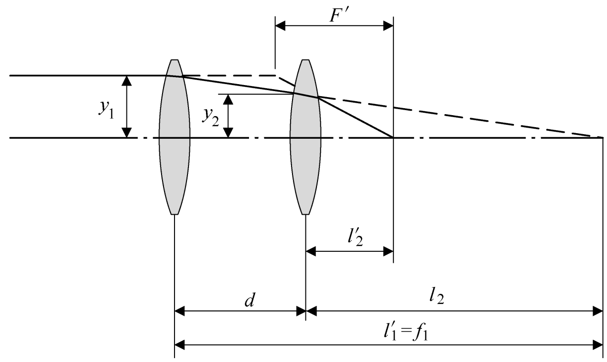


图3-12　两个分离的薄透镜组成的系统

但是从图 3-12 中，我们可以看出光线高度的比值

$$\frac{y_2}{y_1} = 1 - \frac{d}{f_1} \tag{3-43}$$

因此，得到有效焦距

$$P = \frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \tag{3-44}$$

或者是透镜的光焦度

$$P = P_1 + P_2 - P_1 P_2 d \tag{3-45}$$

另一种一般的表达式为

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2 - d} \tag{3-46}$$

如果两个薄透镜相互贴着，表达式简化为

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = P = P_1 + P_2 \tag{3-47}$$

这两块薄透镜系统的后焦距

$$F_B = \frac{y_2}{y_1} F = \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) F \tag{3-48}$$

或者

$$F_B = \frac{1}{f_1 - d} + \frac{1}{f_2} \tag{3-49}$$

我们现在计算从第二块透镜到主平面的距离。

$$F_B - F = -\frac{d}{f_1} F = -P_1 f d \tag{3-50}$$

如果第二主平面在第二块透镜的右边，这个距离是正的。主平面的位置由焦距 f_1 的大小和符号来决定。同样地，前焦点距可以写为

$$F_F - F = -\frac{d}{f_2} F = -P_2 f d \tag{3-51}$$

两个主平面之间的间距 T 可以由式（3-52）给出，即

$$T = -[1 - F(P_1 + P_2)]d \tag{3-52}$$

图 3-13 所示为一系列具有相同有效焦距 F 和各自不同的光焦度 P_1、P_2 的两块薄透镜系统。由于有效焦距是固定的，对所有例子来说第二主平面是一样的，只是第一主平面的位置不同。

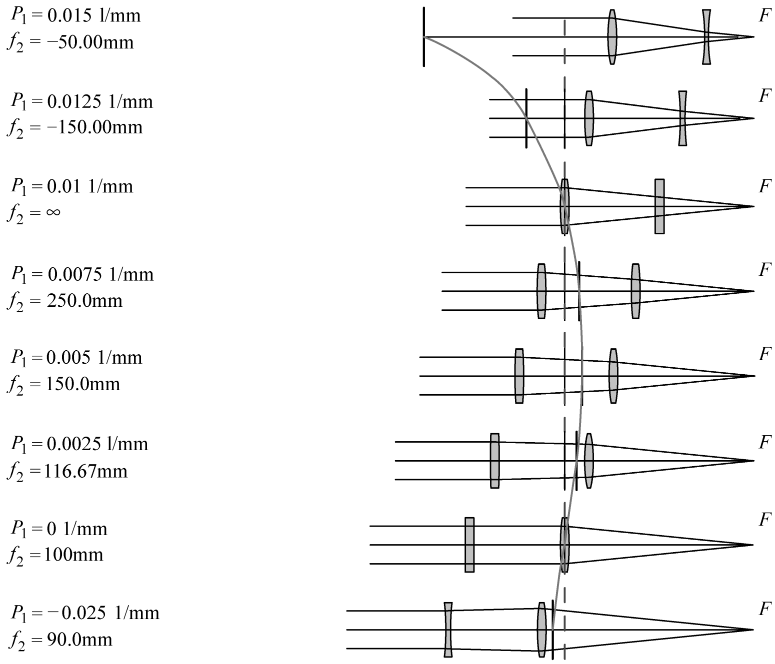


图 3-13　两个分离的薄透镜系统的主平面位置（有彩色插图）

3.7　薄透镜系统中的拉格朗日 - 亥姆霍兹不变式

从式（1-72）可以看出，在光学系统中两个表面之间间距的拉格朗日不变量为

$$\Lambda = n'\frac{y\bar{y}_{+1} - y_{+1}\bar{y}}{t} \tag{3-53}$$

于是，可以轻易得到空气中一个薄透镜系统的拉格朗日不变量为

$$\Lambda = \frac{y\bar{y}_{+1} - y_{+1}\bar{y}}{d} \tag{3-54}$$

式中，d 是两薄透镜之间的间距。这个式子将系统中一个透镜的子午光线和主光线的高度与另一个透镜的相应光线的高度联系起来。

考虑到光焦度 P 和子午光线与主光线的斜率，薄透镜系统的拉格朗日不变量可以采用另一种形式。为了找到这种形式，我们把式（3-6）写成

$$u'\bar{u}' = u'(\bar{u} + P\bar{y}) = (u + Py)\bar{u}' \tag{3-55}$$

并且求解光焦度 P 和经过一些代数变换后，我们得到拉格朗日不变量的表达式为

$$\Lambda = \frac{u\bar{u}' - u'\bar{u}}{P} = \frac{u\bar{u}_{+1} - u_{+1}\bar{u}}{P} \tag{3-56}$$

3.8　物或者光阑的平移效应

在本节中，我们将研究移动物或者光阑的效果。子午边缘光线和主光线之间的一些有趣的联系将在接下来的章节中用到很多次。

3.8.1　光阑的移动

现在让我们用拉格朗日定理推导出一个描述光阑移动到一个新位置的有用关系式，如图 3-14 所示，沿着光轴，使用傍轴近似。因为物和像保持不动，所以光阑移动不会改变子午光线。我们假设当改变光阑位置时其直径变化（如有必要），那么角度 u 保持不变。物和像的大小也保持不变。由此可见，乘积 hu 不会改变。因此，如果物和介质折射率是相同的，随着光阑的移动拉格朗日不变量保持恒定。这样，拉格朗日不变量可以写作

$$\Lambda = n(y\bar{u} - \bar{y}u) = n(y\bar{u}^* - \bar{y}^* u) \tag{3-57}$$

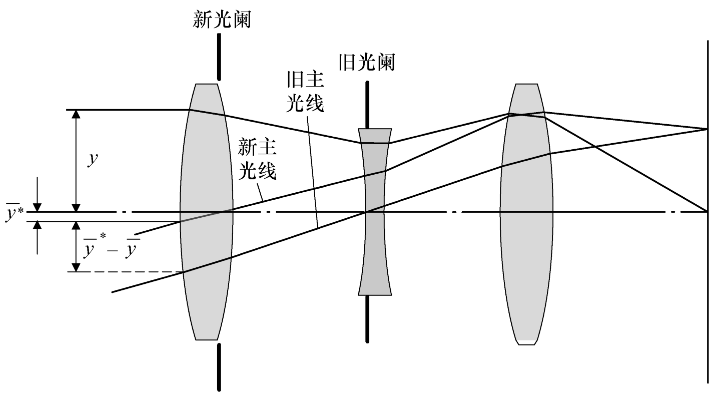


图 3-14　在第一表面的光线高度表示的厚透镜光学系统的光阑移动

式中，符号 * 表示移动光阑引起的系统变量。从式（3-57）中可知

$$\frac{(\bar{y}^* - \bar{y})}{y} = \frac{(\bar{u}^* - \bar{u})}{u} \tag{3-58}$$

由于 y 和 $\bar{y}$ 在折射中不变，经过光学表面折射后式（3-58）的左边是不变的。同样地，由于 u 和 $\bar{u}$ 在转换传递过程中没有改变，经过一个表面转换传递到另一表面后式（3-58）右边也是不变的。因此，由于两边相等，我们得出结论，对于所有系统表面两边都是不变的，并且等于一个常数，即

$$\bar{Q} = \frac{\bar{y}^* - \bar{y}}{y} \tag{3-59}$$

主光线在物空间的方向一定指向入瞳，所以主光线经过光阑的中心。即使光阑不在第一表面，为了找到这个方向，我们可以使用式（3-59）。主光线的追迹可以通过为主光线的理想高度（$\bar{y}_s = 0$）选择一个新值，首先追迹在第一表面（$\bar{y}_1^* = 0$）处的光阑的

假设主光线，并计算光阑处$\bar{y}_s^*$的值。这样，在光阑处可以得到$\bar{Q}$的值。最终的主光线的追迹是从第一个点物到第一个面上坐标为（0，$\bar{y}_1$）的点的追迹，由式（3-60）给出。

$$\bar{y}_1 = -\bar{Q}y_1 \tag{3-60}$$

3.8.2　物和像平面的移动

再次利用拉格朗日定理，我们也可以导出一个关系式来描述物位置移动和相应像位置移动的关系。让我们假设物沿着光轴放置，但是通过使主光线保持不动改变其大小，如图3-15所示。新的像的大小为h'^*。因为物体到入瞳的距离改变了，所以角度u也随之变化。我们可能会看到

$$hu = h^* u^* \tag{3-61}$$

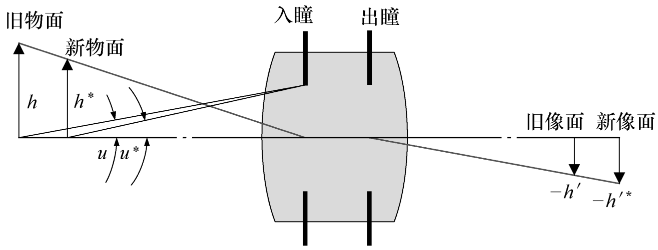


图3-15　在厚透镜光学系统中的物和像平面移动

因此，如果物和像介质是相同的，随着物和像的位移变化，拉格朗日不变量保持恒定，即

$$\Lambda = n(y\bar{u} - \bar{y}u) = n(y^*\bar{u} - \bar{y}u^*) \tag{3-62}$$

但是从式（3-62）中我们得出

$$\frac{(y^* - y)}{\bar{y}} = \frac{(u^* - u)}{\bar{u}} \tag{3-63}$$

如3.8.1节所述，我们可以发现式（3-63）左边经过光学表面折射后是不变的，并且右边从一个表面到另一个表面的传递也是不变的。因此，我们再次得出结论，两边对于所有系统表面都是不变的，且等于一个常数Q，即

$$Q = \frac{y^* - y}{\bar{y}} \tag{3-64}$$

请注意这里的Q和1.3.2节和1.7节中所用的不同。然而，因为它们将永远不会被一起使用，所以不存在混淆的可能性。式（3-64）表明物和像移动后，近轴像高y在每一个表面上的变化与主光线高度$\bar{y}$成递增正比的关系。通过相互交换主光线和子午光线，可以得到这个表达式。

在物和像平面，y的值为0。因此，在这些平面中，当物和像移动后，$y/\bar{y}$的比值一定等于Q。换句话说，如果两个平面彼此共轭，在任意两个共轭平面$y/\bar{y}$的比值是相等的。

3.9　德拉诺 $y-\bar{y}$图

德拉诺（Delano）于 1963 年提出了 $y-\bar{y}$图，用来生动地分析近轴近似光学系统。在 $y-\bar{y}$图中，表示了在许多垂直于光轴的不同平面上子午光线高度 y 和主光线高度$\bar{y}$的值。在 $y-\bar{y}$图中没有直线穿过原点，这是因为在光阑或光瞳处子午光线的高度不可能为 0。换句话说，像不能位于光瞳处。$y-\bar{y}$图中的每个点对应光学系统中垂直于光轴的平面。对应物空间定义的直线称为物光线。类似地，对应像空间定义的直线称为像光线。

如图 3-16 所示，物空间坐标为（$\bar{y}$，y）的 A 点处的任何平面在物光线上，而其在像空间坐标为（$\bar{y}'$，y'）的 B 点处的共轭平面在像光线上。正如在 3.8 节中所述，$y/\bar{y}=y'/\bar{y}'$。这条通过这两点的线被称为共轭直线。在系统中任何两个共轭点可以通过穿过原点的共轭直线连接。因此，这条线的斜率 k 为

$$k=\frac{y}{\bar{y}}=\frac{y'}{\bar{y}'} \tag{3-65}$$

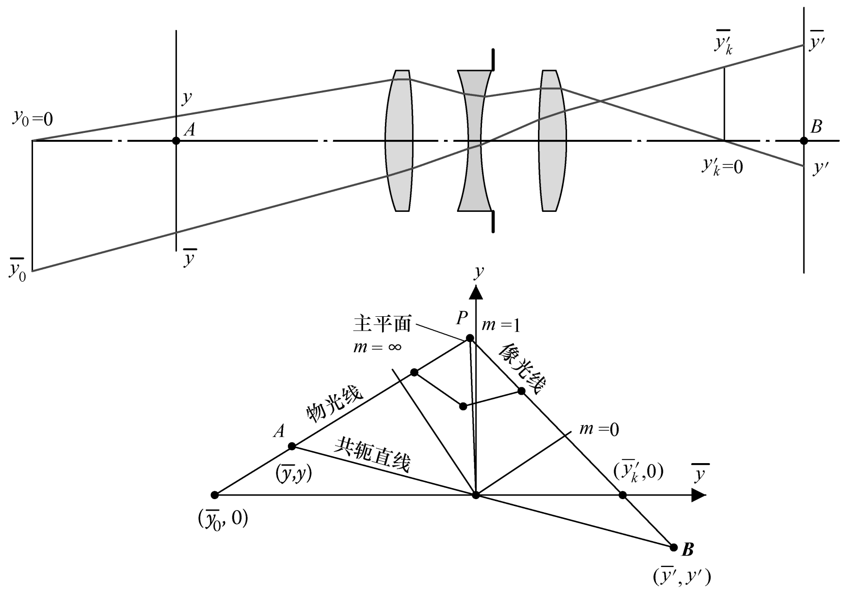


图 3-16　用物和像光线以及一些结构线表示的 $y-\bar{y}$图像

两个共轭平面处放大率表示为

$$m=\frac{y'}{y}=\frac{\bar{y}'}{\bar{y}} \tag{3-66}$$

Shack（1973）指出共轭线的斜率和放大率之间的关系为

$$k=\frac{nu-mn'u'}{n\bar{u}-mn'\bar{u}'} \tag{3-67}$$

人们还对以下一些特殊的共轭线进行了研究：

1）共轭线中有一条是$\bar{y}$轴，连接物平面和像平面。共轭平面的放大率是光学系统中物像的放大率。

2）另外一条共轭线是y轴，连接入瞳和出瞳。放大率是光瞳的放大率。

3）从原点到点P的共轭线，连接两个主平面，其放大率为1。

4）后焦面共轭于系统前无穷远距离的平面，其放大率为0。已经证明连接它们之间的共轭线的斜率等于物光线的斜率。后焦面位于共轭线和像光线的交叉处。

5）前焦面共轭于系统后无穷远距离的平面，其放大率为无穷大。已经证明连接它们之间的共轭线的斜率等于像光线的斜率。前焦面位于共轭线和物光线的交叉处。

我们可以很容易地从图3-17中，经过简单的几何运算，得出三角形FBC的面积

$$\text{Area}=\frac{y\bar{y}_{+1}-y_{+1}\bar{y}}{2} \tag{3-68}$$

因此，使用式（3-54）及式（3-68）可求得点B和点C表示的两个薄透镜之间的距离为

$$d=\frac{\text{Area}}{\Lambda}=\frac{y\bar{y}_{+1}-y_{+1}\bar{y}}{\Lambda} \tag{3-69}$$

图3-18所示为三种$y-\bar{y}$图。

$y-\bar{y}$图的主要特点如下：

1）多边形的顶点凹向原点，则具有正的光焦度，反之亦然。

2）在第一段和最后一段（物光线和像光线）之间的交叉处表示系统的两个主点，位于该图中的一个点，如图3-17所示。

3）在$y-\bar{y}$图中，由原点和表示两个串联透镜的两个点组成的三角形面积正比于这两个透镜的间距。

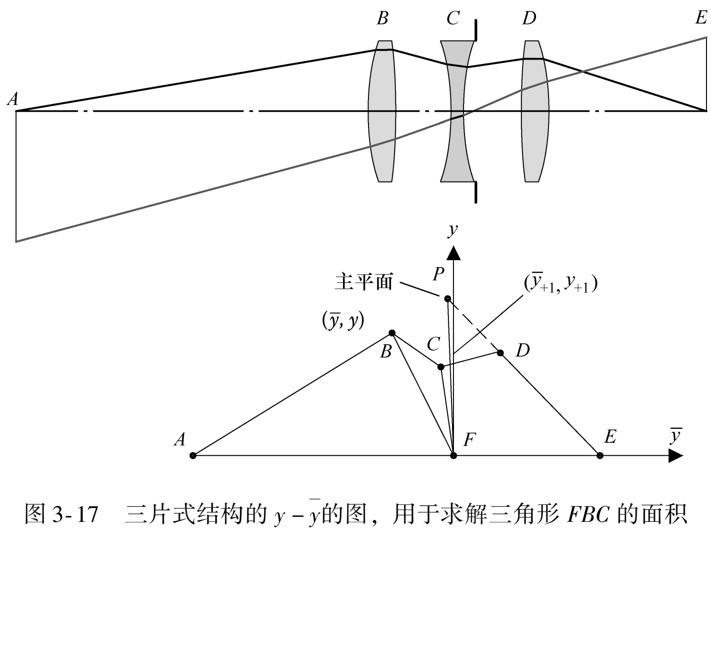


图3-17　三片式结构的$y-\bar{y}$的图，用于求解三角形FBC的面积

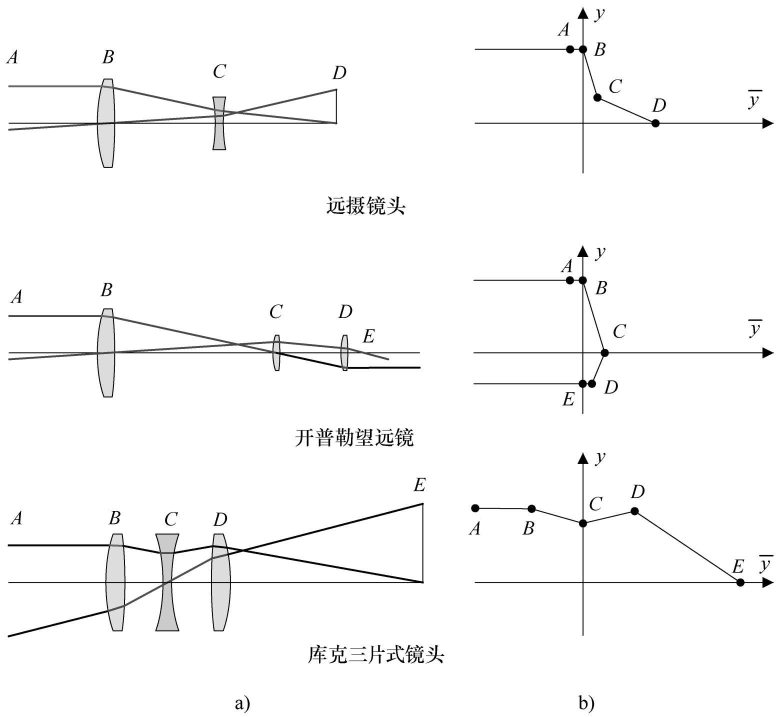


图 3-18　三种 $y-\bar{y}$图

a）光学系统（1∶1）　b）$y-\bar{y}$图（2∶1）

许多普遍适用于光学系统的一阶操作，运用 $y-\bar{y}$图可以以一种简单形式来完成。接下来，我们将介绍其中的两个。

3.9.1　光阑的移动

光阑的移动遵循式（3-59）。因此，光阑的移动是从 $y-\bar{y}$图上的顶点沿着平行于$\bar{y}$轴的线移动，同时位移正比于子午光线高度 y。此时顶点移动距离的大小，如图 3-19 所示，必须是 θ 角，对所有点都是相同的。

3.9.2　物和像的移动

物和像位置的移动遵循式（3-60）。因此，这个操作是从 $y-\bar{y}$图中顶点沿着平行于 y 轴的线移动，同时位移正比于主光线高度$\bar{y}$。如图 3-20 所示，θ 对所有点都是相同的。

许多其他适用于光学系统的一阶特性可以由 $y-\bar{y}$图推导出。光学系统的一阶设计可以简单地用 $y-\bar{y}$图表示出来，如 Shack（1973）给出的许多例子。甚至复杂系统，如变焦透镜也可以用 $y-\bar{y}$图设计成一阶系统（Besanmatter，1980）。

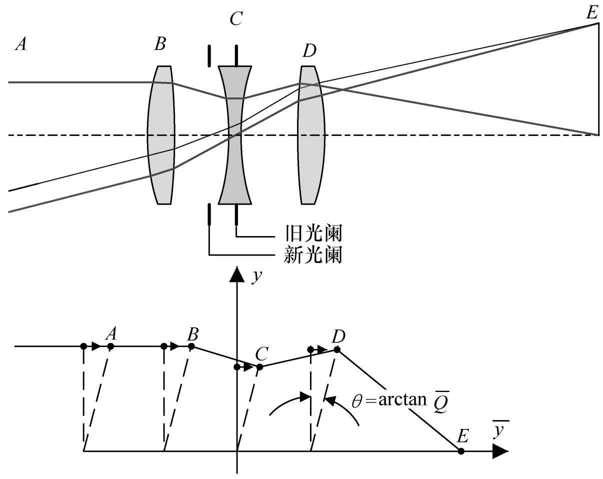


图3-19 在 $y-\bar{y}$ 图中的光阑移动

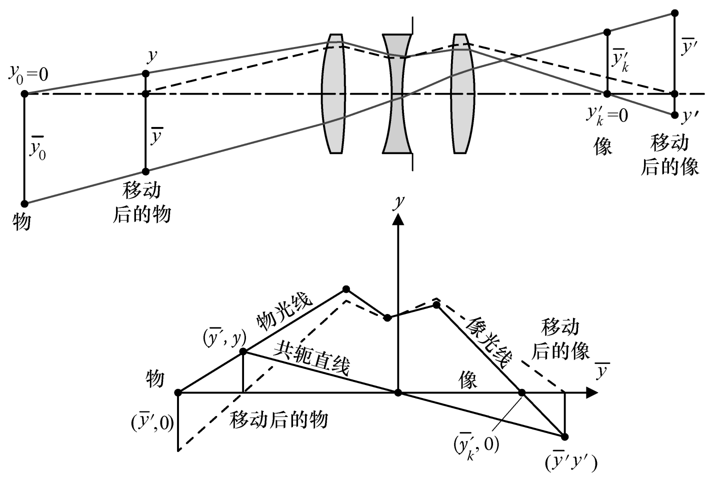


图3-20 在 $y-\bar{y}$ 图中的物和像移动

参考文献

[1] Besanmatter, W.,“Designing Zoom Lenses Aided by the Delano Diagram,” *Proc. SPIE*, **237**, 242 (1980).

[2] Delano, E.,“First－Order Design and the $y-\bar{y}$ Diagram,” *Appl. Opt.*, **2**, 1251－1256 (1963).

[3] Herzberger, M.,“Replacing a Thin Lens by a Thick Lens,” *J. Opt. Soc. Am.*, **34**, 114－115 (1944).

[4] Herzberger, M.,“Precalculation of Optical Systems,” *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, 637－640 (1952).

[5] Hopkins, R. E. and Hanau, R., "Simple Thin Lens Optical Systems," in *Military Standardization Handbook: Optical Design, MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962).

[6] Kingslake, R., "A New Bench for Testing Photographic Objectives," *J. Opt. Soc. Am.*, **22**, 207 – 222 (1932).

[7] Malacara, D., "A First Order Property of Some Thick Lenses and Systems," *Opt. Eng.*, **31**, 1546 – 1550 (1992).

[8] Rosin, S., "Concentric Lens," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 862 – 864 (1959).

[9] Shack, R. V., "Analytic System Design with Pencil and Ruler—The Advantages of the $y - \bar{y}$ Diagram," *Proc. SPIE*, **39**, 127 – 140 (1973).

第 4 章　色　　差

4.1　引言

光在透明介质中传播时其折射率随光的波长而变化（折射率是波长的函数）。一般来讲，在可见光波段内，折射率随频率的增大而增大。换句话说，紫光的折射率要大于红光。图 1-3 中显示的是两种典型玻璃（常用光学材料）的折射率随波长变化的曲线。

在光谱范围内，对于发生在物质吸收区域外（不包括吸收频率）的色散，可以用多种经验公式来描述，最简单的一种就是柯西色散公式，它是柯西在 1836 年通过实验总结出来的经验公式，其形式为

$$n = A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2} + \frac{A_2}{\lambda^4} \tag{4-1}$$

式中，A_0、A_1 和 A_2 是三个柯西色散系数。

在一些情况下，上述公式只能精确到小数点后第三、四位。1960 年 Conrady 提出了一个改进的经验公式：

$$n = A_0 + \frac{A_1}{\lambda^2} + \frac{A_2}{\lambda^{3.5}} \tag{4-2}$$

该公式能精确到小数点后第五位。当然，还有其他人也总结了一些精确度更高的经验公式，比如 Herzberger（1942，1959）。

在一系列扩展的理论插值公式中，肖特光学玻璃厂沿用了很多年的公式较为准确。但近年来，该厂采用了一个源于经典色散理论的名为塞尔迈耶尔方程的精确度更高的公式。使用该公式进行折射率插值时，波长在 365 ~ 1014nm 范围内，从红外光到紫外光，包括整个可见光波段，误差不超过 1×10^{-5}，其形式为

$$n^2 = 1 + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3} \tag{4-3}$$

式中，B_1、B_2、B_3、C_1、C_2、C_3是六个系数，在该厂的光学玻璃产品目录中，对每一种光学玻璃除了给出若干指定波长的折射率外，同时给出了它的六个系数的数值，这样就可以根据式（4-3）直接计算不同波段的光对应的折射率。

一直以来，许多学者在不少文献中都有关于色差的诸多描述，比如 Cruickshank（1946），Herzberger 和 Salzberg（1962），以及 Herzberger 和 Jenkins（1949）。这种色差主要针对近轴光，也就是说仅遵循一级近似（高斯光学）理论。

4.2 近轴色差（位置色差）

我们仅通过一级近似（高斯光学）理论来推导初级轴向色差公式。在图 4-1 中，设红光和蓝光的折射率分别为 n_C 和 n_F，那么这两种光的高斯公式可分别表示为

$$\frac{n'_C}{l'_C}-\frac{n_C}{l_C}=\frac{n'_C-n_C}{r} \tag{4-4}$$

$$\frac{n'_F}{l'_F}-\frac{n_F}{l_F}=\frac{n'_F-n_F}{r} \tag{4-5}$$

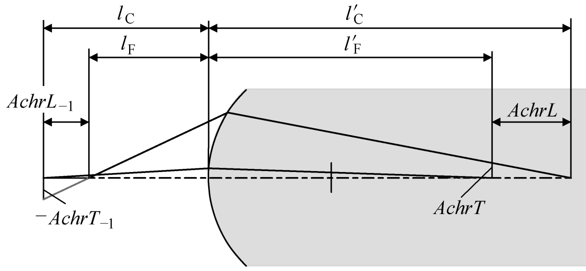


图 4-1 近轴色差示意图

两式相减，可得

$$\frac{n'_C}{l'_C}-\frac{n'_F}{l'_F}-\frac{n_C}{l_C}+\frac{n_F}{l_F}=\frac{(n'_C-n'_F)-(n_C-n_F)}{r} \tag{4-6}$$

令

$$\Delta n=n_F-n_C \tag{4-7}$$

$$\Delta n'=n'_F-n'_C \tag{4-8}$$

于是可得

$$\frac{n'_C(l'_F-l'_C)}{l'_Cl'_F}-\frac{n_C(l_F-l_C)}{l_Cl_F}=\Delta n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l_F}\right)-\Delta n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'_F}\right) \tag{4-9}$$

做如下近似，即令 $l_C\approx l_F\approx l$，$l'_C\approx l'_F\approx l'$，则上式可以近似为

$$\frac{n'_C(l'_F-l'_C)}{l'^2}-\frac{n_C(l_F-l_C)}{l^2}=\Delta n\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)-\Delta n'\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right) \tag{4-10}$$

通过第 1 章中的式（1-51），我们可知 $u=-y/l$，$u'=-y/l'$ 以及 $\frac{1}{r}-\frac{1}{l}=\frac{i}{y}$。在图 4-1 中，如果我们定义 $AchrL=l'_F-l'_C$，$AchrL_{-1}=l_F-l_C$，则可得

$$n'u'^2AchrL-nu^2AchrL_{-1}=yni\left(\frac{\Delta n}{n}-\frac{\Delta n'}{n'}\right) \tag{4-11}$$

式（4-11）就是单个折射面所产生的初级轴向色差公式。把上式用于 k 个折射面的光学系统的每一个面，并将各式累加，经过化简可得

$$AchrL_k = AchrL_0\left(\frac{n_1 u_1^2}{n'_k u'^{2}_k}\right) + \sum_{i=0}^{k} \frac{yni}{n'_k u'^{2}_k}\left(\frac{\Delta n}{n} - \frac{\Delta n'}{n'}\right) \tag{4-12}$$

或者

$$AchrL_k = AchrL_0\left(\frac{n_1 u_1^2}{n'_k u'^{2}_k}\right) + \sum_{i=0}^{k} AchrLC \tag{4-13}$$

式中，下标0表示物面，等式右边括号中的量是光学系统的轴向放大率，*AchrLC* 是每个面的初级轴向色差贡献量，且

$$AchrLC = \frac{yni}{n'_k u'^{2}_k}\left(\frac{\Delta n}{n} - \frac{\Delta n'}{n'}\right) \tag{4-14}$$

同理，初级垂轴色差可以表示为

$$AchrT_k = AchrT_0\left(\frac{n_1 u_1^2}{n'_k u'_k}\right) + \sum_{i=0}^{k} AchrTC \tag{4-15}$$

$$AchrTC = \frac{yni}{n'_k u'_k}\left(\frac{\Delta n}{n} - \frac{\Delta n'}{n'}\right) \tag{4-16}$$

4.2.1　薄透镜的近轴色差

单个薄透镜对近轴色差贡献的表达式可以通过前面章节中的式子得到，但直接通过式（3-8）可以更简单地推得。于是有

$$\frac{1}{l'_C} - \frac{1}{l_C} = (n_C - 1)\kappa \tag{4-17}$$

$$\frac{1}{l'_F} - \frac{1}{l_F} = (n_F - 1)\kappa \tag{4-18}$$

式中，κ 是透镜的总曲率半径（$\kappa = c_1 - c_2$）。两式相减可得

$$\frac{l'_F - l'_C}{l'_F l'_C} - \frac{l_F - l_C}{l_F l_C} = (n_C - n_F)\kappa \tag{4-19}$$

再将 *AchrL* 和 Δn 的定义带入其中，于是上式可以简化为

$$\frac{AchrL}{l'^2} = \frac{AchrL_0}{l^2} - \Delta n\kappa \tag{4-20}$$

式中，下标为0的像差是物空间的像差。将曲率 κ 和 $u = -y/l$，$u' = -y/l'$ 代入上式可得

$$AchrL = AchrL_0 \frac{u^2}{u'^2} - \frac{y^2}{u'^2 f}\frac{\Delta n}{(n-1)} \tag{4-21}$$

$V = (n-1)/\Delta n = (n_D - 1)/(n_F - n_C)$ 是薄透镜玻璃材料的阿贝数，其定义见附录3。于是，式（4-21）可写为

$$AchrL = AchrL_0 \frac{u^2}{u'^2} - \frac{y^2}{u'^2 fV} \tag{4-22}$$

我们现在所使用的为人所熟知的表达式，一般会在具有 k 片薄透镜的中心系统中加入相应的轴向倍率，化简可得

$$AchrL = AchrL_0 \frac{u_1^2}{u_k'^2} - \frac{1}{u_k'^2}\sum_{i=0}^{k} \frac{y_i^2 P_i}{V_i} \tag{4-23}$$

式中，P_i 是每块透镜的光焦度。同理，近轴垂轴色差可以表示为

$$AchrT = AchrT_0 \frac{u_1^2}{u'_k} - \frac{1}{u'_k}\sum_{i=0}^{k}\frac{y_i^2 P_i}{V_i} \tag{4-24}$$

4.2.2　消色差双胶合透镜

从式（4-24）可以看出，由两块薄透镜组成的消色差双胶合透镜组应满足以下条件：

$$f_1 V_1 = -f_2 V_2 \tag{4-25}$$

式中，透镜组的焦距 F 由式（3-44）给出。于是，消色差双胶合透镜组中两块透镜的焦距可以分别表示为

$$f_1 = F\left(1 - \frac{V_2}{V_1}\right) \tag{4-26}$$

$$f_2 = F\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right) \tag{4-27}$$

当双胶合透镜的总光焦度大于 0 时，则要消除色差，相互胶合的两个透镜必须用两种不同阿贝数的玻璃制造，且必须正透镜光焦度绝对值大于负透镜。有时人们会质疑牛顿曾经说的，消色差透镜是没办法制造出来的。但是原因是在那个时候，人们所熟知的玻璃阿贝数基本相同。

每个镜片的光焦度和阿贝数的差值成反比。为了使薄透镜的光焦度不致太大，两种玻璃的色散系数相差应尽可能大些。但是，这与校正二级光谱的条件相矛盾。因为要使光学系统同时校正色差和二级光谱，两块玻璃的部分色散率必须相同，关于这个问题在 4.4 节中会有更加详细的描述。

确定了透镜的焦距，我们就可以通过调节透镜的曲率来校正球差和彗差（将分别在第 5 章和第 6 章中讲述）。在第 6 章中我们会看到，求解一个零彗差透镜非常接近球差极大值点（绝对值最小）。

如果我们用两种不同玻璃来设计如图 4-2 所示的消色差透镜，选定的两个波长（通常是 C 光和 F 光），其焦距应该相同，但是对其他颜色的光却各不相同。图 4-3 是消色差双胶合透镜和单透镜的轴向色差与波长关系的示意图。

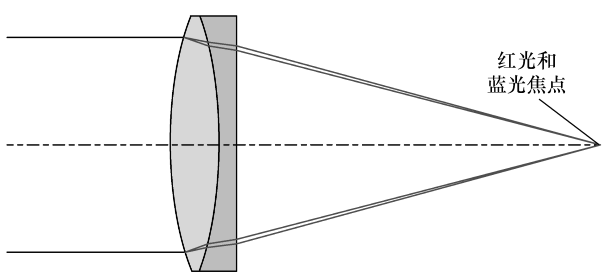


图 4-2　消色差双胶合透镜（有彩色插图）

另一种推导双胶合透镜消色差条件是依据双胶合透镜的焦距合成计算式（2-8），双胶合透镜的光焦度为

$$P=\frac{1}{F}=\frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}=(n_1-1)\kappa_1+(n_2-1)\kappa_2 \tag{4-28}$$

因此，双胶合透镜消色差，需要满足以下条件

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda}=\kappa_1\frac{\mathrm{d}n_1}{\mathrm{d}\lambda}+\kappa_2\frac{\mathrm{d}n_2}{\mathrm{d}\lambda}=0 \tag{4-29}$$

满足波长在C光和F光之间的波段附近，那么双胶合透镜就能消色差。我们可以看到，上式与式（4-25）是等价的。

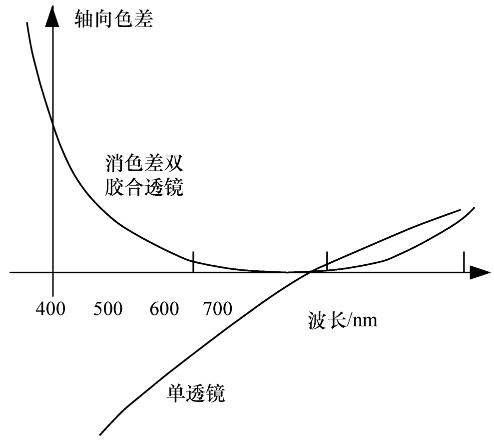


图4-3　消色差双胶合透镜和单透镜的轴向色差与波长关系（有彩色插图）

4.2.3　两块具有一定空气间隔的薄透镜组的消色差系统（消色差双分离透镜）

一个由两个分离的元件组成的消色差系统称为双分离透镜，如图4-4所示。由式（4-24）可得，一个由两块间隔距离 d 的薄透镜组成的消色差双胶合透镜满足

$$\frac{f_1V_1}{y_1}=-\frac{f_2V_2}{y_2} \tag{4-30}$$

定义 $k=d/f_1$，联立式（3-43）可得

$$\frac{y_2}{y_1}=1-\frac{d}{f_1}=1-k \tag{4-31}$$

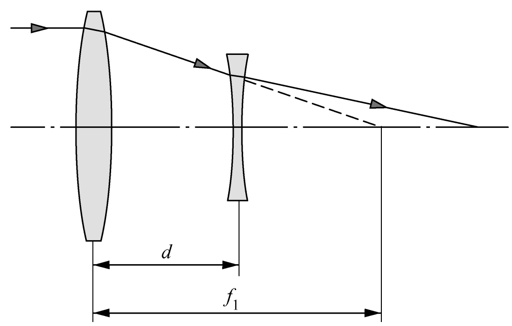


图4-4　具有一定空气间隔的双薄透镜系统

因为系统的有效焦距 F 由式（3-42）给出，我们可知两块透镜的焦距分别为

$$f_1=F\left[1-\frac{V_2}{V_1(1-k)}\right] \tag{4-32}$$

$$f_2=F(1-k)\left[1-\frac{V_1(1-k)}{V_2}\right] \tag{4-33}$$

我们可以看出，因为透镜分离使得 k 变大，所以光焦度的绝对值也随之变大，但是负透镜的光焦度增加更显著。当 $k=0.225$ 时，两块透镜的光焦度相等。

4.2.4　同种材料制造的两块透镜校正轴向色差

如果能制造出具有一定空气间隔的双薄透镜系统或者厚透镜，那么消色差透镜组的透镜就可以选用同种玻璃材料。首先我们来考虑具有一定空气间隔的双薄透镜系统的情况，如图4-5所示。

如果系统的后焦距对于所有波长都是不变的，那么系统的轴向色差就能得到很好的

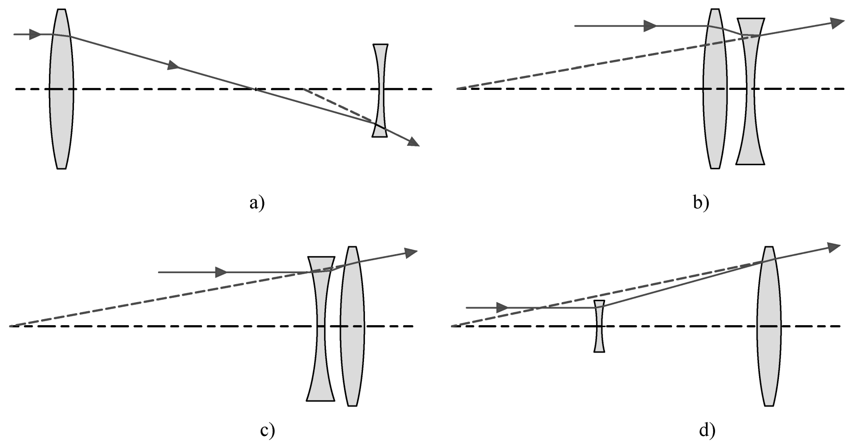


图 4-5　无近轴色差的具有一定空气间隔的双薄透镜系统

校正。将后焦距（后光焦度）对折射率求导，如果在波长变化不大的情况下，导数为零，那么我们说前面的情况是可以实现的。由式（2-8）和式（3-49）可得

$$P_{B}=\frac{1}{F_{B}}=\frac{1}{\dfrac{1}{(n-1)\kappa_{1}}-d}+(n-1)\kappa_{2} \tag{4-34}$$

对 P_B 求导可得

$$\frac{\mathrm{d}P_{B}}{\mathrm{d}n}=\frac{\kappa_{1}}{[1-(n-1)\kappa_{1}d]^{2}}+\kappa_{2}=0 \tag{4-35}$$

于是

$$f_{2}=-f_{1}\left(1-\frac{d}{f_{1}}\right)^{2}=-f_{1}(1-k)^{2} \tag{4-36}$$

式中，$k=d/f_1$。联立式（3-46）可得

$$f_{1}=\frac{k}{(k-1)}F \tag{4-37}$$

$$f_{2}=-k(k-1)F \tag{4-38}$$

Kingslake 在 1978 年指出，一个正焦距系统，其 k 值必须大于 1，这就使得系统变得很长。因为透镜之间的距离大于第一块透镜的焦距，所以焦点在二者中间，如图 4-5a 所示。我们将这种系统称为 Schupmann 透镜组。

在负焦距系统（发散）情况下，系统可以很长也可以很紧凑。如图 4-5b 和图 4-5c 所示，这两个系统结构都很紧凑，前者正透镜在前，后者负透镜在前。图 4-5d 是一个长的系统。

我们现在来考虑无近轴色差的厚透镜，它的设计步骤和具有一定空气间隔的双薄透镜系统是一样的。第一步也是对厚透镜的后光焦度求导，并令其等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{B}}}{\mathrm{d}n}=\frac{r_1-t(n-1)^2/n^2}{[r_1-t(n-1)/n]^2}-\frac{1}{r_2}=0 \tag{4-39}$$

同时，厚透镜的曲率半径须满足关系

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{[1-k(n-1)/n]^2}{1-k(n-1)^2/n^2} \tag{4-40}$$

式中，$k=t/r_1$。图4-6是r_2/r_1关于k的函数（k的取值范围为$-1\sim1$）。

因为k的值小于$n^2/(n-1)^2\sim9$，所以从图上可以看出，这一比率为正值，它是一个厚透镜。结合式（4-38）和式（3-33）可得消色差厚透镜的有效焦距为

$$F=-\frac{1-k(n-1)/n}{k(n-1)^2/n^2}r_1 \tag{4-41}$$

假设t总是正的，当k满足

$$k=\frac{t}{r_1}\geqslant\frac{n}{n-1}\sim3 \tag{4-42}$$

时，焦距为正值。这样，透镜的近轴色差得到了补偿，并且，当透镜很厚时，其焦距为正。透镜的焦点在透镜里面，折射光束进入透镜后发散。这种透镜有几种可行的结构，如图4-7所示。

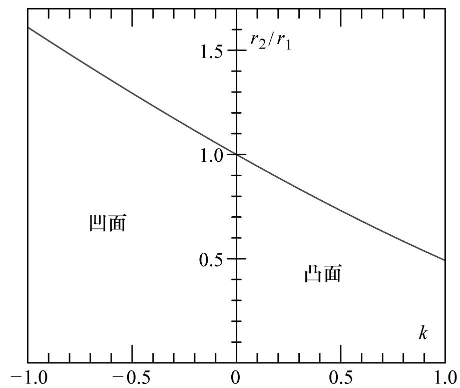


图4-6　在一个厚透镜中，对于不同的k值，校正色差的r_2/r_1的比率

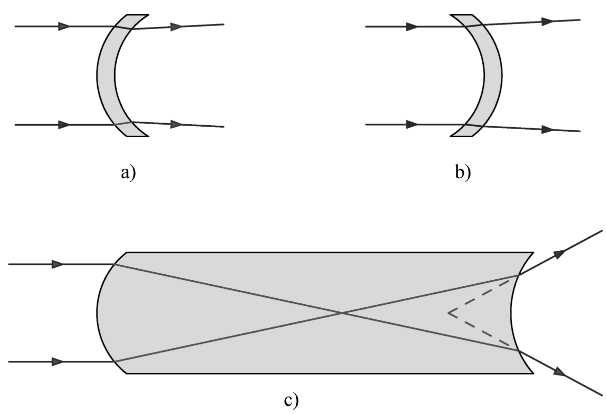


图4-7　厚透镜消近轴色差

a）$k=0.2$　b）$k=-0.2$　c）$k=5.0$

4.2.5　色球差

我们将在第5章中学到，一个轴上物点发出的光束经过光学系统成像不再相交于一点就是球差。球差的大小是折射率的函数，所以我们可以认为球差与波长变化有关。色球差的定义如下：

$$
\begin{aligned}
色球差 &= SphL_F - SphL_C = (L' - l')_F - (L' - l')_C \\
&= (L'_F - L'_C) - (l'_F - l'_C) \\
&= AchrL_{marginal} - AchrL_{paraxial}
\end{aligned} \tag{4-43}
$$

图 4-8 是三种波长的垂轴球差曲线。从图中可以看到，曲线显示仅对一对波长有较好的色差校正效果，同时，球差只能对一个波长进行校正。Stephens（1948）研究了这一像差在反射式（由透镜和反射镜组成）系统中的影响。

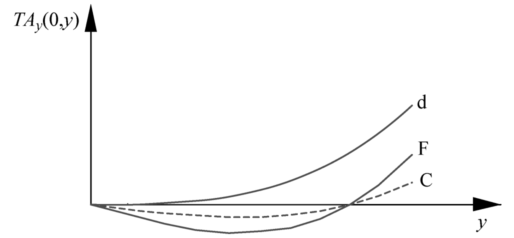


图 4-8　三种波长的垂轴球差曲线

4.3　用 $D-d$ 方法消色差

如 4.2.5 节中所述，色球差是轴向色差的值在射线高度 y 上的变化，因此，校正轴向色差并不意味着近轴光线的边缘轴向色差也为零。由于光学系统对 0.707 带校正色差与对边缘带校正色差是一致的，所以最好的办法是校正在入瞳半径 0.7 的区域（即 0.707 带）中的轴向色差。

在相同条件下的等效方法如图 4-9 所示，由轴上物点发出的白光球面波进入透镜发生折射，蓝光（F）和红光（C）经过光学系统后产生两个不同的波阵面。我们现在假设两个波阵面在中心和边缘互相接触，以尽量减小整个孔径的轴向色差。显然，这就意味着，这两个波阵面在 0.7 带附近是相互平行的。由于这两个波阵面是平行的，那么这两条光线从该区域沿着相同的路径行进，并在大致相同的点穿过光轴。

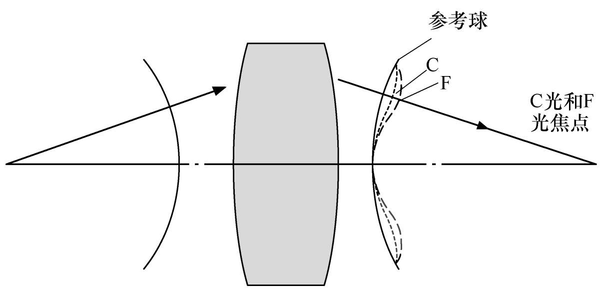


图 4-9　用 $D-d$ 方法消色差

总之，当光线的像差在 0.7 带为零或者当波阵面在中心和边缘相互接触时，近轴色差的校正效果达到最佳。

基于该结果，Conrady（1960）提出了用于消色差的 $D-d$ 方法。使用费马原理，当两种色光近轴的光路相同时，两个波阵面在中心相互接触。如果 d_i 和 D_i 分别是近轴子午光线和边缘子午光线光路长度，并且当红光和蓝光的边缘光线路径相同时，两波阵面在边缘相互接触，那么

$$\sum_{i=0}^{k} dn_{\mathrm{C}} = \sum_{i=0}^{k} dn_{\mathrm{F}} \tag{4-44}$$

$$\sum_{i=0}^{k} Dn_{\mathrm{C}} = \sum_{i=0}^{k} Dn_{\mathrm{F}} \tag{4-45}$$

因为近轴光线和边缘光线相交，并且假设两波阵面仅在边缘相互接触，那么由费马原理可得

$$\sum_{i=0}^{k} dn_{\mathrm{C}} = \sum_{i=0}^{k} Dn_{\mathrm{C}} \tag{4-46}$$

结合式（4-44）和式（4-45）可得

$$\sum_{i=0}^{k} (D-d)n_{\mathrm{C}} = \sum_{i=0}^{k} (D-d)n_{\mathrm{F}} \tag{4-47}$$

或者

$$\sum_{i=0}^{k} (D-d)(n_{\mathrm{C}}-n_{\mathrm{F}}) = 0 \tag{4-48}$$

在实际计算这个表达式时，我们可以做如下近似。不同颜色的光在介质中有不同的传播路径，因而其光程并不完全相同，但我们可以认为它们是相等的。这种近似是相当准确的，而且还简化了计算。在空气中时 $D-d$ 并不需要计算，因为在非色散介质如空气或真空中 $n_{\mathrm{F}}-n_{\mathrm{C}}=0$。

Feder 在 1954 年提出了垂轴像差和 $D-d$ 的关系：

$$\frac{AchrT}{F} = -\frac{\mathrm{d}\left[\sum_{i=0}^{k}(D-d)(n_{\mathrm{C}}-n_{\mathrm{F}})\right]}{\mathrm{d}y} \tag{4-49}$$

式中，F 是有效焦距。

如果我们记住，这些含像差的光路是波前变形，那么显然这个表达式和式（1-76）是极其相似的。

4.4 二级光谱

消色差波长的焦距和介于这两种波长之间其他色光的焦距是不同的，这就是二级光谱。二级光谱效应在光学系统中是非常重要的，它已在诸多文献中被广泛地研究和描述，例如，Cartwright（1939），Christen（1981），Herzberger 和 McClure（1963），Smith（1959），Stephens（1957，1959，1960），Willey（1962），Wynne（1977，1978）。前面我们已经分析了薄透镜对于红光和蓝光的消纵轴色差的贡献［式（4-21）］，如果将轴向倍率因素考虑进去，则

$$AchrLC = -\frac{y^2}{u'^2 f}\frac{n_{\mathrm{F}}-n_{\mathrm{C}}}{(n-1)} = -\frac{y^2}{u'^2 fV} \tag{4-50}$$

通过类比，则有

$$AchrLC_{\lambda\mathrm{F}} = -\frac{y^2}{u'^2 f}\frac{n_{\lambda}-n_{\mathrm{F}}}{(n-1)} \tag{4-51}$$

且

$$AchrLC_{\lambda F}=AchrLC\left(\frac{n_{\lambda}-n_{F}}{n_{F}-n_{C}}\right) \tag{4-52}$$

定义括号中的量为 λ 和 F 的部分相对色散，记为 $P_{\lambda F}$，即

$$P_{\lambda F}=\frac{n_{\lambda}-n_{F}}{n_{F}-n_{C}} \tag{4-53}$$

因此，结合式（4-50），对于一个有 k 个面的轴向中心系统我们可得

$$AchrLC_{\lambda Fk}=-\frac{1}{u'^{2}}\sum_{i=0}^{k}\frac{P_{\lambda F}y^{2}}{fV} \tag{4-54}$$

对于由两块镜片组成的双胶合透镜而言，该表达式变为

$$AchrLC_{\lambda F}=-F\left(\frac{P_{\lambda F1}-P_{\lambda F2}}{V_{1}-V_{2}}\right) \tag{4-55}$$

这意味着，如果两种材料的部分相对色散 $P_{\lambda F1}$ 和 $P_{\lambda F2}$ 相等，那么双胶合透镜就能够校正色差和二级光谱。一些商用光学玻璃的部分相对色散和阿贝常数有一定关系。以部分相对色散 P 为纵坐标，以阿贝常数为横坐标，把各种玻璃的值标注在其上，可得如图 C-3 所示的曲线图。如果一个双胶合透镜的两块镜片由图中的两种玻璃制作，那么近轴二级光谱和连接两点而成的直线斜率成正比。但不幸的是，除了一些含氟冕牌玻璃和萤石外，这个斜率几乎对任意组合的两种玻璃都是相同的。

另一个办法是通过式（4-29）来取得同时消色差和二级光谱的条件，如果该表达式满足所有在此范围内（C 光和 F 光之间）的波长，即

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dn_{1}/d\lambda}{dn_{2}/d\lambda}\right)=0 \tag{4-56}$$

这种情况（Perrin，1938）相当于两块玻璃的部分相对色散相等。莱辛（1957，1958）研究过复消色差系统玻璃选择的问题。哈里哈兰（1997）也提出了一种使得在预定义波段内残余色差最小的三合透镜光学系统。

另外一种校正二次光谱的方法就是使用三合透镜，系统的焦距为

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{f_{1}}+\frac{1}{f_{2}}+\frac{1}{f_{3}} \tag{4-57}$$

对于一个由三块透镜组成的系统，为了校正红光（C）和蓝光（F），由式（4-25）可得

$$\frac{1}{f_{1}V_{1}}+\frac{1}{f_{2}V_{2}}+\frac{1}{f_{3}V_{3}}=0 \tag{4-58}$$

为了使黄光（D）和红光及蓝光有同样的焦点，由式（4-54）可得

$$\frac{P_{1}}{f_{1}V_{1}}+\frac{P_{2}}{f_{2}V_{2}}+\frac{P_{3}}{f_{3}V_{3}}=0 \tag{4-59}$$

由以上三式可以解得三块透镜的焦距：

$$\frac{1}{f_{1}}=\frac{1}{F}\frac{V_{1}(P_{3}-P_{2})}{\Delta} \tag{4-60}$$

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F}\frac{V_2(P_1-P_3)}{\Delta} \tag{4-61}$$

$$\frac{1}{f_3}=\frac{1}{F}\frac{V_3(P_2-P_1)}{\Delta} \tag{4-62}$$

式中，P_i是部分相对色散，Δ是行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix} P_1 & V_1 & 1 \\ P_2 & V_2 & 1 \\ P_3 & V_3 & 1 \end{vmatrix} \tag{4-63}$$

我们可以看到此行列式的值，是连接图C-3中代表三块玻璃的部分相对色散P和阿贝常数V的三个点所得的三角形面积。因此，如果方程组有解，那么该三角形一定没有零域。

4.5　倍率色差

不同色光的焦距不等时，放大率也不相等，从而有不同的像高。光学系统对不同色光的放大率的差异称为倍率色差，也叫放大率色差或垂轴色差。这种像差造成的影响，是对于离轴点成像模糊，离轴越远，像差越大（O′Connell，1957）。

我们借助如图4-10所示的光学系统来推导倍率色差的表达式。红光的近轴弧矢像在其主光线上的S点，而蓝光的在R点。像高h'_F和h'_C均可由拉格朗日定理计算得出。正如前面指出的，倍率色差的产生，是因为红色和蓝色的近轴矢光线的图像放大率不同。由于轴向色差的存在，这两种色光产生的像不在同一平面上。倍率色差定义为轴外点发出两种色光的主光线在消单色光像差的高斯像面上交点高度之差，即$\overline{SQ}-\overline{PR}$，记为$Mchr$。

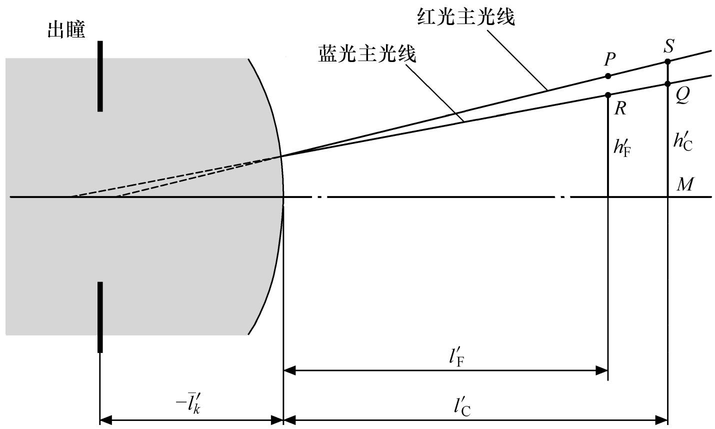


图4-10　在一个有轴向色差及倍率色差系统中的主光线（有彩色插图）

现在，让我们再来考虑图4-10，并定义物理量CDM（放大率色差），类似于将在第

5 章中提到的对彗差的 *OSC*（反正弦条件）。我们假设图中 C 光和 F 光的出瞳在同一位置，这一假设并不完全正确。但是当 $l'_F-\overline{l'_k}$ 比 C 光和 F 光的出瞳位置差大时，在一阶近似下是可以这样考虑的，于是有

$$\overline{QM}=\left(\frac{l'_F-\overline{l'_k}}{l'_C-\overline{l'_k}}\right)h'_C \tag{4-64}$$

那么，*CDM* 可以定义为

$$\begin{aligned}CDM&=\frac{\overline{QS}}{\overline{MQ}}=\frac{\overline{MS}-\overline{MQ}}{\overline{MQ}}=\frac{\overline{MS}}{\overline{MQ}}-1\\&=\frac{h'_F}{\overline{MQ}}-1\end{aligned} \tag{4-65}$$

将 *MQ* 的值代入其中，可得

$$CDM=\frac{l'_C-\overline{l'_k}}{l'_F-\overline{l'_k}}\frac{h'_F}{h'_C}-1 \tag{4-66}$$

或者

$$CDM=\frac{l'_C-\overline{l'_k}}{l'_F-\overline{l'_k}}\frac{u'_F}{u'_C}-1 \tag{4-67}$$

于是，垂轴色差（或者放大率色差）*Mchr* 的表达式为

$$Mchr'=\left(\frac{l'_C-\overline{l'_k}}{l'_F-\overline{l'_k}}\frac{u'_F}{u'_C}-1\right)h' \tag{4-68}$$

上式对于任意物距都是有效的。对于物在无穷远的情况，我们认为 $l'_F=l'_k$，经过变形可得

$$Mchr'=\left(\frac{F_F-F_C}{F}-\frac{AchrL}{l'_k-\overline{l'_k}}\right)h' \tag{4-69}$$

式中，F_C 和 F_F 分别是 C 光和 F 光的有效焦距。我们可以看到，这种色差的大小不仅取决于轴向色差的变化，还和有效焦距随颜色的变化幅度有关。

现在，我们来寻找面型对这一像差的贡献。从图 4-11 中我们可以看到倍率色差为

$$MchrC=SQ=-RS\psi \tag{4-70}$$

因为 *RS* 是元件轴向像差，结合式（5-3），我们可以得到倍率色差为

$$Mchr=-AchrLu'_k\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)=AchrT\left(\frac{\bar{i}}{i}\right) \tag{4-71}$$

正如在 5.4 节中讲到的，主光线和子午光线折射角的比值在一个小的范围内随着图像高度线性变化。因此，初级（一阶）倍率色差和初级（三阶）彗差都随着图像高度线性变化。

倍率色差对于整个光学系统最终的贡献为

$$MchrC=-AchrLCu'_k\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)=AchrTC\left(\frac{\bar{i}}{i}\right) \tag{4-72}$$

4.5.1　光阑位置对色差的影响

如果光阑沿着光轴从一个地方移到另一个地方，显然轴向色差是保持不变的，即

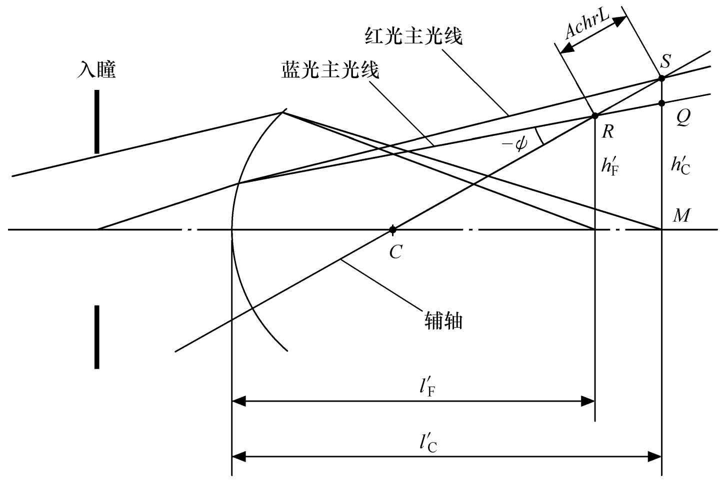


图4-11　倍率色差的计算（有彩色插图）

$$AchrT^{*}=AchrT \tag{4-73}$$

我们将在第5章和第6章中看到，这对于球差和佩兹伐场曲结果也是相同的。在3.8节中曾提到，如果光阑位置改变，那么主光线在光学系统中每一个面上的高度都会相应发生改变，但是主光线高度变化量和子午光线高度的比值却一直为常数，即

$$\overline{Q}=\frac{\overline{y}^{*}-\overline{y}}{y} \tag{4-74}$$

对于主光线和子午光线的折射角以及反射角在光阑变化前后的关系，在6.8节中会有详细的证明，这里仅给出结果

$$\overline{Q}=\frac{\overline{i'}^{*}-\overline{i'}}{i'}=\frac{\overline{i}^{*}-\overline{i}}{i} \tag{4-75}$$

于是，结合上式和式（4-71），我们可以得出位置变化后新光阑的倍率色差为

$$Mchr^{*}=Mchr+AchrT\,\overline{Q} \tag{4-76}$$

4.5.2　倍率色差的校正

倍率色差和轴向色差是密切相关的。它们可能会出现许多不同的组合，例如：

1）当同时对轴向色差和倍率色差进行校正时，如图4-12a所示，红光和蓝光的图像在同一平面上，并具有相同的尺寸。可以证明，在这种情况下，两种色光（C和F）的子午光线和主光线的传播路径相同。此外，它们的出射光瞳是在相同的位置，并且具有相同的直径。对于物在无穷远的特殊情况，光学系统反转，如图4-12b所示，红色和蓝色的光线按照相同的路径折射并平行于光轴。

2）如果只校正轴向色差而不对倍率色差进行校正，如图4-12c所示，红光和蓝光的图像在同一平面上，并且尺寸不同，两种色光（C和F）的子午光线和主光线的传播路径也不相同，出射光瞳的位置和大小也不尽相同。再次考虑物在无穷远的特殊情况，光学系统反转，如图4-12d所示，红色和蓝色的子午光线按照不同的路径出射但平行于

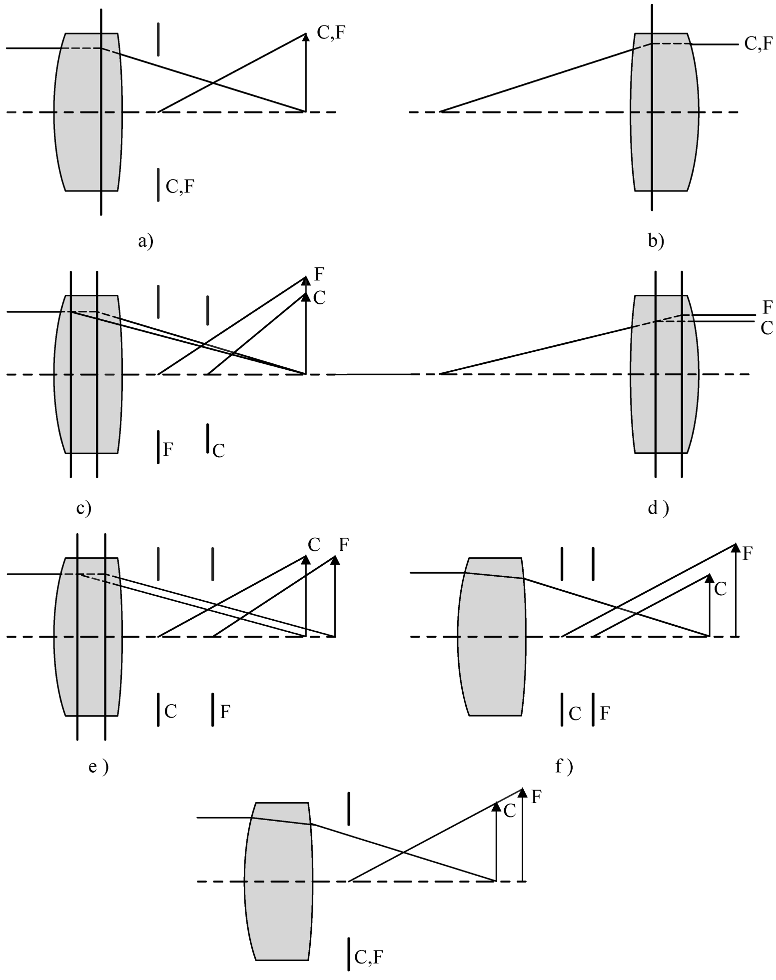


图 4-12　不同轴向色差和倍率色差系统中的红色、蓝色子午光线与主光线的关系（有彩色插图）

光轴，两种色光的有效焦距也相等。

3）图 4-12e 所示的是红光和蓝光的放大率相同的情况，即两种色光的图像大小相同但位置不同，子午光线折射角相等。在这种情况下，轴向色差和倍率色差都存在。

4）现在我们考虑红光和蓝光的角放大率 M 相同但轴向色差和倍率色差均未进行校正的情况，如图 4-12f 所示。两种色光的出射主光线路径不同但平行，二者的出射光瞳大小相同但不在同一位置，它们之间的距离通常叫作光瞳的轴向色差；如果光瞳大小不同，那么半径之差叫作光瞳的倍率色差。

5）图 4-12g 所示的系统，没有校正轴向色差，但倍率色差已经完全校正。

如果物在无穷远处并且红光和蓝光的图像具有相同的大小，那么两种色光的有效焦距是相等的（$F_C = F_F$）。因此，从方程式（4-66）我们可以看到，如果 $F_C = F_F$ 并且满

足下列条件之一时，倍率色差为零：

1）轴向色差已经校正。

2）系统的光焦度为零（有效焦距无穷大）。

3）系统的出射光瞳在无穷远（$l'_k - l_k$），换句话说，即主光线平行于光轴。

薄透镜的有效焦距和后工作距是相等的。因此，对于消色差薄透镜而言，轴向色差和倍率色差均已校正。另一个有趣的结论是，对于一个具有两块分离透镜的系统，仅当组成系统的两块透镜的轴向色差分别被校正时，该系统的所有色差都得到校正。

4.5.3 同种材料制造的透镜校正倍率色差

如果系统不是薄透镜系统，那么，和轴向色差一样，倍率色差也可以在系统只使用一种玻璃的情况下被校正。如果出射光瞳在无穷远（远心），或者其到光学系统的距离远大于焦距，那么要校正倍率色差唯一的必要条件就是系统对红光和蓝光的有效焦距相等。系统成像如图4-12d所示。现在我们考虑以下两种情况：①具有两块分离薄透镜的系统；②单一厚透镜。

定义系统透镜的总曲率为$\kappa = c_1 - c_2$，由式（3-44）可得，距离为d的双薄透镜系统的有效焦距为

$$P = \frac{1}{F} = (n-1)\kappa_1 + (n-1)\kappa_2 - d(n-1)^2\kappa_1\kappa_2 \tag{4-77}$$

对折射率n求导，即

$$\frac{dP}{dn} = \kappa_1 + \kappa_2 - 2d(n-1)\kappa_1\kappa_2 = 0 \tag{4-78}$$

于是可得

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2} \tag{4-79}$$

因此可以得出以下结论：如图4-13所示，如果系统中两块透镜焦距的平均值等于二者之间的距离且出射光瞳在无穷远，那么系统的倍率色差就得到校正。

现在，我们来考虑厚度为t的单一厚透镜对色差的校正，如图4-14所示。由式（3-33）可知

$$P = \frac{1}{F} = (n-1)\kappa + \frac{(n-1)^2}{n}tc_1c_2 \tag{4-80}$$

对折射率n求导，即

$$\frac{dP}{dn} = \kappa + \frac{(n^2-1)}{n^2}tc_1c_2 = 0 \tag{4-81}$$

于是可得

$$t = \frac{(r_1 - r_2)n^2}{(n^2-1)} \tag{4-82}$$

我们可以看出，厚透镜两个表面的曲率中心的距离应等于t/n^2，如图4-14所示。最后，我们应该记住，仅当像方主光线平行于光轴或者出瞳在无穷远时，厚透镜校正倍率色差应满足关系式（4-79），而双薄透镜系统需满足关系式（4-74）。

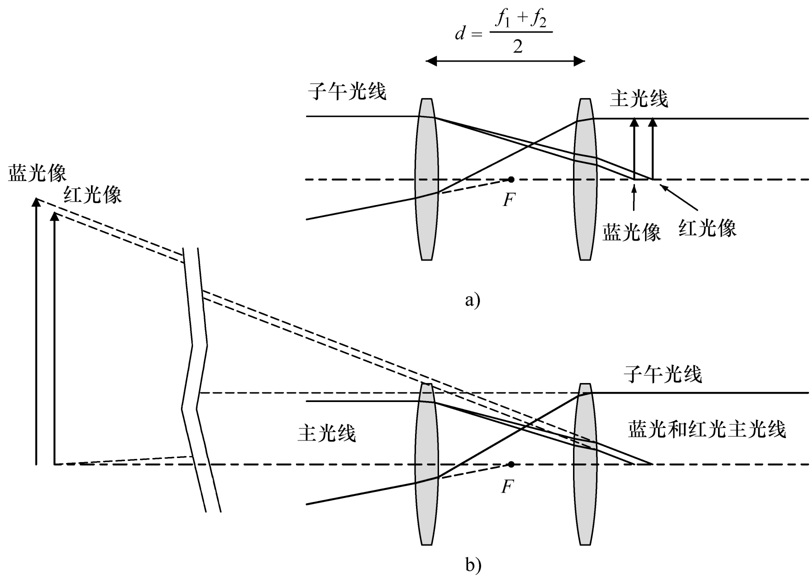


图 4-13　同一材料的两片透镜校正倍率色差（有彩色插图）

a）物位于无穷远　b）入瞳位于无穷远

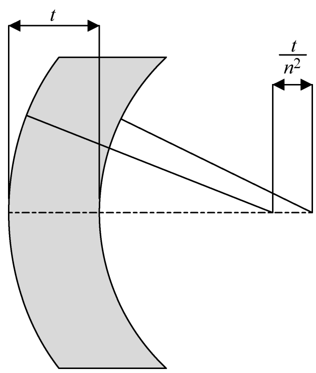


图 4-14　厚透镜校正倍率色差

参考文献

[1] Cartwright, C. H., "Lithium – Fluoride Quartz Apochromat," *J. Opt. Soc. Am.*, **29**, 350 – 351 (1939).

[2] Christen, R., "An Apochromatic Triplet Objective," *Sky and Telescope*, 376 – 381 (1981).

[3] Conrady, A. E., *Applied Optics and Optical Design*, *Part* 2, Dover Publications, New York (1960).

[4] Cruickshank, F. D., "On the Primary Chromatic Coefficients of a Lens System," *J. Opt. Soc. Am.*,

36, 103 – 107 (1946).
[5] Feder, D. P., "Conrady's Chromatic Condition," *J. Res. Natl. Bur. Std.*, **53**, 47 (1954).
[6] Hariharan, P., "Apochromatic Lens Combinations: A Novel Design Approach," *Opt. Laser Technol.*, **29**, 217 – 219 (1997).
[7] Herzberger, M., "The Dispersion of Optical Glass," *J. Opt. Soc. Am.*, **32**, 70 – 77 (1942).
[8] Herzberger, M., "Colour Correction in Optical Systems and a New Dispersion Formula," *Opt. Acta*, **6**, 197 (1959).
[9] Herzberger, M. and Jenkins, F. A., "Color Correction in Optical Systems and Types of Glass," *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 984 – 989 (1949).
[10] Herzberger, M. and McClure, N. R., "The Design of Superachromatic Lenses," *Appl. Opt.*, **2**, 553 – 560 (1963).
[11] Herzberger, M. and Salzberg, C. D., "Refractive Indices of Infrared Optical Materials and Color Correction of Infrared Lenses," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 420 – 427 (1962).
[12] Kingslake, R., *Lens Design Fundamentals*, Academic Press, New York (1978).
[13] Lessing, N. V. D. W., "Selection of Optical Glasses in Apochromats," *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 955 – 958 (1957).
[14] Lessing, N. V. D. W., "Further Considerations on the Selection of Optical Glasses in Apochromats," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 269 – 273 (1958).
[15] O'Connell, J. M., "Variation of Photographic Resolving Power with Lateral Chromatic Aberration," *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 1018 – 1020 (1957).
[16] Perrin, F. H., "A Study of Harting's Criterion for Complete Achromatism," *J. Opt. Soc. Am.*, **28**, 86 – 93 (1938).
[17] Smith, W. J., "Thin Lens Analysis of Secondary Spectrum," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 640 – 641 (1959).
[18] Stephens, R. E., "Reduction of Sphero – Chromatic Aberration in Catadioptric Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **38**, 733 – 735 (1948).
[19] Stephens, R. E., "Secondary Chromatic Aberration," *J. Opt. Soc. Am.*, 47, 1135 (1957).
[20] Stephens, R. E., "Selection of Glasses for Three Color Achromats," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 398 – 401 (1959).
[21] Stephens, R. E., "Four Color Achromats and Superchromats," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 1016 – 1019 (1960).
[22] Willey, R. R., "Machine – Aided Selection of Optical Glasses for Two – Element, Three Color Achromats," *Appl. Opt.*, **1**, 368 – 369 (1962).
[23] Wynne, C. G., "Secondary Spectrum with Normal Glasses," *Opt. Commun.*, **21**, 419 – 424 (1977).
[24] Wynne, C. G., "A Comprehensive First – Order Theory of Chromatic Aberration. Secondary Spectrum Correction without Special Glasses," *Opt. Acta*, **25**, 627 – 636 (1978).

第 5 章　球　　差

5.1　球差计算

球差是所有的像差之中最重要的，因为它影响透镜的整个视场，包括光轴邻近的区域（Toraldo Di Francia，1953）。这个命名是基于这种像差通常是在球面镜的反射或折射中观察到的。产生球差的原因是子午面内边缘光线与近轴光线焦点位置的不同，如图5-1所示。球差的值可以通过很多种方法计算。

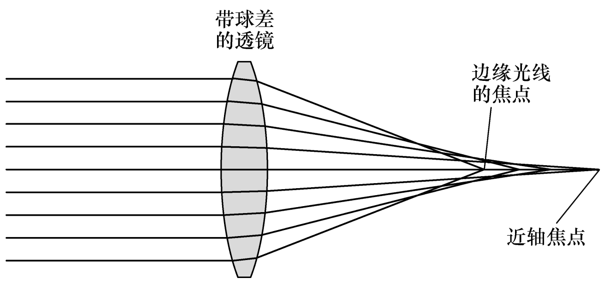


图 5-1　一个透镜中的球差

在计算球差之前，可以先找到第 1 章中定义的符号 Q 和 Q' 的值的表达式，在本节中它们将多次被应用。从方程式（1-26）和式（1-29）中给出的符号 Q 和 Q' 的定义以及三角函数关系，可以得出

$$\frac{Q}{r} = \sin I - \sin U = 2\sin\left(\frac{I-U}{2}\right)\cos\left(\frac{I+U}{2}\right) \tag{5-1}$$

和

$$\frac{O'}{r} = \sin I' - \sin U' = 2\sin\left(\frac{I'-U'}{2}\right)\cos\left(\frac{I'+U'}{2}\right) \tag{5-2}$$

另一方面，$\overline{PA}$的值表示顶点到边缘光线与光学表面交点的距离，如图 5-2 所示，可以得出

$$\overline{PA} = 2r\sin\left(\frac{I-U}{2}\right) = 2r\sin\left(\frac{I'-U'}{2}\right) \tag{5-3}$$

因此，Q 和 Q' 的值可以等价表示为

$$Q = r(\sin I - \sin U) = \overline{PA}\cos\left(\frac{I+U}{2}\right) \tag{5-4}$$

和

$$Q' = r(\sin I' - \sin U') = \overline{PA}\cos\left(\frac{I'+U'}{2}\right) \tag{5-5}$$

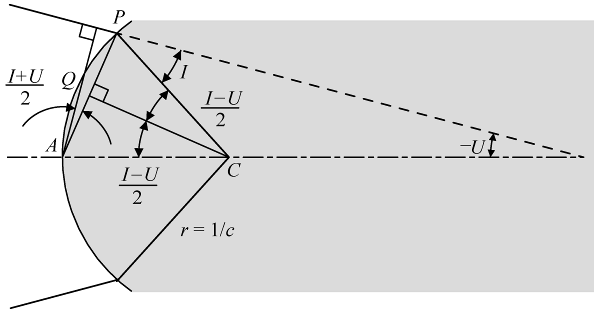


图5-2　子午光线在球面镜表面发生折射

根据定义对球差进行计算，如图5-3所示。通过该系统的球面在像方产生的轴向球差为

$$SphL = L' - l' \tag{5-6}$$

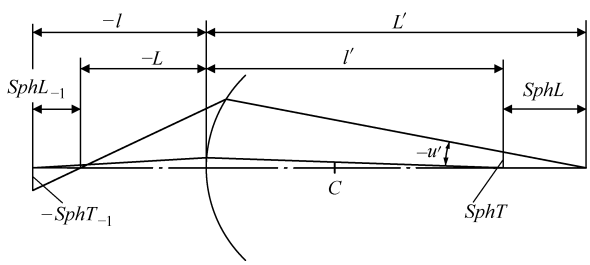


图5-3　轴向球差的定义

在物方产生的轴向球差是前一个面贡献的像差，表示为

$$SphL_{-1} = L - l \tag{5-7}$$

式中，下标-1表示前一个面。

Conrady（1957）提出了一种计算球差的方法。首先考虑方程式（1-36），可以改写成

$$\frac{n'}{L'} - \frac{n}{L} = \frac{n'-n}{r} + \frac{n\sin I}{r(\sin I - \sin U)}\left(1 - \frac{\sin I - \sin U}{\sin I' - \sin U'}\right) \tag{5-8}$$

从方程式（1-33），得出

$$\frac{\sin I}{\sin I - \sin U} = \frac{L-r}{L} \tag{5-9}$$

代入式（5-4）和式（5-5）中Q和Q'的值，式（5-8）可以写成

$$\frac{n'}{L'} - \frac{n}{L} = \frac{n'-n}{r} + \frac{n(L-r)}{rL}\left(1 - \frac{Q}{Q'}\right) \tag{5-10}$$

这个表达式适用于任何的边缘光线。对近轴光线，根据高斯方程

$$\frac{n'}{l'} - \frac{n}{l} = \frac{n'-n}{r} \tag{5-11}$$

因此，由式（5-11）减去式（5-10），有如下关系

$$n'\frac{L'-l'}{L'l'}-n\frac{L-l}{Ll}=\frac{n(L-r)}{rl}\left(\frac{Q}{Q'}-1\right) \quad (5\text{-}12)$$

得出

$$SphL=\left(\frac{nL'l'}{n'Ll}\right)SphL_{-1}+\frac{n(L-r)L'l'}{n'rL}\left(\frac{Q-Q'}{Q'}\right) \quad (5\text{-}13)$$

代入方程式（5-4）和式（5-5）得到

$$SphL=\left(\frac{nL'l'}{n'Ll}\right)SphL_{-1}+\frac{n(L-r)L'l'}{n'rL}\left[\frac{\cos\left(\frac{I+U}{2}\right)-\cos\left(\frac{I'+U'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{I'+U'}{2}\right)}\right] \quad (5\text{-}14)$$

由三角函数恒等式

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\left(\frac{\beta+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \quad (5\text{-}15)$$

和等式 $U=U'+I-I'$，用正弦函数乘积形式替换余弦函数的差，可以进一步得到如下关系

$$SphL=\left(\frac{nL'l'}{n'Ll}\right)SphL_{-1}+\frac{2n(L-r)L'l'}{n'rL}\left[\frac{\sin\left(\frac{I+U'}{2}\right)\sin\left(\frac{I'-I}{2}\right)}{\cos\left(\frac{I'+U'}{2}\right)}\right] \quad (5\text{-}16)$$

通过这个表达式可以用一种简单的方法找到零球差的条件，这个将在下文介绍。上述表达式的右边第一项表示前一个系统贡献的轴向球差，第二项表示由该光学表面引入的新的球差。物球差变换 $SphL_{-1}$前的系数表示面的轴向放大率。

Delano（1952）提出了一种更好的方法获取一个等价的表达式。从 Delano 提出的关于近轴光线和边缘光线的方程式（1-60）出发，假设边缘光线和近轴光线从物方的同一个坐标点发出。根据方程式（5-6）和式（5-7）关于轴向球差的定义，在折射前和折射后（见图 1-17），分别得到

$$SphL=-\frac{s'}{\sin U'};\ SphL_{-1}=-\frac{s}{\sin U} \quad (5\text{-}17)$$

由此得到

$$SphL=\left(\frac{nu\sin U}{n'u'\sin U'}\right)SphL_{-1}-\frac{ni}{n'u'\sin U'}(Q'-Q) \quad (5\text{-}18)$$

$\overline{PA}$、Q 和 Q'采用与方程式（5-3）～式（5-5）同样的表达式，再次使用方程式（5-15），可以得到

$$SphL=\left(\frac{nu\sin U}{n'u'\sin U'}\right)SphL_{-1}+\frac{2ni\,\overline{PA}}{n'u'}\left[\frac{\sin\left(\frac{I+U'}{2}\right)\sin\left(\frac{I'-I}{2}\right)}{\sin U'}\right] \quad (5\text{-}19)$$

这个表达式和 Conrady 提出的方程式（5-16）都可以用于同一坐标系中 k 个有圆心的面组成的光学系统中，每一个关系都是恰当的，都取决于特定的情况。对于小的孔

径，$\overline{PA}$近似等于临界光线的高 y。通过变换关系 $u_+=u'$，$U_+=U'$和 $n_+=n'$，将上述表达式应用到整个系统的每一个面，通过代数运算可以得到

$$SphL_{\text{Total}} = \left(\frac{n_1u_1\sin U_1}{n'_ku'_k\sin U'_k}\right)SphL_0 + \sum_{j=1}^{k}\frac{2ni\,\overline{PA}}{n'_ku'_k}\left[\frac{\sin\left(\frac{I+U'}{2}\right)\sin\left(\frac{I'-I}{2}\right)}{\sin U'_k}\right] \tag{5-20}$$

式中，下标0代表物，下标 k 代表最后一个面。在名称后面的下标“Total”表示整个系统贡献的球差值 $SphL_{\text{Total}}$。

$SphL_0$ 前的系数表示整个光学系统的轴向放大［见等式（1-77）］。假设物的球差 $SphL_0=0$，式（5-20）可以写成

$$SphL_{\text{Total}} = \sum_{j=1}^{k}\frac{2ni\,\overline{PA}}{n'_ku'_k}\left[\frac{\sin\left(\frac{I+U'}{2}\right)\sin\left(\frac{I'-I}{2}\right)}{\sin U'_k}\right] \tag{5-21}$$

在这个表达式中，这个光学系统球面后的部分的轴向放大率毫无疑问地被当作了一个因子。因此，可以把这个表达式理解为上述系统被整个光学系统的轴向放大率放大之后，变换到像平面上的轴向球差。

5.2　初级球差

如果孔径足够大，偏离了近轴近似而产生了球差，这种球差的初级球差是能被计算的，但是如果孔径足够小，就可以避免高阶项。因此，假设物没有球差，使用式（5-21）中的近轴近似，令 $y=\overline{PA}$，则可以很容易地得到初级球差的值为

$$SphL_{\text{Total}} = \sum_{j=1}^{k}\frac{yn(i+u')(i'-i)i}{2n'_ku'^2_k} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{nu^2}{n'_ku'^2_k}\right)\frac{y(i+u')(i'-i)i}{2u^2} \tag{5-22}$$

式中，第二个求和项中的第一个因子是表示面 j 光学系统的轴向放大。式（5-22）也可以写成

$$SphL_{\text{Total}} = \sum_{j=1}^{k}SphLC = \sum_{j=1}^{k}\overline{m}SphL \tag{5-23}$$

式中，$\overline{m}$是面 j 后面部分光学系统的轴向放大倍数，$SphL$ 是面 j 贡献的轴向球差，$SphLC$ 是面 j 贡献的最终的轴向球差。因此，这些球差表达式能被写成

$$SphL = \frac{yn(i+u')(i'-i)i}{2n'u'^2} = \frac{y(n/n')(n-n')(i+u')i^2}{2n'u'^2}$$
$$SphLC = \frac{yn(i+u')(i'-i)i}{2n'_ku'^2_k} = \frac{y(n/n')(n-n')(i+u')i^2}{2n'_ku'^2_k} \tag{5-24}$$

通过式（1-38）、式（1-40）和式（1-41）消去所有的角度变量，这些表达式也可以写成另一种形式

$$SphL = \frac{l'^2}{2}\left(1-\frac{n'}{n}\right)\left[\frac{n'}{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)-\frac{1}{l'}\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)^2y^2$$
$$SphLC = \frac{n'}{2n'_ku'^2_k}\left(1-\frac{n'}{n}\right)\left[\frac{n'}{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)-\frac{1}{l'}\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)^2y^4 \tag{5-25}$$

这些轴向球差公式经常用于推导初级离轴像差公式，而横向球差更有用，并应用于光学系统的精确计算中。通过利用式（5-26）轴向像差与横向像差的关系（见图 5-3），可以根据轴向像差的值很容易地计算得到横向像差的值。

$$u' = -\frac{SphT}{SphL} = -\frac{SphTC}{SphLC} \tag{5-26}$$

这个关系对球差和所有其他的初级误差都是有效的，这个我们将在后面看到。因此，等式（2-22）乘以 $-u'_k$ 可以得到全光学系统的横向球差

$$SphT_{\text{Total}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{yn(i+u')(i'-i)i}{2n'_k u'_k} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{nu}{n'_k u'_k}\right)\frac{y(i+u')(i'-i)i}{2u} \tag{5-27}$$

式中，等式右边第二个求和项的第一个系数是光学系统在球面 j 后面的部分的横向放大率。于是，得到整个系统的横向球差为

$$SphT_{\text{Total}} = \sum_{j=1}^{k} SphTC = \sum_{j=1}^{k} mSphT \tag{5-28}$$

式中，m 是面 j 后面系统的横向放大倍数，$SphT$ 是面 j 贡献的新的横向球差，$SphTC$ 是面贡献的最终横向球差。于是，可以写成

$$SphT = \frac{yn(i+u')(i'-i)i}{2n'u'} = \frac{y(n/n')(n-n')(i+u')i^2}{2n'u'}$$

$$SphTC = \frac{yn(i+u')(i'-i)i}{2n'_k u'_k} = \frac{y(n/n')(n-n')(i+u')i^2}{2n'_k u'_k} \tag{5-29}$$

也常被写成

$$SphTC = \sigma i^2 \tag{5-30}$$

式中，

$$\sigma = \frac{y(n/n')(n-n')(i+u')}{2n'_k u'_k} \text{或} \ \sigma = \frac{y(n/n')(n-n')(i+u')}{2\Lambda}h'_k \tag{5-31}$$

式中，Λ 是等式（1-64）中的拉格朗日光学不变量。

通过等式（1-38）、式（1-40）和式（1-41）消去角度变量，上述表达式也可以写成

$$SphT = \frac{l'}{2}\left(1-\frac{n'}{n}\right)\left[\frac{n'}{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)-\frac{1}{l'}\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)^2 y^3$$

$$SphTC = -\frac{n'}{2n'_k u'_k l'}\left(1-\frac{n'}{n}\right)\left[\frac{n'}{n}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)-\frac{1}{l'}\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)^2 y^4 \tag{5-32}$$

上述表达式表示了面 j 对总的横向球差的贡献，这与物和像的位置无关。设横向球差贡献是像距 l' 的函数，物的位置可以在光轴上发生变化，光学面可以是凸的也可以是凹的，指定折射率 $n=1.5168$。入射光的收敛角是可以变化的，以便折射光有一个恒定的收敛角 $u'=-0.3\text{rad}$。获得的结果如图 5-4a 和图 5-4b 所示，这个将在 5.5.1 节做更加详细的介绍。图中说明的结果也能从对式（5-16）的分析中获取。结果表明 l' 存在三个值使得球差为 0。这些像的位置分别是：①面的顶点 $l'=0$；②曲率中心 $l'=r$；③光轴上一点 $l'=r(n+1)/n$。下文将更加详细地证明这些结果。从图中可以得出，如果我

们知道像与曲率中心的相对位置，就可以粗略估计透镜的每个面对横向球差贡献的大小和符号。

如果边缘光线的焦点在近轴光线的焦点的右边，轴向球差的值是正的，这与光的传播方向无关。将一个平面镜放在一个透镜与它的焦点之间的位置，反转了光的传播方向，同时也调换了边缘光线和近轴光线的焦点的位置。u'_k 的符号也会发生改变。于是，可以得知在透镜前放置平面镜能改变轴向球差的符号，但不能改变横向球差的符号。

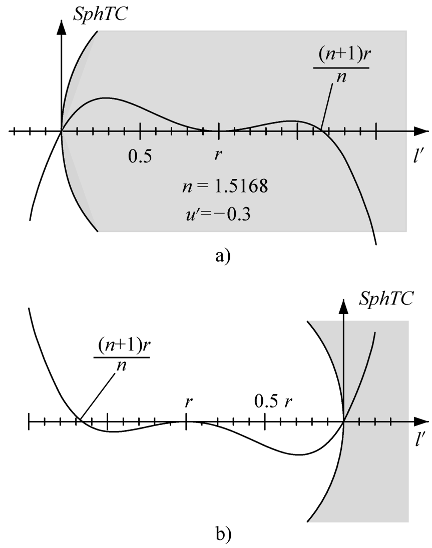


图5-4　球面系统中的横向球差贡献

可以证明，如果已知所有面贡献的总的球差，球差与子午面内的半径 y_1 的三次方是成正比的。因为光学系统具有旋转对称性，用 S（$S^2 = x_1^2 + y_1^2$）替代 y_1。于是，整个光学系统的横向球差可以表示为

$$SphT_{\text{Total}} = aS^3 \tag{5-33}$$

式中，a 是横向球差系数。这意味着横向球差随入射孔半径的三次方增加。

5.2.1　薄透镜的球差

无论厚透镜还是薄透镜，透镜的边缘光线的球差都可以通过式（5-28）计算两个表面的贡献球差之和求出。因此，对一个薄透镜，无论物和像的位置如何，运用代数运算和高斯定律［式（1-44）］后可以得到

$$SphT_{\text{Total}} = -\frac{n-1}{2n^2 u'_k}\left[\left(\frac{1}{r_1}-\frac{n+1}{l_1}\right)\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{l_1}\right)^2 y_1^4 - \left(\frac{1}{r_2}-\frac{n+1}{l'_2}\right)\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{l'_2}\right) y_2^4\right] \tag{5-34}$$

具体针对薄透镜的情况，可以得到

$$SphT_{\text{Total}} = \frac{(n-1)\kappa l'_2 y^3}{2n}\{[n^2\kappa - c_1 + (n+1)\nu_1][n\kappa - 2(c_1-\nu_1)] + n(c_1-\nu_1)^2\} \tag{5-35}$$

式中，

$$\nu_1 = \frac{1}{l_1};c_1 = \frac{1}{r_1};c_2 = \frac{1}{r_2};\kappa = c_1 - c_2 \tag{5-36}$$

可以看出，像差的大小不仅与透镜的形状有关，还与物和像的位置有关。下面的表达式是 Conrady（1957）和许多其他的作者计算出的薄透镜的球差表达式，由上一个表达式和方程式（2-13）得出

$$SphT_{\text{Total}} = -l'_k y^3(G_1\kappa^3 - G_2\kappa^2 c_1 + G_3\kappa^2\nu_1 + G_4\kappa c_1^2 - G_5\kappa c_1\nu_1 + G_6\kappa\nu_1^2) \tag{5-37}$$

式中，若物是在无穷远 $l'_k = f$，或者若物在一个有限的距离内 $l'_k = [\kappa(n-1) + \nu_1]^{-1}$，变量 G 是

$$G_1 = \frac{n^2(n-1)}{2}; G_2 = \frac{(2n+1)(n-1)}{2}; G_3 = \frac{(3n+1)(n-1)}{2}$$

$$G_4 = \frac{(n+2)(n+1)}{2n}; G_5 = \frac{2(n^2-1)}{n}; G_6 = \frac{(3n+2)(n-1)}{2n} \tag{5-38}$$

可以看出，横向球差随孔径大小的三次方增加。

在上文曾提到，对一个焦距一定的透镜，球差的大小取决于透镜的形状和物的位置。已知物距，可以计算出球差最小时透镜的形状。反之，已知透镜的形状，可以计算出球差最小时的物距。

Kingslake（1978）给出了一个球差值最小的薄透镜的曲率 c_1 的值为

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)\kappa + 2(n+1)\nu}{n+2} \\ &= \frac{G_2\kappa + G_5\nu}{2G_4} \end{aligned} \tag{5-39}$$

式中，$\nu = 1/l$ 是物距的倒数。因此，对物在无穷远的特殊情况

$$c_1 = \frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)\kappa}{n+2} \tag{5-40}$$

对一个焦距不变（$f = 100\text{mm}$）薄透镜，它的横向球差值是一个关于前表面曲率 c_1 的函数。求方程式（5-37）关于 c_1 的偏微分，可以发现存在一个前表面曲率 c_1 的值使像差的值最小，这个值与物的位置有关。

如图 5-5 所示，当物在无穷远时（入射光准直），单个表面的球差贡献是前表面曲率 c_1 的函数。可以注意到，当每个面贡献的 *SphTC* 的值基本相等时，球差的值最小。当入射光的入射角与最后的折射光的折射角相等时，最佳透镜曲率与最小球差是差不多的，但不完全相同。

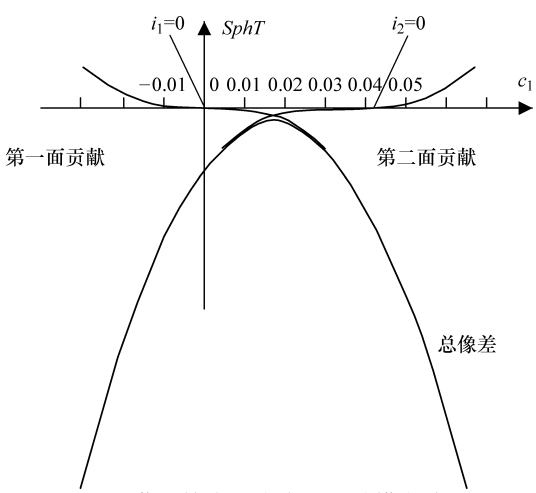


图 5-5　薄透镜中两个表面对总横向球差的贡献（有彩色插图）

如图 5-6 所示，可以看到，即使改变物距，对任何 c_1 的值，横向球差曲线都没有经过零点。然而，假如一个薄透镜由两个折射率不同的薄透镜接触构成，一个是正透镜，另一个是负透镜，则横向像差曲线可以通过 c_1 轴。从图中可以看出，当入射光收敛时，横向像差的值在减少。同时也可以发现，与最小横向球差相对应的最佳透镜曲率是物距的函数。

重要的是要注意到，对一个曲率经像差最小化优化的单透镜，它的球差值也与折射

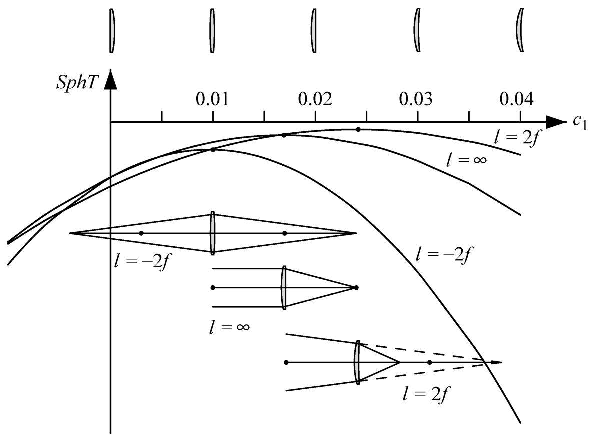


图 5-6　对三种物距成像时薄透镜的横向球差与前表面曲率的关系（有彩色插图）

率有关。折射率越大越好。

图 5-7 展示了一个透镜的横向球差，透镜的焦距 $f=100$mm，直径为 20mm，由肖特 BK7 玻璃材料制成（$n_d=1.5168$）。这个透镜由两个焦距分别为 38mm 和 −61mm 的薄透镜组构成。在图 5-7a 中，两个透镜都由 BK7 材料制成。在图 5-7b 中，正透镜由 BK7 材料制成，但负透镜由肖特 F2 玻璃制成（$n_d=1.6200$）。这里给出了每个透镜的球差（1 和 2）和透镜组的球差。只有当两种玻璃不同时，存在两个零像差点。通过选择恰当的玻璃结合，抛物面曲线可以刚好与 c_1 轴相交。于是，只存在一个零像差点。

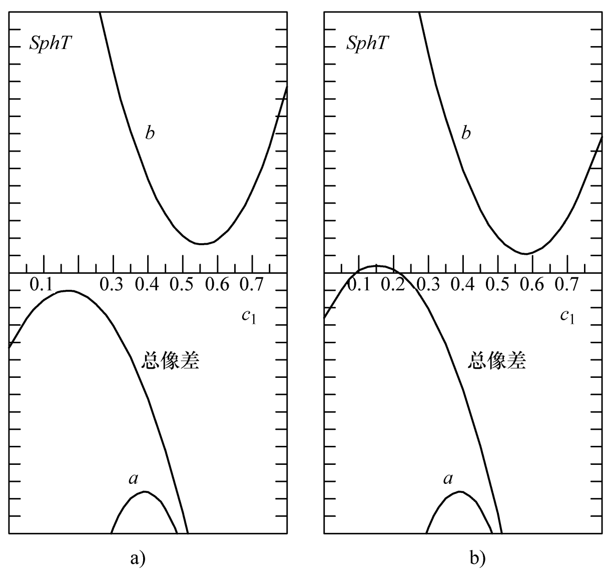


图 5-7　单一薄透镜和薄双胶合透镜每个面对总的横向球差的贡献

5.2.2　薄透镜系统

当一个球差已最小化的透镜分裂成两个元件，组合体与原始的透镜具有相同的光焦度，但球差大大降低。为了证明这个事实，与 Fischer 和 Mason（1987）的方法一样，考虑将一个球差已最小化的单透镜，直径为 D，焦距为 F，按以下三个步骤将其分成两个部分：

1）将透镜的尺寸放大两倍，获得一个两倍直径、两倍焦距、两倍球差的透镜。

2）将直径减小到初始值。焦距没有发生改变，但横向球差变为原来的 1/16，因为横向球差随孔径的三次方增加。

3）将两个一样的透镜紧贴组合在一起。透镜组的球差是单透镜的两倍，焦距变为原来的一半。这样球差仅有初始透镜的 1/8。

如果第二个透镜弯曲到与聚合光最佳的形状，可以实现进一步的改进。由于球差随折射率的增加而减小，因此折射率是一个非常重要的变量。

从图 5-8 可知，在多个薄透镜组成的系统中，边缘球差值是折射率的函数。所有的系统孔径相同，$D=0.3333\text{m}$，焦距 $F=1\text{m}$。在三个薄透镜系统中，当折射率较大时，球差将变成负的。

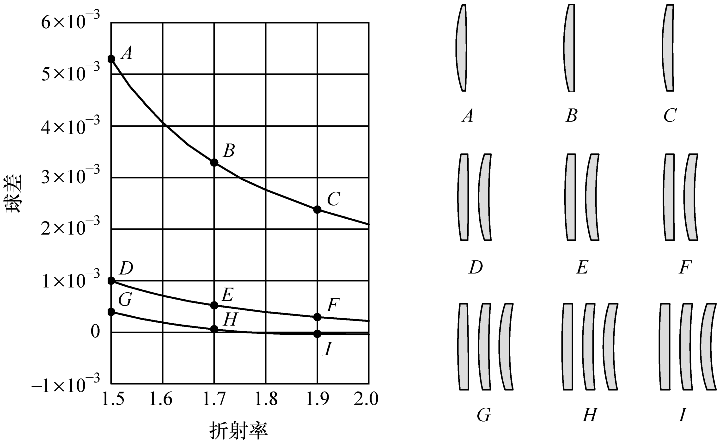


图 5-8　在一个单一薄透镜和在系统中的两到三个透镜球差

5.2.3　会聚光通过平行平面板的球差

如图 5-9 所示，平行平面板可以引起 ΔL 的像位移，其表达式如下：

$$\Delta L=\frac{t}{n}\left(n-\frac{\cos U}{\cos U'}\right) \quad (5\text{-}41)$$

对近轴光线，有

$$\Delta l=\frac{t}{n}(n-1) \quad (5\text{-}42)$$

所以，由方程式（5-41）减去方程式（5-42），轴向球差 $SphL_{\text{Total}}$ 为

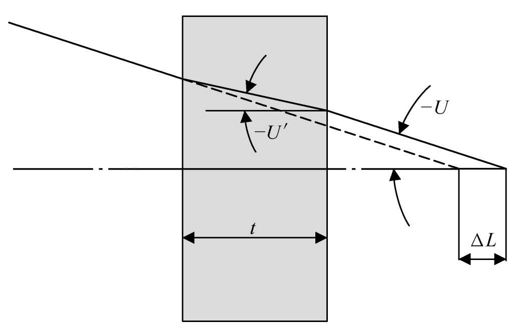


图 5-9　厚平行玻璃平板的球差

$$SphL_{\text{Total}}=\frac{t}{n}\left(1-\frac{\cos U}{\cos U'}\right) \tag{5-43}$$

通过近轴近似得到

$$SphL_{\text{Total}}=\frac{tu^2}{2n} \tag{5-44}$$

这个表达式对计算显微镜中玻璃盖片引起的球差非常有用。尽管玻璃盖片非常薄，但由于光发散角较大，存在一个明显的球差。

5.3　非球面

非球面分为有旋转对称性和没有旋转对称性的非球面，但是大部分都是第一种类型。在附录B中有更加详细的介绍，非球面可以由下面的算式表示

$$Z=\frac{cS^2}{1+\sqrt{1-(K+1)c^2S^2}}+A_1S^4+A_2S^6+A_3S^8+A_4S^{10} \tag{5-45}$$

式中，第一项表示一个有旋转对称性的圆锥面，旋转对称性由圆锥常数K定义，K是圆锥面离心率的函数。作为一种选择，这个表达式可以展开成一个球面加上一些非球面变化项，这些非球面变化项包含了圆锥形状的作用。于是，可以得到

$$Z=\frac{cS^2}{1+\sqrt{1-c^2S^2}}+B_1S^4+B_2S^6+B_3S^8+B_4S^{10} \tag{5-46}$$

5.4　非球面的球差

非球面有额外的矢高项，由方程式(5-46)描述的非球面有四个非球面项。第一阶近似，可以只取第一项。这一项在面上引入了一个斜率，如图5-10所示，有

$$\frac{dZ}{dS}=4B_1S^3=\left(4A_1+\frac{Kc^3}{2}\right)S^3 \tag{5-47}$$

光学面上的这个倾斜修正改变了折射子午光线的斜率，该变量如下式所示：

$$dU'=\left(\frac{n-n'}{n'}\right)\frac{dZ}{dS} \tag{5-48}$$

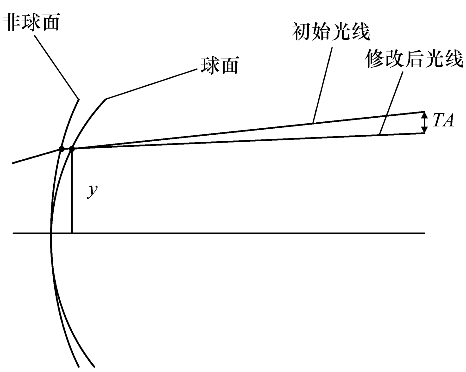


图5-10　非球面的球差

这样，由角的改变引入横向球差项可以表示为

$$dU'=\frac{SphT_{\text{asph}}}{l'} \tag{5-49}$$

于是得到

$$SphT_{\text{asph}}=\frac{1}{2}\left(\frac{n-n'}{n'}\right)(8A_1+Kc^3)\,l'S^3 \tag{5-50}$$

这样，这个像差经非球面后的部分光学系统横向放大后传到了系统最后的像上。因此，通过式（1-47）和横向放大表达式，得到该面对最后的像差贡献为

$$SphTC_{\text{asph}} = -(8A_1 + Kc^3)\left(\frac{n-n'}{2}\right)\left(\frac{S^4}{n'_k u'_k}\right) \tag{5-51}$$

5.5　无球差的面

在一些特定的情况下，单个的光学表面可能完全没有像差。这些面将在下面的小节中被介绍。

5.5.1　折射球面

可以找到单折射光学面没有像差的条件的方法有几种。从式（5-13）中可以看到，如果 $Q=Q'$将没有像差。同样地，如果①Q 和 Q'都等于 0；②当物和像与面的顶点一致时，如图 5-11a 和图 5-11d 所示；③当光垂直入射到面上，物和像在弯曲部分的中心，如图 5-11b 和图 5-11e 所示；④当物和像都有确定的位置使图 5-11c 和图 5-11f 中条件得到满足，也将没有像差。

从方程式（5-16）中，可以得到以下零像差的条件：①$L'=0$；②$L=r$ 或等价地 $I=I'$；③$I'=-U$ 或等价地 $I=-U'$。从方程式（5-12）中可以导出同样的三个条件。前两种情况是平常的、显而易见的，但第三种情况却是非常有趣的。

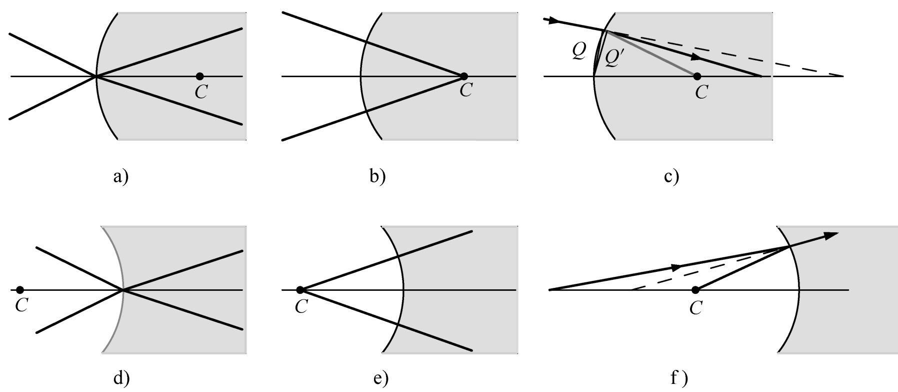


图 5-11　对于凸面镜和凹面镜的无球差情形

将由方程式（5-20）导出的条件 $I=-U'$代入斯涅尔定律中，得到

$$\frac{n'}{n}\sin I' = -\sin U' \tag{5-52}$$

使用方程式（1-20），得到

$$L'-r=\frac{n}{n'}r \text{ 或 } L'=\left(1+\frac{n}{n'}\right)r \tag{5-53}$$

和

$$L-r=\frac{n'}{n}r \text{ 或 } L=\left(1+\frac{n'}{n}\right)r \tag{5-54}$$

这些是在阿贝（耶拿天文台主任和蔡司的研究部主任）发现的结构中分别存在的物和像的位置，这些物和像的位置称为齐明阿贝点。

如果用 L'乘以 n'，L 乘以 n，可以得到

$$n'L' = nL \tag{5-55}$$

于是，可以得出结论：在一个单折射球面系统中存在成对的两个点，当它们分别是物和像时，物和像之间所有光路的光程是相等的，这些点是齐明的。这些无球差的结构有很多实际的应用。

5.5.2 二次曲面的反射

如果物被放在合适的位置，具有旋转对称性的二次曲面反射面是没有球差的，这个位置与圆锥系数值有关，如B.1节所述。如果物在无穷远，抛物面是没有球差的，如图5-12所示。

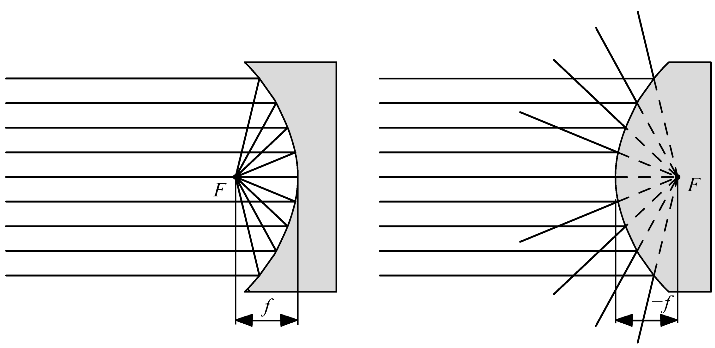


图5-12 无球差（一）

a）凹面抛面镜 b）凸抛物面镜

无论是实物还是虚物，当被放置在椭圆和抛物面焦点位置时，椭圆和抛物面都是没有球差的。如图5-13所示，这样的虚物、实物、虚像和实像有四种组合。

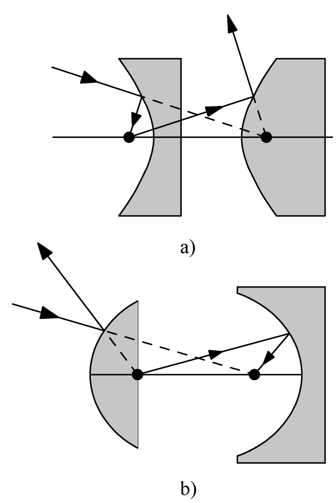


图5-13 无球差（二）

a）反射双曲面 b）反射椭球面

5.5.3 笛卡儿卵形

雷内・笛卡儿发现椭圆的折射可能没有球差。这样的面叫作笛卡儿卵形。这些卵形如图5-14所示，其中 n_1 是内部的折射率，n_2 是外部的折射率。

l_1 和 l_2 是两个焦点到椭圆面的一点的两条直线，l_3 是由交点出发，平行于坐标轴的直线。经 l_1 和 l_2 的光可以以任意长度 l_3 传播，只要满足下面的费马定律：

$$n_1 l_1 + n_2 l_3 = 常量 \tag{5-56}$$

另一方面，从椭圆的性质出发，如果右边的垂直直线是准线，有

$$l_2 = e l_3 \tag{5-57}$$

式中，e 是离心率。于是，可以得到

$$n_1 l_1 + n_2 \frac{l_2}{e} = 常量 \tag{5-58}$$

另一个椭圆的性质是

$$l_1 + l_2 = 常量 \tag{5-59}$$

但上式要成立仅当

$$n_1 = \frac{n_2}{e} \tag{5-60}$$

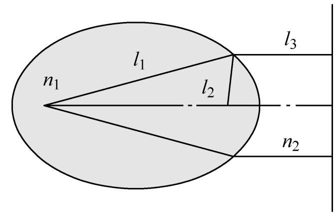


图 5-14　笛卡儿卵形

总之，只要内外折射率的比值等于椭圆的离心率，球差将不存在。当然，也可以这样认为，只要已知折射率，就能计算离心率。图 5-15 给出了四种笛卡儿卵形的结构。在最后两种情况，这个卵形是一个具有旋转对称的双曲面。

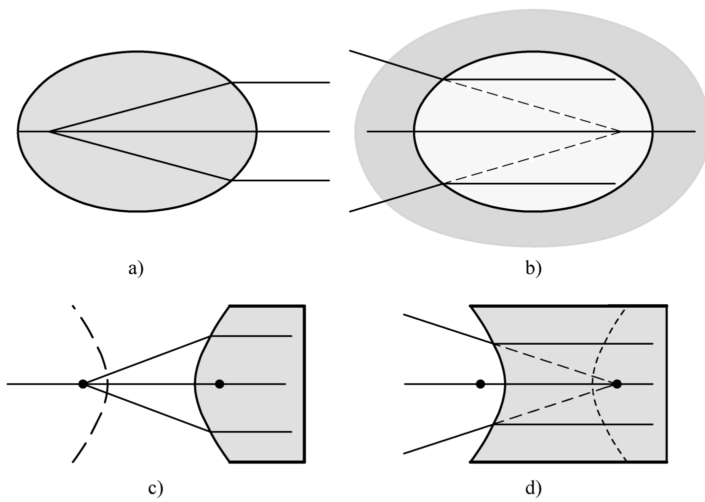


图 5-15　无球差椭球和双曲面

a）实体椭球　b）空心椭球　c）凸双曲面　d）凹双曲面

5.6　球差的多项式展开

5.2 节中引入了三阶或初级球差表达式。这些结果适用于相对较小的孔径，这样高阶项可以忽略。如果不是这样的话，需要考虑那些有更大光焦度光线高度描述术语。需要用到归一化距离

$$\rho = \frac{S}{S_{max}} \tag{5-61}$$

来表示出瞳处光线的高度。其中，$S^2 = X^2 + Y^2$。于是，可以将精确的轴向球差（不是初级的）LA_0 写成

$$LA_0 = a_0 + a_2\rho^2 + a_4\rho^4 + a_6\rho^6 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_{2i}\rho^{2i} \tag{5-62}$$

式中，常数项 a_0 是作为参考的近轴焦点的轴向位移，第二项 $a_2\rho^2$ 是三阶或初级轴向球差 $SphL$，第三项 $a_4\rho^4$ 是五阶或二级球差等，其余的项也是如此。

横向球差 TA_0 比轴向球差 LA_0 更适合表示球差。两者之间的关系由方程式（5-27）给出：

$$u'_k = -\frac{TA_0(\rho)}{LA_0(\rho)} = -\frac{\rho}{r_W} \tag{5-63}$$

式中，r_W 是单位参考球面波前曲率半径的归一化半径。通常，将这个曲率半径写成

$$r_W = \frac{l'_k - \overline{l'_k}}{S_{\max}} \tag{5-64}$$

于是，可以得到

$$TA_0(\rho) = b_1\rho + b_3\rho^3 + b_5\rho^5 + b_7\rho^7 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} b_{2i+1}\rho^{2i+1} \tag{5-65}$$

式中，$b_1\rho$ 是近轴光线在观察平面上的横向像差，第二项 $b_3\rho^3$ 是初级横向球差 $SphT$，

$$b_{2i+1} = \frac{a_{2i}}{r_W} \tag{5-66}$$

另一种得出像差多项式的有用方法是利用波前像差 $W(p)$，其定义为

$$W(\rho) = c_2\rho^2 + c_4\rho^4 + c_6\rho^6 + c_8\rho^8 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} c_{2i+2}\rho^{2i+2} \tag{5-67}$$

式中，系数 c_i 可以很容易被求得，不要将 c_i 误认为是本书其他部分提到的曲率值。

近轴光线焦点在观察平面的位移 Δf 为

$$\Delta f = a_0 = b_1 r_W = -2c_2 r_W^2 \tag{5-68}$$

在像差存在的情况下，光路径如图 5-16 所示。这些光线的包络叫作焦散曲线（cornejo 和 malacara，1978）。在图中存在几个有趣的焦点：①近轴焦点；②出瞳边界零波前偏差位置；③焦散曲线的腰；④边缘光线的焦点；⑤散焦曲线结束的位置。

假设仅存在初级球差，将式（5-66）和式（5-68）代入式（5-62），在相对于近轴焦点的焦点平移平面内的轴向球差为

$$LA_0(\rho) = b_1 r_W + b_3 r_W \rho^2 = b_1 r_W + SphL(\rho) \tag{5-69}$$

同一焦点平移量的横向球差为

$$TA_0(\rho) = b_1\rho + b_3\rho^3 = b_1\rho + SphT(\rho) \tag{5-70}$$

相对于曲率半径 r_W 的参考球面，出瞳面上的波前偏差为

$$W(\rho) = -\frac{b_1\rho^2}{2r_W} - \frac{b_3\rho^4}{4r_W} \tag{5-71}$$

在近轴焦点处不存在焦点的平移，即

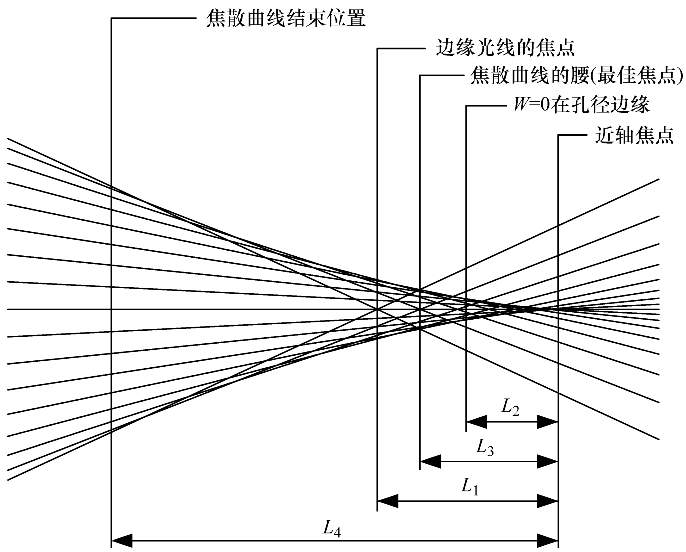


图 5-16　初级球差散焦

$$b_1 = 0 \tag{5-72}$$

因此，根据方程式（5-69）近轴焦点到边缘焦点的距离 L_1 为

$$L_1 = SphL(\rho_{max}) = -b_3 r_W \rho_{max}^2 \tag{5-73}$$

根据定义，这就是边缘球差。

根据方程式（5-71），为了获取出瞳边缘零波前偏差需要一个参考球面，计算这个参考球面曲率中心坐标位置的条件是

$$W(\rho_{max}) = b_1 + \frac{b_3 \rho_{max}^2}{2} = 0 \tag{5-74}$$

于是有

$$b_1 = -\frac{b_3 \rho_{max}^2}{2} \tag{5-75}$$

因此，根据方程式（5-69），近轴焦点到边缘零波前偏差坐标位置的距离为

$$L_2 = -LA_0(\rho_{max}) = \frac{b_3}{2} r_W \rho_{max}^2 = \frac{L_1}{2} \tag{5-76}$$

当最大的环状轴向球差大小等于边缘横向球差但符号相反时，可以得到散焦曲线的腰或最佳焦点位置。于是，在满足如下条件时可以得到最大环状像差 $\rho = \rho_z$ 的值

$$\frac{dTA_0(\rho)}{d\rho} = b_1 + 3b_3 \rho_z^2 = 0 \tag{5-77}$$

然后，得到散焦线的腰

$$b_1 \rho_z + b_3 \rho_z^3 = -(b_1 \rho_{max} + b_3 \rho_{max}^3) \tag{5-78}$$

然而通过方程式（5-77）替换掉 ρ_z 的值，有

$$b_1\rho_{\max}+b_3\rho_{\max}^3=-\frac{2b_1}{3}\left(-\frac{b_1}{3b_3}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5-79}$$

于是得到轴向焦点到集散曲线腰的距离为

$$L_3=-\frac{3b_3}{4}r_W\rho_{\max}^2=\frac{3L_1}{4} \tag{5-80}$$

最后，为了求焦散曲线结束的位置，利用条件 $TA(\rho)$（关于 ρ 的函数）在出瞳边缘的斜率为0，于是，有

$$\left[\frac{\mathrm{d}TA_0(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right]_{\rho=\rho_{\max}}=b_1+3b_3\rho_{\max}^2=0 \tag{5-81}$$

从而

$$b_1=-3b_3\rho_{\max}^2 \tag{5-82}$$

因此，再次使用方程式（5-69），近轴焦点到焦散曲线结束位置的距离为

$$L_4=-3b_3r_W\rho_{\max}^2=3L_1 \tag{5-83}$$

如图5-17a和图5-17b所示分别为波前畸变和几种焦点位置的横向球差。

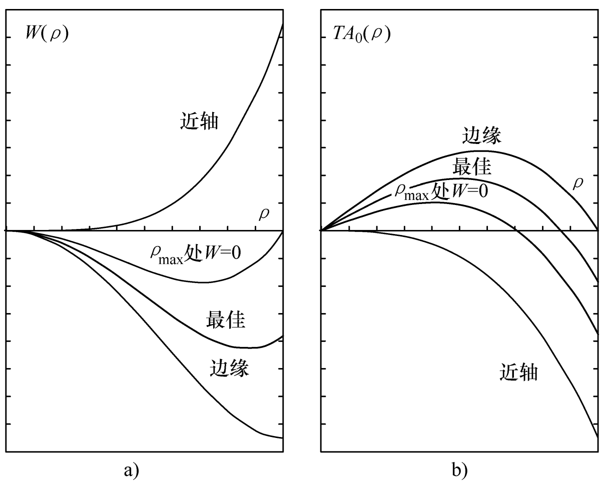


图5-17　横向球差

a）波前变形　b）一些焦散平面

注：这两个图的单位是不同尺度的。

5.7　高阶球差

高阶球差存在的两个原因如下：

1）因为高阶球差在折射面上与初级像差同时产生。通过精确像差方程式（5-20）减去初级球差方程式（5-52）可以计算得到高阶像差。

2）因为任何波前在移动过程中都将沿着轨迹不断地改变它的形状。如果忽略衍射的影响，球面或平面波前在空间传播过程中仍各自保持球面或平面。一个仅有初级球差的波前在传播过程中将产生高阶球差。

下面将详细介绍高阶球差出现的机理。图 5-18 描绘的是一个仅有初级球差的波前。为了描述它，定义

$$\eta = \frac{z}{r_W} \tag{5-84}$$

光通过平面 P_1 和 P_2 的高分别为 y_1 和 y_2，两者的关系为

$$y_2 = y_1(1-\eta) + TA\eta \tag{5-85}$$

式中，TA 是横向像差。如果横向像差存在仅由于 P_1 面上的初级球差，则横向球差写成

$$TA = a_3 y_1^3 \tag{5-86}$$

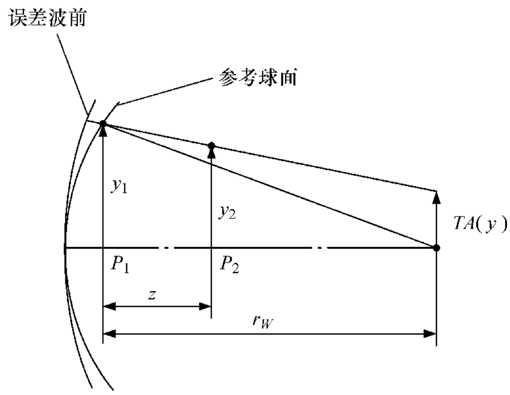


图 5-18　当边缘处像差是 0 时，横向和轴向球差达到最大值

然后，根据式（5-85）和式（5-86），可以近似地得到

$$y_1 = \frac{y_2}{1-\eta} - \frac{\eta a_3}{(1-\eta)^3} y_2^3 \tag{5-87}$$

因此，可以证明横向像差是关于平面 P_2 上光线高度的函数，近似地表示为

$$TA = \frac{a_3}{(1-\eta)^3} y_2^3 - \frac{3\eta a_3^2}{(1-\eta)^5} y_2^5 \tag{5-88}$$

第一项中的常量 $1/(1-\eta)^3$ 是由于波前直径较小带来的缩放因子。第二项是原来没有的，它表示波前由平面 P_1 传播至平面 P_2 带来的五阶球差。

在最后一节将介绍如何通过焦点平移将像平面置于散焦线的腰的位置实现像尺寸的最佳化。如果透镜仅有初级球差，这些都能够实现。然而，在设计透镜时，高阶球差并不能避免。于是，引入一些初级像差补偿（至少部分地）高阶像差可能是必要的。举一个关于三阶和五阶球差是怎样被结合提高像的质量的例子。假设引入五阶球差的目的是为了使边缘光线的轴向和横向球差为零。于是，得到

$$LA_0(\rho_{max}) = a_2\rho_{max}^2 + a_4\rho_{max}^4 = 0 \tag{5-89}$$

或

$$TA_0(\rho_{max}) = b_3\rho_{max}^3 + b_5\rho_{max}^5 = 0 \tag{5-90}$$

使用这个条件，如图 5-19 所示，当轴向像差和横向像差分别取如下值的时候，ρ 的值分别如下：

$$\rho_{maxLA} = \frac{\rho_{max}}{\sqrt{2}} = 0.707\rho_{max} \tag{5-91}$$

和

$$\rho_{maxTA} = \sqrt{\frac{3}{5}}\rho_{max} = 0.775\rho_{max} \tag{5-92}$$

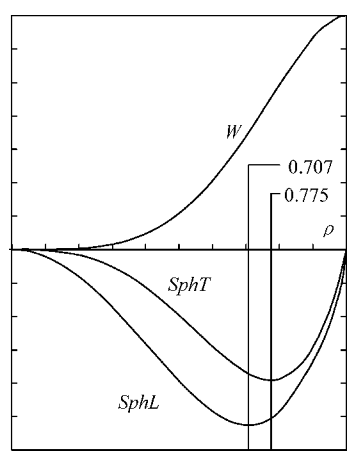


图 5-19　沿着传播路径的波前变化

5.8 用梯度折射率校正球差

在本章中已经介绍，如果一个单透镜由同一种玻璃制造，它的球差并不能被修正。如图5-6所示，即使是最佳的形状，仍有残留的像差。如果物在无穷远，最佳形状几乎是一个背面是平面的平凸镜。根据式（5-35），残留的球差为

$$\begin{aligned} SphT &= -\frac{y^3}{f^2(n-1)^3}(G_1 - G_2 + G_4) \\ &= \frac{y^3}{2f^2(n-1)^2}\left(n^2 - 2n + \frac{2}{n}\right) \end{aligned} \tag{5-93}$$

在直径为 D 的透镜边缘的最大值为

$$SphT_{\max} = \frac{D^3}{16f^2(n-1)^2}\left(n^2 - 2n + \frac{2}{n}\right) \tag{5-94}$$

这种球差只有用具有轴向梯度折射率的透镜（如 Moore 所述，1977）的球面来修正。沿光轴的梯度折射率可以表示为

$$n(z) = N_{00} + N_{01}z + N_{00}z^2 + \cdots \tag{5-95}$$

式中，N_{00}是透镜第一个面上顶点 A 的折射率，如图5-20所示。对于这个透镜，近轴焦距大于边缘焦距。因此，为修正球差，透镜中心的折射率必须大于边缘的折射率。图5-20给出了一个轴向梯度变化的透镜。用式（5-90）的线性近似可以获得一个好的修正方法。凸面上的梯度折射率等于该面的矢量 z_0。于是，使用式（5-92）有

$$n(z_0) = n = N_{00} + N_{01}z_0 \tag{5-96}$$

根据这个梯度，光线通过透镜边缘的折射率等于一个常量 n，当光通过光轴时，折射率由点 A 到点 B 线性减少，直到值 n。由于梯度折射率的存在将产生作用，近轴光线的光路径将变大，但边缘光线的光路径不受影响。由梯度折射率带来的不同光路径 OPD 为

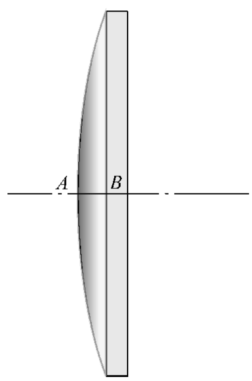


图5-20　无球差的轴向梯度折射率透镜

$$OPD(y) = -\frac{N_1 z}{2} = -\frac{N_1 y^4}{8f^2(n-1)} \tag{5-97}$$

式中，z 是透镜上高为 y 处的矢量。因此，球差 $SphT$ 为

$$SphT = -f\frac{\mathrm{d}OPD}{\mathrm{d}y} = \frac{N_1 y^3}{2f(n-1)^2} \tag{5-98}$$

在直径为 D 的透镜边缘的球差最大值为

$$SphT_{\max} = \frac{N_1 D^3}{16f(n-1)^2} \tag{5-99}$$

使用大小合适的梯度折射率，球差可能被校正。然后，使方程式（5-94）和式

(5-99)相等，设 $n(z_0)=1.5$，沿光轴由 A 点到 B 点折射率的改变量 Δn 由下式给出

$$\Delta n = N_{01}z_0 = \frac{n^2-2n+2/n}{8(n-1)}\frac{1}{(f/D)^2} = \frac{0.15}{(f/D)^2} \qquad (5\text{-}100)$$

式中，(f/D) 是透镜的 f 数。因此，对一个 $f/4$ 的透镜 Δn 的改变量为 0.0094，然而对一个 $f/1$ 的透镜的改变量为 0.15。

在 Kingslake 和 Johnson 写的书中 R. BarryJohnon 提出了一些关于平衡像差的实际有趣的建议。他指出对望远镜、显微镜、投影透镜和其他可视系统，边缘球差不该过度校正以减少带像差，因为这会产生让人讨厌的模糊像。相反，轻微的校正获得了最好的对比度。然而，对摄影用的物镜，应该矫枉过正以减少带像差，原因是由此产生的模糊不易被记录。

参考文献

[1] Conrady, A. E., *Applied Optics and Optical Design*, Dover Publications, New York (1957).

[2] Cornejo, A. and Malacara, D., "Caustic Coordinates in Platzeck – Gaviola Test of Conic Mirrors," *Appl. Opt.*, **17**, 18 – 19 (1978).

[3] Delano, E., "A General Contribution Formula for Tangential Rays," *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, 631 – 633 (1952).

[4] Fischer, R. E. and Mason, K. L., "Spherical Aberration—Some Fascinating Observations," *Proc. SPIE*, **766**, 53 – 60 (1987).

[5] Kingslake, R., *Lens Design Fundamentals*, Academic Press, New York (1978).

[6] Kingslake, R. and Johnson, R. B., *Lens Design Fundamentals*, 2nd Ed., SPIE Press, Bellingham, WA (2010).

[7] Moore, D. T., "Design of a Single Element Gradient – Index Collimator," *J. Opt. Soc. Am.*, **67**, 1137 – 1143 (1977).

[8] Toraldo Di Francia, G., "On the Image Sharpness in the Central Field of a System Presenting Third – and Fifth – Order Spherical Aberration," *J. Opt. Soc. Am.*, **43**, 827 – 835 (1953).

第 6 章　单色轴外像差

6.1　介绍

球差影响透镜所有视场的成像，包括光轴及其邻近区域。也有一些成像缺陷和像差只影响轴外像点。离轴距离越大，像差越大。本章中，我们会讲解这些在 19 世纪 50 年代由 Ludwig Von Seidel 最早提出的像差。因此，初级像差或三阶像差被称为塞德尔像差。

对这个领域有重要贡献者很多，不可能在此一一列举。关于初级像差最全面的研究应该是 A. E. Conrady 在 20 世纪 30 年代所做的工作。强烈建议读者查阅 Conrady（1957，1960）和 Kingslake（1965，1978）本学科的经典参考文献。想了解得更深入，推荐学习 Buchdahl（1948，1954，1956，1958a，1958b，1958c，1959，1960a，1960b，1960c，1961，1962a，1962b，1965，1970）关于高阶像差的重要文献。还有很多在本方面的重要工作由许多其他作者完成，例如：Cruickshank 和 Hills（1960），Focke（1965），Herzberger 和 Marchand（1952，1954），Hopkins 和 Hanau（1962），Hopkins 等（1955），以及许多其他在本章参考目录中所罗列的研究者。虽然，普遍认为像差系数的导出归功于 Ludwig Von Seidel，但是 Rakich（2007）指出，有证据显示其他研究者，如 Joseph Petzval，也建立了这样的像差理论。1905 年 Karl Schwarzschild 里程碑似的工作将像差理论发展到五阶。Rosendahl（1967）指明，过去有很多不同做法被用来推导像差系数。

本章，我们将研究共轴光学系统的轴外像差。这种系统具有共同的光轴，每个光学面的曲率中心都位于光轴上。然而，有些光学系统的光学面是倾斜的，或沿垂直光轴方向平移，因而产生了 Epstein（1949）和 Ruben（1964）描述的像差。

位于本书最后的附录 A 是对本章内容的补充——附录定义了本章使用的大多数代数符号。四个轴外单色像差分别是：佩兹伐场曲、彗差、像散和畸变。本章对它们进行细致的讨论。在开始这些内容前，我们必须先介绍一些基础概念。

6.1.1　轴外像差介绍

在本章中，我们将详细讨论轴外单色像差。为了帮助读者理解它们，介绍一些它们产生的基本概念是很有好处的。让我们看看图 6-1，一个入瞳孔径很小的光学面，在光轴上形成了无球差像点 W。由于孔径足够小，彗差（将在后续过程中学习到）也是不存在的。

轴外点物的像位于沿着通过曲率中心的辅助轴，朝向物的窄光束会聚的地方。折射后，由于系统关于辅助轴旋转对称。光线会聚于像点 P，得到一个无像差的像。点 P 并

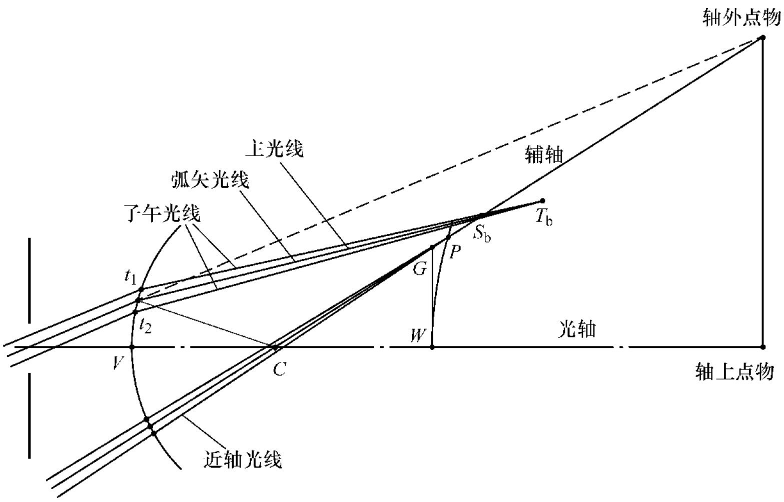


图 6-1　折射球面中的点和光线，阐明像的形成

不位于包含点 W 的像平面。这导致一个弯曲的像面，称为佩兹伐面。轴上像点 W 所在像平面与辅助轴的交点 G 被称为第一阶像或高斯像。

通过入瞳的光束，向轴外物点会聚。但要注意，关于该光束，光线系统不具有旋转对称性。因为孔径很小，唯一的影响是折射波面的形状类似于轮胎面，弧矢面和子午面的曲率半径不相同。这导致，弧矢光线会聚于细光束弧矢像 S_b，子午光线会聚于细光束子午像 T_b，两者都在主光线上。由于弧矢光线对称于辅助轴，细光束弧矢像同时也位于辅助轴上。弧矢像和子午像的分离，称为像散。

6.1.2　倾斜光线

由轴外物点发出，不处于子午平面的这些光线，常称为倾斜光线。一种特别重要的倾斜光线就是弧矢光线。让我们看一看图 6-2，了解倾斜弧矢光线是如何传播的。

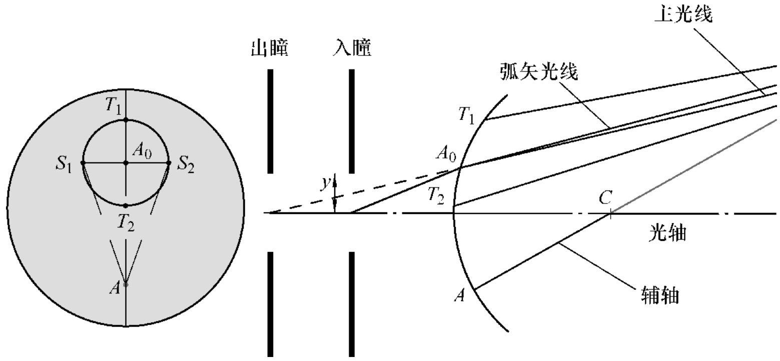


图 6-2　子午和弧矢光线在单折射球面上折射

主光线通过半径为 y 的光瞳中心，在光学面上发生折射。由定义可知，辅助轴 AC 为通过轴外物点和折射面曲率中心的直线。因光学面为球面，系统关于辅助轴旋转对

称。追迹从物点发出的子午近轴光线，几乎平行于辅助轴，它的像也是位于辅助轴上，位于点 P，如图6-3所示。出瞳不在折射面上，而是在它的左边，所以主光线 A_0U 入射到折射面上的 A_0点。子午光线 T_1T 经过光瞳上的 T_1，子午光线 T_2T 经过光瞳上的 T_2，与辅助轴相交，由于球差的原因，交点不是交于一点 P，而是交于两点 B_1 和 B_2。过 T_1 的光线比过 T_2的光线球差更大，它们相交于点 T。称为子午焦点。

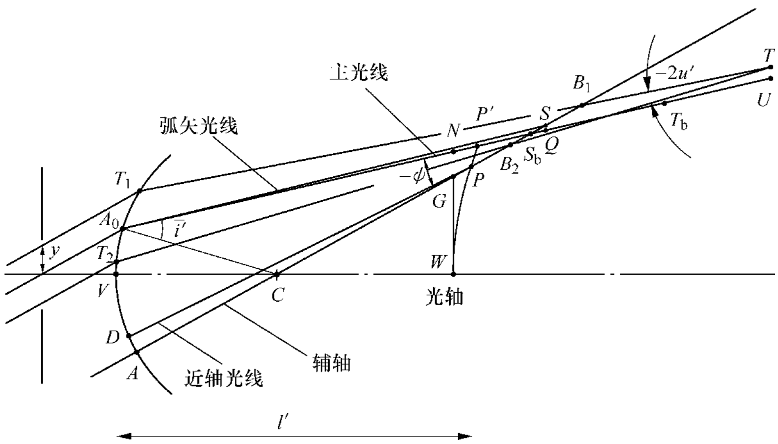


图6-3　描述初级像差形成的一些点和光线（有彩色插图）

两条弧矢光线通过入瞳，S_1S 经过 S_1，S_2S 经过 S_2，在辅助轴上的截距 AS_1 和 AS_2 相同；因此，发生折射后，它们相交于辅助轴上的点 S。

在图6-2和图6-3中，我们要知道的参考点：

W：轴上物点的近轴像（轴上高斯像）。

G：位于辅助轴上，W 正上方的点（轴外第一阶像或高斯像）。

P：佩兹伐第一阶像。

P'：主光线与佩兹伐面的交点。

N：位于主光线上，G 正上方的点。

S：边缘弧矢像，位于边缘弧矢光线与辅助轴的交点。

S_b：细光束弧矢像，位于主光线和辅助轴的交点。

Q：位于主光线上，S 正上方的点。

B_1：上子午光线与辅助轴的交点。

B_2：下子午光线与辅助轴的交点。

T：边缘子午焦点，上、下边缘子午光线交点。

T_b：细光束子午焦点，位于主光线上。

U：位于主光线上，T 正上方的点。在没有彗差，考虑球差的情形下，它是边缘子午焦点。

V：光学面的顶点。

让我们假设，入瞳向光学面移动；这样一来，位于光学面上轴外物点光束经过的点

A_0，朝向辅助轴上的点 A，在光学面上向下移动。直到主光线重合于辅助轴，弧矢和子午焦点也随之移动，它们都重合到佩兹伐焦点。换句话说，像散消失了。你会很高兴地注意到，所有到细光束焦点都位于主轴上，同时两个弧矢像（细光束和边缘）都在辅助轴上。

关于主光线，图 6-3 中主光轴和辅助轴间的夹角 ψ 与角度 $\overline{i'}$ 是相关的，根据式（1-39），认为 u' 等于 ψ，得到

$$-\frac{\psi}{r}=\frac{\overline{i}}{l'-r} \tag{6-1}$$

而对于子午光线，角 u' 是关于角 i' 的函数，用同样表达式［式（1-39）］，得到

$$-\frac{u'}{r}=\frac{i'}{l'-r} \tag{6-2}$$

于是得到

$$\psi=\left(\frac{\overline{i'}}{i'}\right)u'=\left(\frac{\overline{i}}{i}\right)u' \tag{6-3}$$

式中，最后一项是运用斯涅尔定律得到的。从另一方面看，很容易运用一阶近似，将其写为

$$\psi=-\frac{\overline{AA_0}}{l'}=\frac{\overline{AA_0}}{y}u' \tag{6-4}$$

这样一来，

$$\overline{AA_0}=\psi\,\frac{y}{u'}=\left(\frac{\overline{i}}{i}\right)y \tag{6-5}$$

这是一个有用的关系，我们将在后面用到。

在图 6-3 中，所有我们讨论的光线，都来自一个轴外物点，并且它们全部都如图 6-4所示，与辅助轴相交于某些点。以点 P 作为基准点时，交点的位置可以运用球差表达式 $SphL$ 计算出。于是，对于图 6-2 和图 6-3 中的每条光线，我们可以写为：

1）关于主光线：

$$\overline{PS_b}=a(\overline{AA_0})^2 \tag{6-6}$$

但是，运用式（6-5）：

$$\overline{PS_b}=ay^2\left(\frac{\overline{i}}{i}\right)^2=SphL\left(\frac{\overline{i}}{i}\right)^2 \tag{6-7}$$

2）关于通过 S_1 和 S_2 的边缘弧矢光线：

$$\overline{PS}=a(\overline{AS_2})^2=a(\overline{AA_0})^2+a(\overline{A_0S_2})^2=\overline{PS_b}+\overline{S_bS} \tag{6-8}$$

于是，我们看到：

$$\overline{S_bS}=ay^2=SphL \tag{6-9}$$

因为 $\overline{S_bS}$ 随着 y 的值减小而减小，我们可以知道，对于通过 S'_1 和 S'_2 的细光束弧矢光线，$\overline{S_bS}$ 的值近似等于 0。如此一来，细光束弧矢焦点与点 S_b 重合。

3）对于通过 T_1 的上边缘子午光线：

$$\begin{aligned}\overline{PB_1} &= a(\overline{AT_1})^2 = a(\overline{AA_0}+\overline{A_0T_0})^2 \\ &= a(\overline{AA_0})^2 + a(\overline{A_0T_0})^2 + 2a(\overline{AA_0})y \\ &= \overline{PS_b} + \overline{S_bS} + \overline{SB_1}\end{aligned} \tag{6-10}$$

4）对于通过 T_2 的下边缘子午光线：

$$\begin{aligned}\overline{PB_2} &= a(\overline{AT_2})^2 = a(\overline{AA_0}-\overline{A_0T_2})^2 \\ &= a(\overline{AA_0})^2 + a(\overline{A_0T_2})^2 - 2a(\overline{AA_0})y \\ &= \overline{PS_b} + \overline{S_bS} - \overline{SB_2}\end{aligned} \tag{6-11}$$

于是，

$$\overline{SB_1} = -\overline{SB_2} = 2a(\overline{AA_0})y \tag{6-12}$$

考虑式（6-9）

$$\overline{B_1B_2} = 4a(\overline{AA_0})y = \frac{4SphL(\overline{AA_0})}{y} \tag{6-13}$$

这个结果表明：$\overline{B_1B_2}$部分的长度直接与 y 的值成比例，意味着在一阶近似情况下，子午像的位置是不随 y 的值改变。即，边缘子午焦点和细光束子午焦点，是由通过T_1'和T_2'的光线形成的，是同一个点 T。现在，运用式（6-5），得到

$$\overline{B_1B_2} = 4SphL\left(\frac{\bar{i}}{i}\right) \tag{6-14}$$

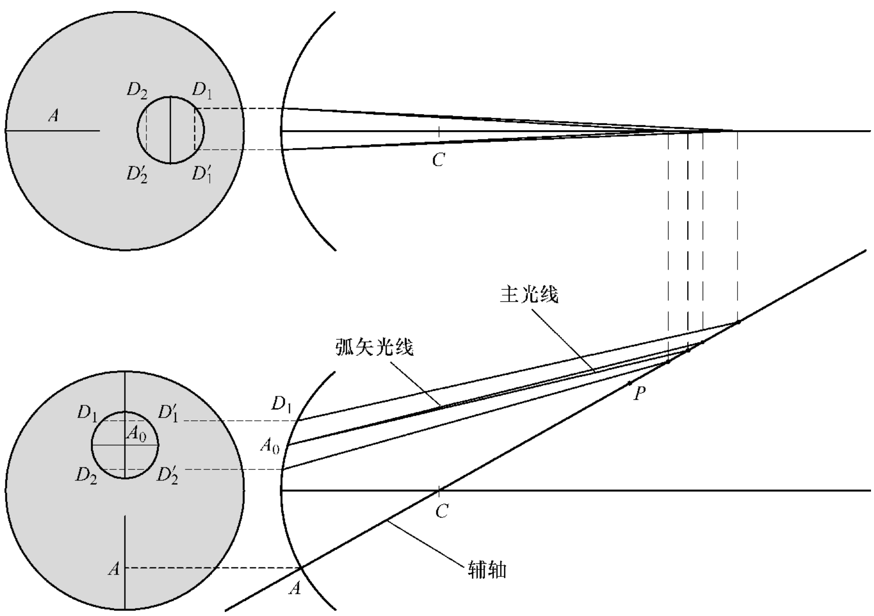


图 6-4　单球面上折射光学的上视图和侧视图

6.1.3　轴外像差定义

在前文讨论的基础上，我们可以定义如下单个球面的初级像差：

初级球差 = $SphL=\overline{S_bS}$。根据式（6-9），这个长度等于高度 y 边缘光线的轴上球差。

弧矢彗差 = $Coma_S=\overline{SQ}$。它是从边缘弧矢像到主光线的垂轴距离。对于细光束，其值为 0。当然，这类像差是仅针对边缘光线的。

子午彗差 = $Coma_T=\overline{TU}$。它是从边缘子午像到主光线的垂轴距离。

弧矢轴向像散 = $AstL_S=\overline{P'S_b}$。如果光瞳半径 y 减小，根据式（6-9），弧矢焦点 S 将靠近点 S_b。其中，S_b 是细光束弧矢焦点。弧矢轴向像散定义为：从细光束弧矢焦点到佩兹伐像面的轴向距离。

子午轴向像散 = $AstL_T=\overline{P'T}$。从式（6-13），我们可以看到，距离 B_1B_2 随 y 线性增加。这样可以知道，在一阶近似下，边缘子午焦点 T 与细光束子午焦点 T_p 在同一位置。故子午轴向像散定义为：从细光束子午焦点到 T_p 到佩兹伐像面的轴向距离。

佩兹伐场曲 = $Ptz=\overline{GP}$。这表示，从佩兹伐焦点到轴外物点所成的理想像点 G 的轴向距离。点 G 与轴上物点理想像 W 在同一平面上。

畸变 = $Dist=\overline{GN}$。它是从理想轴外像点 G 到主光线的垂轴距离。

可以看到，所有初级像差的出现，都是由于球差的存在。基于这个结论，我们准备去研究这些首先由 Seidel 提出的像差。

6.2　佩兹伐场曲

为了确定佩兹伐场曲，我们要分析一种没有像散的光学情况。我们之前看到过，当物发出的光束很窄，并且沿着辅助轴传播时，这种情况会出现。让我们考虑图 6-5 中的折射球面，其中有一个折射球面和一个辅助轴。如果孔径足够小，其他的初级像差可以忽略掉，W 的像点是在光轴上的点 W'。圆 C_1 和圆 C_2 与折射面共心。入射光束通过绕着曲率中心旋转，成为轴外光束，同时保持了球面对称性。然后，因为对于点 C 球面对称，圆 C_1 上点 A 的像点位于圆 C_2 上点 A'。B 的像点在 P 处。距离 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'P}$ 之间，通过系

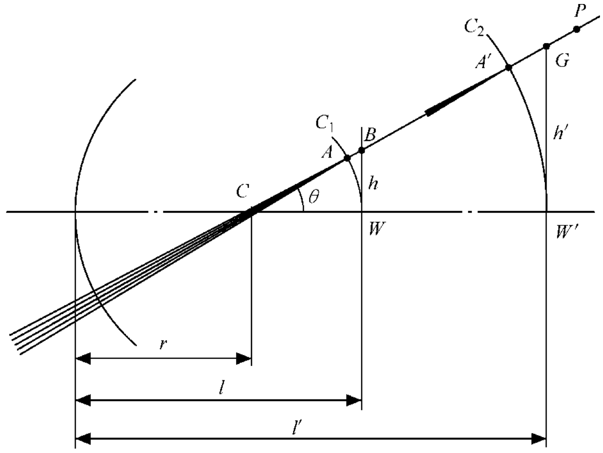


图 6-5　佩兹伐定理示意图

统轴向放大倍率相联系：

$$\overline{A'P} = \bar{m}\,\overline{AB} \tag{6-15}$$

假设视场很小（角 θ 很小），我们近似位矢 AB 为

$$\overline{AB} = \frac{h^2}{2(l-r)} \tag{6-16}$$

类似地：

$$\overline{A'G} = \frac{h'^2}{2(l'-r)} \tag{6-17}$$

从图6-5中看出，距离$\overline{GP}$为

$$\overline{GP} = \overline{A'P} - \overline{A'G} \tag{6-18}$$

然后运用式（6-15）~式（6-17），得到

$$\overline{GP} = \frac{h^2}{2(l-r)}\bar{m} - \frac{h'^2}{2(l'-r)} \tag{6-19}$$

而轴向放大率，可以表示为

$$\bar{m} = \frac{n'h'^2}{nh^2} \tag{6-20}$$

因而可以得到

$$\overline{GP} = \frac{n'h'^2}{2n(l-r)} - \frac{h'^2}{2(l'-r)} \tag{6-21}$$

另外，根据式（1-38）~式（1-41），我们可以得到

$$\frac{n'-n}{r} = \frac{n}{l'-r} - \frac{n'}{l-r} \tag{6-22}$$

得到

$$Ptz = \overline{GP} = -\frac{h'^2}{2}\left(\frac{n'-n}{nr}\right) \tag{6-23}$$

式（6-23）给出了佩兹伐场曲。这是在不存在像散时，单个折射面的场曲。有 k 个面的共轴系统，我们需要把各个面的贡献相加起来。正如我们研究球差时的情况，第 j 面对最终轴向偏移的贡献是等于，偏移距离$\overline{GP}$乘上该面之后那部分系统的轴向放大率$\overline{m_j}$。该球面之后那部分系统的轴向放大率可表示为

$$\bar{m} = \frac{n'_k h'^2_k}{n'h'^2} \tag{6-24}$$

因此，佩兹伐场曲贡献写为

$$PtzC = \bar{m}\,\overline{GP} \tag{6-25}$$

进一步写为

$$PtzC = -\frac{h'^2_k n'_k}{2}\left(\frac{n'-n}{nn'r}\right) \tag{6-26}$$

这就是焦平面的弯曲矢高。而曲面的曲率半径可写为

$$\frac{1}{r_{ptz}} = -n'_k \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{n'-n}{nn'r}\right) \tag{6-27}$$

这称为**佩兹伐定理**，并且定义的焦平面称为**佩兹伐面**。

对应薄透镜的特殊情况，运用式（2-8），我们会发现

$$\frac{1}{r_{ptz}} = -\frac{1}{nf} = -\frac{p}{n} \tag{6-28}$$

因而，由多个薄透镜组成，不论透镜间距如何的光学系统满足：

$$\frac{1}{r_{ptz}} = -\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{nf} = -\sum_{i=1}^{k}\frac{P_i}{n_i} \tag{6-29}$$

之后可以得到，在三阶近似的情况下，佩兹伐面是球面，其曲率半径与组成系统的透镜光焦度除以玻璃折射率的值的代数和成比例。如果用一个平面去测量所成的像，轴上像是聚焦于该平面的，那么轴外像将是离焦的，离焦量（像尺寸）将随像高成平方关系增加。有趣的是，佩兹伐场曲不随物的轴上位置变化而变化。换句话说，对不同的共轭物像，佩兹伐曲面是不变的。一些研究者已经说明如何去控制佩兹伐场曲，如 Wallin（1951）。

6.3 彗差

在本节，我们将说明如何计算光学系统的彗差和各个面的彗差贡献。

6.3.1 反正弦条件

这样一来，让我们考虑如图 6-6 所示的光学系统。边缘弧矢像是在主光线上方的点 S。细光束弧矢像是在主光线上，它的高度 h'_k 由拉格朗日定理计算。边缘弧矢像 H'_{Sk} 则用正弦定理来计算。弧矢彗差的产生是因为对细光束弧矢光线和边缘弧矢光线的垂轴放大率不同。除此之外，由于球差的存在，这两个像位于不同的平面上。完整共轴光学系统的初级弧矢彗差，记作 $Coma_{STotal}$，被定义为从边缘弧矢焦点到主光线的垂轴距离 $\overline{SQ}$。这样，

$$Coma_{STotal} = \overline{SQ} = H'_{Sk} - \overline{QM} \tag{6-30}$$

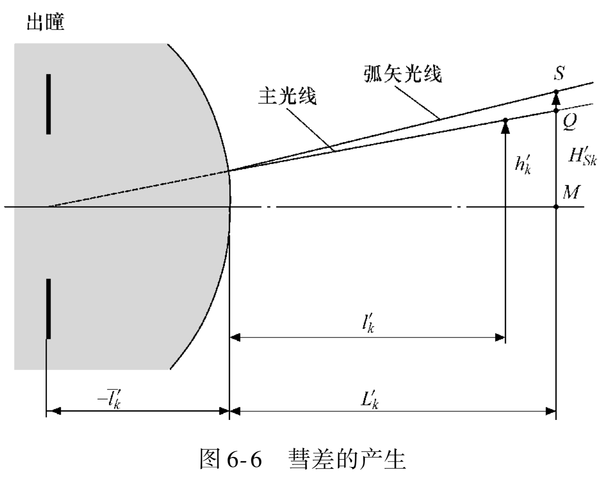


图 6-6 彗差的产生

当弧矢焦点位于主光线的上方时，$Coma_{STotal}$的值为正。为了去评估弧矢彗差，让我们首先定义如下系数 OSC（反正弦条件）：

$$OSC=\frac{H'_{Sk}}{\overline{QM}}-1 \tag{6-31}$$

如此一来，初级彗差可以表示为（假设$\overline{QM}\sim h'_k$）

$$Coma_{STotal}=OSCh'_k \tag{6-32}$$

因此对给定的系统，OSC 为常数。可知一个重要结论，$Coma_S$ 像差随像高线性增加。

现在，QM 的值与位于近轴焦面的初级像高 h'_k相关：

$$\overline{QM}=\frac{L'_k-\overline{l'_k}}{l'_k-\overline{l'_k}}h'_k \tag{6-33}$$

因此，OSC 写为

$$OSC=\left(\frac{l'_k-\overline{l'_k}}{L'_k-\overline{l'_k}}\right)\frac{H'_{Sk}}{h'_k}-1 \tag{6-34}$$

如果物没有彗差，我们得到 $h_{S1}=h_1$；然后运用拉格朗日定理和光学正弦定理，我们发现：

$$OSC=\left(\frac{l'_k-\overline{l'_k}}{L'_k-\overline{l'_k}}\right)\frac{h_{S1}u'_k\sin U_1}{h_1u_1\sin U'_k}-1 \tag{6-35}$$

另一种表示方式：

$$OSC=\left(\frac{l'_k-\overline{l'_k}}{L'_k-\overline{l'_k}}\right)\frac{M}{m}-1=\left(\frac{l'_k-\overline{l'_k}}{L'_k-\overline{l'_k}}\right)\frac{u'_k\sin U_1}{u_1\sin U'_k}-1 \tag{6-36}$$

式中，m 和 M 分别是近轴和边缘成像倍率。用球差项来表示，OSC 可以写为

$$OSC=\left(1-\frac{SphL}{L'_k-\overline{l'_k}}\right)\frac{M}{m}-1 \tag{6-37}$$

很容易看出，在没有球差时，如果主面不是平面而是球心位于焦点的球面，彗差不存在。对有限物距的情况，OSC 也可以用下式计算

$$\begin{aligned}OSC&=\left(\frac{l'_k-\overline{l'_k}}{L'_k-\overline{l'_k}}\right)\frac{F_M}{F}-1\\&=\left(\frac{l'_k-\overline{l'_k}}{L'_k-\overline{l'_k}}\right)\frac{Yu'_k}{y\sin U'_k}-1\end{aligned} \tag{6-38}$$

式中，F_M和 F 分别是边缘（对应入射光线高度 Y）和近轴（对应入射光线高度 y）的沿着光线折射方向的焦距，如图 6-7 所示。

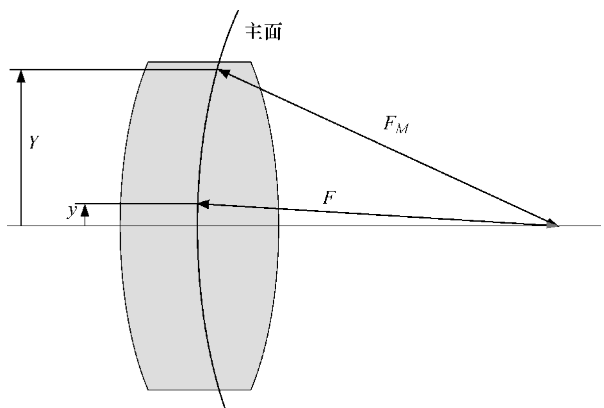


图 6-7　无球差和彗差的系统主面

6.3.2　每个面的彗差贡献

我们已经推导出，计算光学系统最终初级彗差的表达式。然而，我们还不知道系统中每个面的彗差贡献。有好几个可能的方法计算这些贡献值。一个方法是运用整个系统的计算方法，去计算只有一个面的系统。一旦单个面的像差确定了，它对多个面系统的贡献值，可以通过乘上该面之后系统的倍率得到。垂轴倍率用于垂轴像差，轴向倍率用于轴向像差。

图 6-8 中，单个面的弧矢彗差被定义为距离 SQ，表达式写为

$$Coma_S = \overline{SQ} = -S_b S\psi \tag{6-39}$$

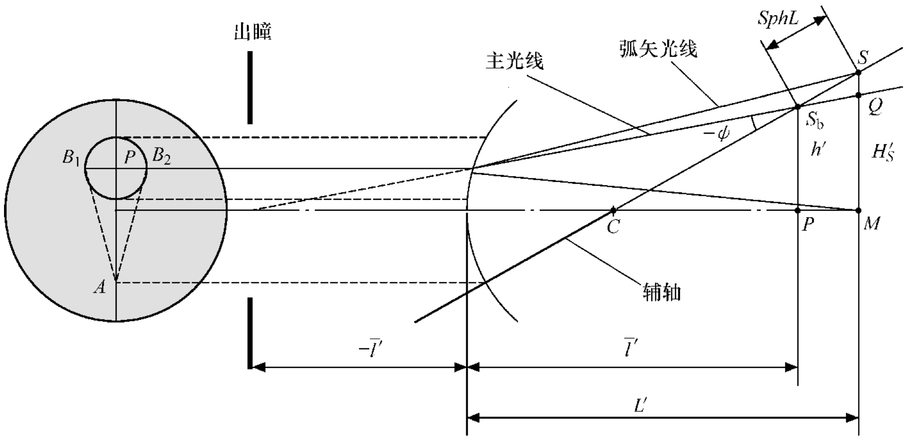


图 6-8　解释彗差形成的一些光线

并用式（6-3）和球差定义式 $SphL = S_b S$，

$$Coma_S = -SphL\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)u' = SphT\left(\frac{\bar{i}}{i}\right) \tag{6-40}$$

或者式子两边同时乘上该面之后的系统垂轴倍率，我们得到该光学面对系统全部彗差的贡献：

$$Coma_S C = SphTC\left(\frac{\bar{i}}{i}\right) \tag{6-41}$$

再或者运用式（5-32）中定义的 σ：

$$Coma_S C = \sigma i\,\bar{i} \tag{6-42}$$

Conrady（1957）指出，如图 6-3 所示，在经过一些几何变换，得到

$$Coma_T = 3SphT\left(\frac{\bar{i}}{i}\right) \tag{6-43}$$

或

$$Coma_T = 3Coma_S \tag{6-44}$$

6.3.3　单个薄透镜的彗差

对任意物距，任意透镜弯曲，而光阑在透镜处的单片薄透镜，其初级或三阶彗差可

以用 Conrady（1957）给出的表达式：

$$Coma_{S\text{Total}} = h'_k y^2 \left(\frac{1}{4} G_5 \kappa c_1 - G_7 \kappa v_1 - G_8 c^2 \right) \tag{6-45}$$

式中，函数 G_5 在第4章中已经定义了，函数 G_7、G_8 被定义为

$$G_7 = \frac{(2n+1)(n-1)}{2n}; G_8 = \frac{n(n-1)}{2} \tag{6-46}$$

图6-9中展示了像差作为曲率 c_1 的函数曲线。当光阑在透镜上时，合适弯曲形式的透镜，彗差可以减小到0，同时该形式透镜的球差也达到最小值。如果透镜具有很大的球差，彗差仅能通过相对于透镜平移光阑的方法校正。

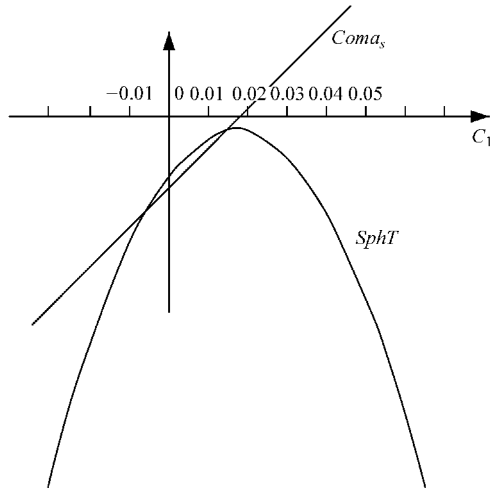


图6-9　垂轴球差和彗差随透镜前表面曲率的相对变化值

6.4　像散

如图6-3所示，初级或三阶轴向弧矢像散定义为从佩兹伐面到弧矢（细光束）像面的距离。类似，轴向子午像散，是指从佩兹伐面到子午像面的距离。当弧矢焦点比佩兹伐焦点距光学面更远时，像散值为正。这样，单折射球面的弧矢轴向像散写为

$$AstL_S = \overline{P'S_b} \approx \overline{PS_b} \tag{6-47}$$

然而，运用式（6-7）和式（6-9），

$$\overline{PS_b} = \overline{S_b S} \left(\frac{\bar{i}}{i} \right)^2 \tag{6-48}$$

这样，轴向弧矢像散变为

$$AstL_S = SphL \left(\frac{\bar{i}}{i} \right)^2 \tag{6-49}$$

如果我们看看式（6-3），我们可以容易地得到一个结论，像散随着角 ψ 的二次方增加，如图6-8所示。在另一方面，角度的大小，取决于出瞳的位置和像高。对于给定的光阑固定的光学系统，当角 ψ 的值很小，角 ψ 随像高近似线性变化。这表明像散随像高二次方增加。

现在，在式（6-49）两边乘上 u'_k，我们得到

$$AstT_S = SphT \left(\frac{\bar{i}}{i} \right)^2 \tag{6-50}$$

这是单球面的垂轴弧矢像散。对于有几个面的系统，单个面对系统最终像散的贡献是，该面的像散乘上该面之后的部分系统的轴向放大率。于是，在式（6-49）两边乘

上放大率，得

$$AstL_S C = SphLC \left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^2 \tag{6-51}$$

类似的方法，对垂轴弧矢像散的贡献是

$$AstT_S C = SphTC \left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^2 = \sigma\ \bar{i}^2 \tag{6-52}$$

图 6-3 中也展示了子午像散。用一阶近似，容易看出

$$\overline{ST} = \frac{B_1 B_2}{2u'}\psi \tag{6-53}$$

然后，运用式（6-3）和式（6-14），我们发现

$$\overline{ST} = 2SphL \left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^2 \tag{6-54}$$

初级子午像散$\overline{P'T}$很容易写为

$$AstL_T = 3SphT \left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^2 \tag{6-55}$$

总结，由于彗差的缘故，初级子午像散和初级弧矢像散之间存在 3 倍关系，如下所示：

$$AstL_T = 3AstL_S \tag{6-56}$$

如果物体在物平面上移动，那么弧矢像在弧矢面上移动，子午像在子午像面移动。因为像散随像高的平方增加，如果视场相对较小，弧矢像面和子午像面近乎为球面。如果用任何方法，例如移动光阑位置，使像散的大小发生变化，然后弧矢和子午像面变得接近或分离，但保持 1∶3 的关系。它们只重合在一个面，即佩兹伐面。

随着光线传播，不同的观察面会生成不同形状的像。图 6-21 中，在焦点前后，像是椭圆的，但方向不同，这些将在本章接下来的部分中说明。

6.4.1　Coddington 方程

普遍认为 Henry Coddingtong 于 1829 年在伦敦，推导出两个方程，确定了单个折射面细光束弧矢和子午像的位置。并且，Kingslake（1994）说明了 17 世纪以来，它们如此著名的原因。这两个方程，与高斯方程十分相似，可以看作它的衍生式。存在好几种可能的方式可以推导这两个方程，而在此，我们选取了 Kingslake（1978）的方法。另一种推导方式，由波像差得到，是在本书的第 7 章。

6.4.1.1　子午像

让我们看看图 6-10，一个折射球面，两条从物点 B 发出，在点 P 附近折射的非常靠近主光线的子午光线。这两条光线分别发生折射并会聚到子午像点 B_T。为了确定会聚点的位置，我们首先定义中心角 $\theta = \bar{U} + \bar{I}$，求微分得

$$d\theta = d\bar{U} + d\bar{I} \tag{6-57}$$

物点 B 到点 P 的距离是 t。小线段$\overline{PQ}$为

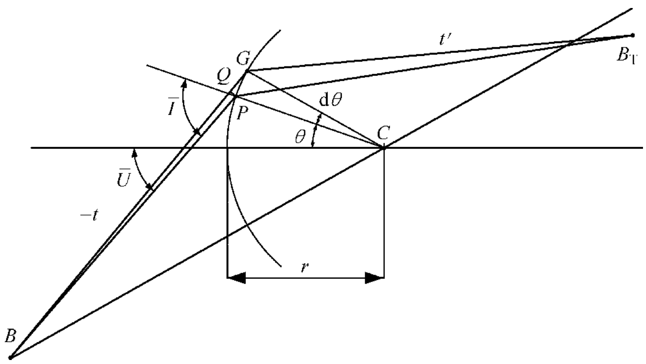


图6-10　推导子午光线的 Coddington 方程

$$\overline{PQ} = t\mathrm{d}\,\bar{U} = PG\cos\bar{I} = r\cos\bar{I}\,\mathrm{d}\theta \\ = t(\mathrm{d}\theta - \mathrm{d}\,\bar{I}) = r\cos\bar{I}\,\mathrm{d}\theta \tag{6-58}$$

因此，我们可以写出

$$\mathrm{d}\,\bar{I} = \left(1 - \frac{r\cos\bar{I}}{t}\right)\mathrm{d}\theta \tag{6-59}$$

并且对于折射光线类似的形式：

$$\mathrm{d}\,\bar{I'} = \left(1 - \frac{r\cos\bar{I'}}{t}\right)\mathrm{d}\theta \tag{6-60}$$

对斯涅尔折射定律进行微分，我们发现

$$n\cos\bar{I}\,\mathrm{d}\,\bar{I} = n'\cos\bar{I'}\,\mathrm{d}\,\bar{I'} \tag{6-61}$$

最后得到

$$\frac{n'\cos^2\bar{I'}}{t'} - \frac{n\cos^2\bar{I}}{t} = \frac{n'\cos\bar{I'} - n\cos\bar{I}}{r} \tag{6-62}$$

当物高为0，则$\bar{I}$和$\bar{I'}$为0，表达式变为高斯方程。

6.4.1.2　弧矢像

在图6-11的帮助下，我们可以得到对应的细光束弧矢像方程。首先，我们要记住，弧矢像是位于辅助轴上的。所以，我们只需要找到折射主光线与辅助轴的交点。根据三角形 BPB_S 的面积是三角形 BPC 和三角形 PCB_S 的面积和，我们可以写出这些面积

$$\frac{1}{2}ss'\sin(180° - \bar{I} + \bar{I'}) = -\frac{1}{2}sr\sin(180° - \bar{I}) + \frac{1}{2}s'r\sin\bar{I'} \tag{6-63}$$

因此，

$$-ss'\sin(\bar{I} - \bar{I'}) = -sr\sin\bar{I} + s'r\sin\bar{I'} \tag{6-64}$$

经过一些代数运算并运用折射定律，我们最终得到

$$\frac{n'}{s'} - \frac{n}{s} = \frac{n'\cos\bar{I'} - n\cos\bar{I}}{r} \tag{6-65}$$

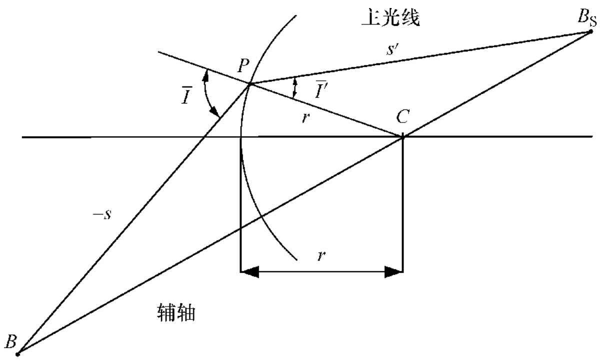


图 6-11　推导弧矢光线的 Coddington 方程

同样，当$\bar{I}$和$\bar{I}'$为 0，该表达式变成高斯方程。这些方程经常用来估计光学系统的像散。在运用这些表达式时，需要记住重要的一点，这些像是由那些十分接近主光线（细光束）的光线得到的。而且，不管是弧矢像或子午像，都是位于主光线上的。

6.4.1.3　通用表达式

可以很容易地通过这两个表达式推出一个通用表达式，用于计算子午和弧矢平面之间的平面上的光线所成的像。对给定主光线路径，一个含有像散的折射波面的子午和弧矢曲率是它的最小值和最大值，并且称为标准曲率，记为

$$c_s' = \frac{1}{s'}, c_t' = \frac{1}{t'} \tag{6-66}$$

图 6-12 中，对于一个垂直于主光线的平面 P，波面在平面 P 中的曲率与子午面成 α 角，根据欧拉公式，如下所示：

$$c_\alpha = c_t'\cos^2\alpha + c_s'\sin^2\alpha \tag{6-67}$$

如果角是在相切于光学面的 S 平面中测得的，该角用 θ 表示，如图 6-12 所示，我们可以写出

$$\cos^2\alpha = \frac{y'^2}{s'^2} = \frac{y'^2}{x'^2 + y'^2} = \frac{y^2\cos^2 I'}{x^2 + y^2\cos^2 I'} = \frac{\cos^2 I'}{\tan^2\theta + \cos^2 I'} \tag{6-68}$$

式中，I'是主光线的折射角。而

$$\sin^2\alpha = \frac{x'^2}{s'^2} = \frac{x'^2}{x'^2 + y'^2} = \frac{x^2}{x^2 + y^2\cos^2 I'} = \frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta + \cos^2 I'} \tag{6-69}$$

现在，将这些表达式代入欧拉公式［式（6-67）］：

$$c_\theta = \frac{c_t'\cos^2 I'}{\tan^2\theta + \cos^2 I'} + \frac{c_s'\tan^2\theta}{\tan^2\theta + \cos^2 I'} \tag{6-70}$$

在经过一些代数运算后，我们得到了普遍的 Coddington 方程，在第 7 章中我们用不同的方法推导出了［式（7-77）］：

$$\frac{n'\cos\bar{I}' - n\cos\bar{I}}{r} = \frac{n'(1 - \sin^2\bar{I}'\cos^2\theta)}{d_\theta'} - \frac{n(1 - \sin^2\bar{I}\cos^2\theta)}{d_\theta} \tag{6-71}$$

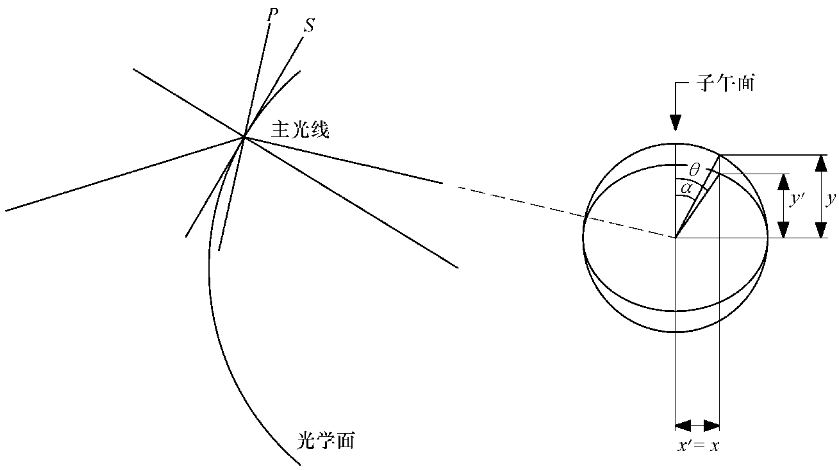


图6-12 垂直于主光线平面中的角 α 投影到光学面的切面上形成角 θ

对于两球面反射镜的光学系统，无论与两个反射镜的子午面成什么角度，该表达式能有效地确定系统像散。

6.4.2 佩兹伐场曲和像散间的关系

如果视场相对较小（半视场小于约10°），在三阶近似下，弧矢（S）、子午（T）和佩兹伐（P）面可以用球面表示，如图6-13所示，这些像差都是正的。这些面在主光线上相接触，而如式（6-56）描述，在其他点处分离。弧矢和子午面的弯曲偏离分别等于 $AstL_S + Ptz$ 和 $AstL_T + Ptz$。最清晰面位于弧矢面和子午面之间，最清晰面的弯曲偏离为

$$Best = Ptz + \frac{AstT_S + AstT_T}{2} = Ptz + 2AstT_S \qquad (6\text{-}72)$$

如果要使最清晰面为平面，弯曲偏离距离应该为0；否则，该面的曲率半径为

$$r_{\text{best}} = \frac{h'^2}{2(Ptz + 2AstT_S)} \qquad (6\text{-}73)$$

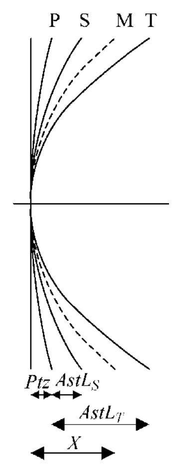


图6-13 具有像散的面和弧矢子午像散定义

我们已经证明佩兹伐场曲仅取决于组成光学系统的透镜总光焦度，而与透镜形状（弯曲程度）或光阑位置无关。如此一来，通过改变弯曲程度和选择光阑位置，我们仅改变像散。另一方面，子午和弧矢像散总是保持3∶1的关系。因此，如图6-13所示，这些焦面可能有不同曲率。

为了得到全视场成像最佳分辨率，我们可以把观察平面（屏、成像胶片或探测器）放在图6-14中虚线所示位置。这四幅图具有相同的佩兹伐面和递增的像散量。大多数情况下，不存在像散，而只有负佩兹伐场曲，如图6-14a所示，在整个佩兹伐面上所成的像是理想的，非常清晰。在这种情况下，如一些天文设备中采用的方法，观察屏被弯

曲，而使用时再将其压平。Conrady（1957）宣称，图 6-14b 中的像散是一种对于视场不大的天文成像设备来说更好的选择。虽然系统有一定像散，但在弧矢和子午面之间的最优焦平面是平面。对于视场比较广的摄像设备，如果延伸像不满足要求，那么图 6-14d所示存在较大像散的情况是一种折中的选择，它的最清晰面能保持为平面。代价是，在视场边缘，随着像尺寸增大，将产生很大像散。考虑到图 6-14d 中较大像散的情况，对于实用目的的最优选择是选择一个图 6-14c 所示的平面子午焦面，减少一点像散量。

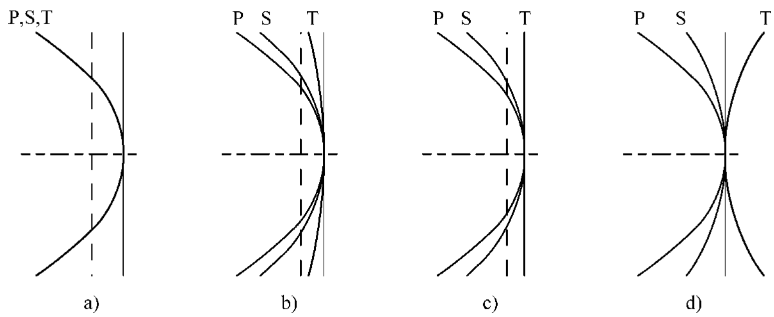


图 6-14　不同像散量，相同佩兹伐曲率的像散曲线

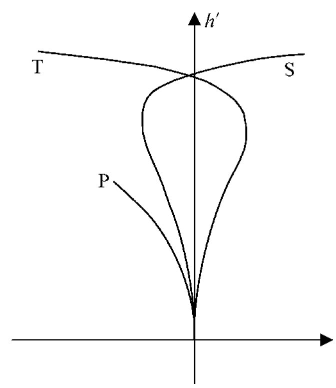


图 6-15　大视场情况下，具有高阶像差的像散曲线

有一个重要的实际结论应该被记住：大多数情况下系统具有负佩兹伐场曲，那么仅当像散为正的时候，能获得最优的像。

对于半视场大于 20°，高阶像散将出现，使弧矢和子午像面形状严重偏离球面。在这种情况下，高阶像差要用来补偿初级像差，如图 6-15 所示。这两个含有像散的面应该在视场边缘相交。

6.4.3　有彗差和像散的像

我们已经说明彗差和像散是两种不同的像差，但是在单个折射球面中，它们不是相互独立的。两者同时出现，并由球差紧密联系起来。图 6-16 展示了像散和彗差随不同的$\bar{i}/i$的变化。观察到，当比值小于 1 时，彗差占主导地位；当比值大于 1 时，情况相反。仅在具有多个光学表面的共轴光学系统中，球差、彗差和像散可能单独出现。

为了理解有彗差像的形成，我们把出瞳看作一个个不同大小的同心环的组合，如图 6-17 所示。图中画出了经过其中一个环的光线路径。下面，我们可以了解到如下事实：

1）关于子午平面对称的光线，D_i 和 D_i'相交于子午平面上的点 P_i。

2）所有的点 P_i 位于一条平行于主光线的直线上。这条线叫作焦线。焦散点被定义为倾斜光线和子午平面的交点。这样焦线也被定义为通过出瞳上圆环的光线焦散点的轨迹。

3）每一个出瞳上的圆环产生一条平行于主光线的焦线。出瞳上圆环直径越小，焦线越接近于主光线。

4）经过 D_0 和 D_4 的子午光线相交在焦平面上的子午焦点。

5）经过 D_2 和 D_2' 的弧矢光线相交在焦平面上的弧矢焦点。

6）出瞳上的每个圆环对应于焦平面上一个小圆环。然而，在出瞳上 1 圈圆环，在像面上则是 2 圈。

7）完整的彗差像就是由这些沿着子午面（y 轴）平移并逐渐变小的圆环组成的。

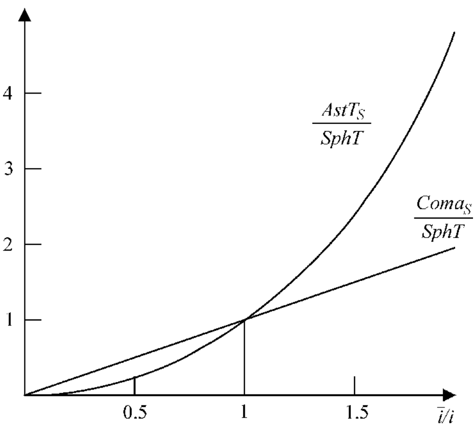


图 6-16 $AstT_S/SphT$ 和 $Coma_S/SphT$ 随 $\bar{i}/i$ 的变化曲线

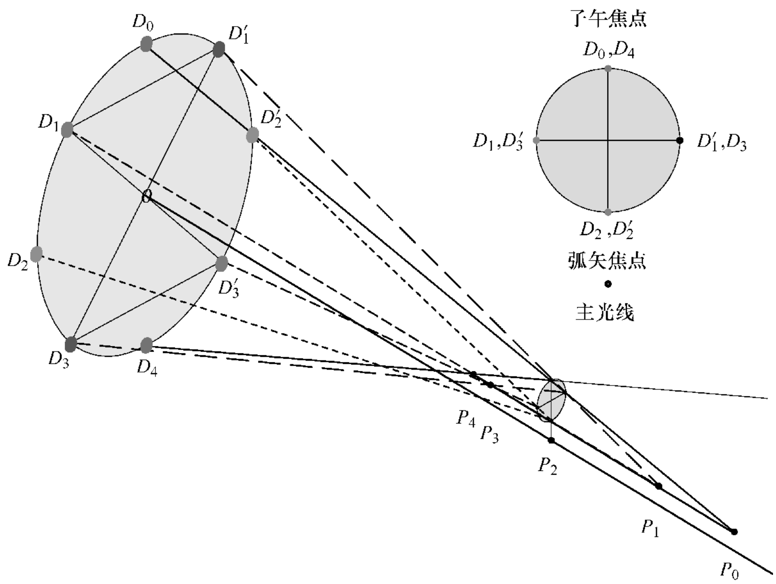


图 6-17 光瞳圆环中的光线在彗差中的分布（有彩色插图）

一对实体像，展示了在彗差存在的光学系统中，光线通过入瞳圆环的光学路径，如图 6-18 所示。图 6-19 画出了具有正彗差时像的形状。从图中我们可以看出垂轴弧矢彗差和垂轴子午彗差的定义。

在一个只含有像散（不含彗差）的光学系统中，自出瞳上圆环发出的光线传播特性如图 6-20 所示。接下来，我们可以了解到如下事实：

1）关于子午平面对称的光线，D_i 和 D_i' 相交于子午平面上的点 P_i。字母 i 代表 0、1、2、3 或 4，如图 6-20 所示。

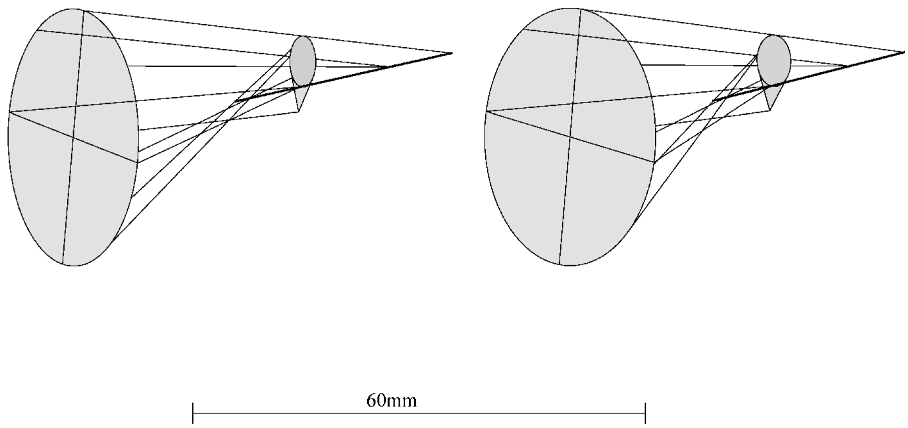


图 6-18　彗差存在下，一对实体像中一个光瞳圆环光线的路径

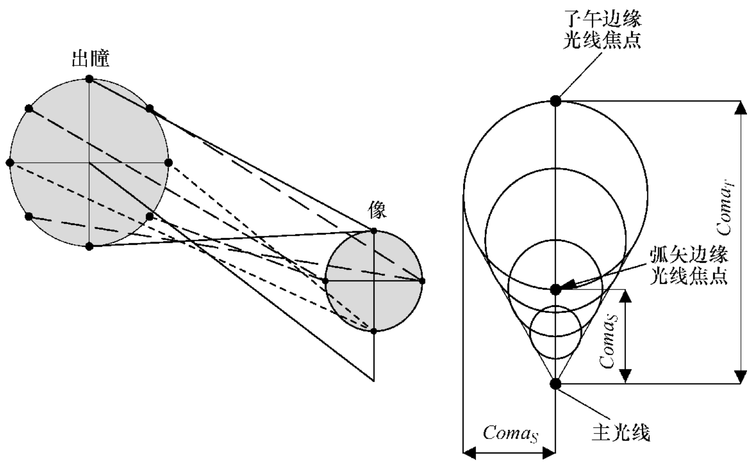


图 6-19　彗差光斑的形成（有彩色插图）

2）所有的点 P_i 位于一条垂直于主光线的直线上。这条线称为焦线。在这种情况下，也称为弧矢焦点。

3）出瞳上的每个圆环产生一个焦线；全部位于对应的弧矢焦点。这样一来，单个光学面中，所有的焦线相互平行且垂直于主光线。对一个不存在球差的光学系统，所有的焦线重合在一条线上。

4）在弧矢和子午焦面之间的过渡平面，所成的像是较小的圆形。

在图 6-21 中展示了不同焦面上像散的图像。同时也画出了垂轴弧矢像散和垂轴子午像散的大小。现在，让我们对焦线做一些常规讨论：

1）单折射面的焦线位于辅助轴上，如图 6-4 所示。

2）大多数情况下，每个出瞳上的共心环对应于一条焦线，所有线是相互平行的。

3）在仅有彗差的系统中，焦线平行于主光线；而在仅有像散的系统中，焦线垂直

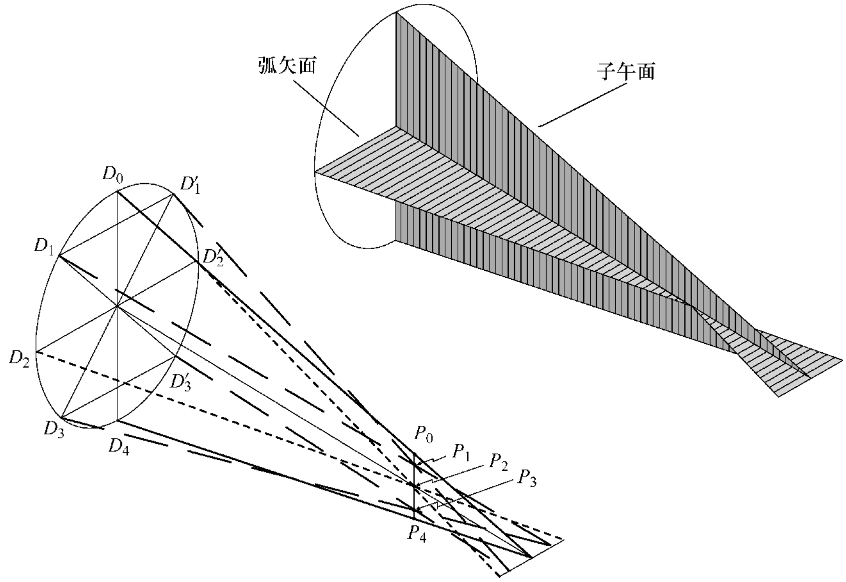


图6-20　纯像散（无彗差）的光学系统成像（有彩色插图）

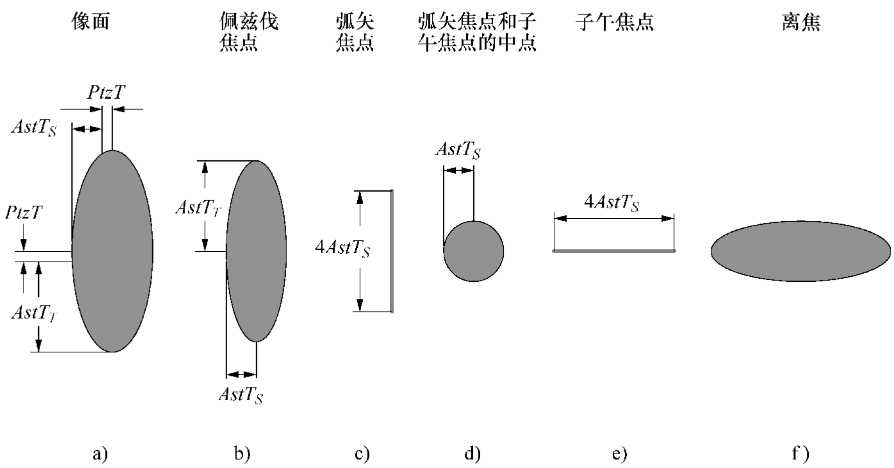


图6-21　在不同焦面的像散像

于主光线。这清楚地说明了单个折射面时，我们不能使像散和彗差分离，因为辅助轴往往与主光线保持一个夹角。

4）焦线的中心为弧矢焦点。端点则由边缘子午光线确定。

5）对于完整的光学系统，焦线通常与主光线存在夹角 θ。而这个倾斜角由这两种像差的相对量确定，如下所示：

$$\tan\theta = -\frac{AstT_{S\text{Total}}}{Coma_{S\text{Total}}}u'_k \tag{6-74}$$

仔细考虑图 6-22 中的细节，可以得到更多的一些关于像散像和彗差像的内容。这幅图绘制了通过入射光瞳圆环的光线在焦平面上截点的轨迹。这些图是按等距的焦平面位置截取，但三种情况间的截取距离不同。较大的点代表了主光线的截点，连接这些点的线即为主光线。三种情况的焦线（或焦散点轨迹）在图中都画出了。

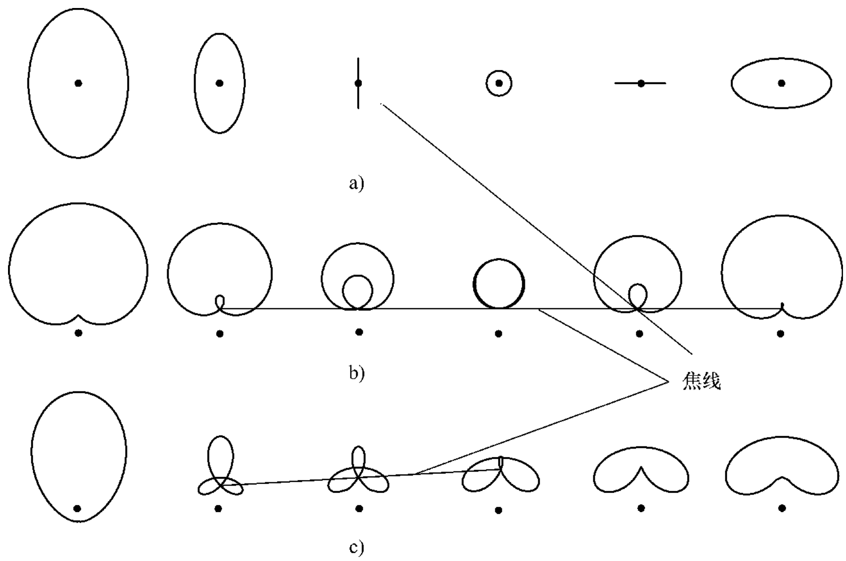


图 6-22　不同焦面的含有彗差和像散的像
a）像散　b）彗差　c）彗差和像散

6.5　齐明面

阿贝定义，一个既没有球差又没有彗差的光学面称为齐明的。了解第 5 章中描述的单折射面 0 球差和 0 彗差的三种情况是很有趣的。我们可以看到这些情况也具有 0 彗差和 0 像散的。当物和像同时在曲率中心时，我们已经证明关于像散的情况是个例外。

非球面技术是实现齐明系统的一个特别有效的方法。运用 Wassermann 和 Wolf（1949）的理论，这种技术很容易实现。在本节中，我们将讲解球面和非球面齐明面。

6.5.1　球面透镜的齐明面

从式（6-40）~式(6-49)，我们可以看出使光学球面的彗差和像散贡献同时为 0 的条件为球差贡献为 0，或者主光线垂直于折射面（$\bar{i}=0$）。然而，要小心子午光线垂直于光学面的情况（$i'=0$），因为因子（$\bar{i}/i'$）中会出现 0 为分母的情形。式（5-25）描述了球差贡献，可写为

$$SphLC = \frac{y(n/n')(n-n')(i+u')i^2}{2n'_k u'^2_k} \tag{6-75}$$

可以看出，当球差为 0，同时子午光线正交于折射面时，像散可能不为 0。

单折射面0球差和0彗差的三种情况都具有0彗差、0像散特性，除了物和像都在曲率中心的情况。

另一种方法去证明三种球差为0的情况下，彗差也为0，是计算 OSC。对所有0球差（$L'_k = l'_k$）的光学系统，根据式（6-36），OSC 可以写为

$$OSC = \frac{u'_k \sin U}{u \sin U'_k} - 1 \tag{6-76}$$

而对单折射面，从式（1-19）~式（1-21），我们发现

$$\frac{M}{m} = \frac{u' \sin U}{u \sin U'} = \left(\frac{L' - r}{L - r}\right)\left(\frac{l - r}{l' - r}\right) \tag{6-77}$$

由于已经假定该面无球差（$L' = l'$），物被看作一个点（$L = l$），可以看到表达式的两边都是1。因而容易看出 OSC 的结果，所以0球差的三种情况下，弧矢彗差为0。

一般来说，我们认为系统是齐明系统，如果它同时没有球差和彗差。鉴于一些最新的结论，系统称为齐明系统要满足：它的像是理想像（不存在像差），而且在以光轴为中心的一个小区域内，像点在其内移动不会引入任何像差。这个不存在像差的区域称为齐明区域。

类似地，一个系统被称为等晕的，如果像点在光轴附近的一个小区域内移动，而不改变像点的形状，或者说不改变像差。这块光轴附近的区域称为等晕区。

6.5.2　Wassermann－Wolf 齐明面

Wassermann 和 Wolf（1949）指出，同时 Born 和 Wolf（1999）的书中也说明，一个齐明系统也可以用非球面设计。使两个相邻面为非球面，以使整个系统为齐明系统。这意味着球差被完全补偿，而主面为中心在轴上的球面。换句话说，孔径上的所有点满足阿贝正弦条件。

让我们考虑一个具有球差的共轴光学系统。如果一些光学面是合理地非球面化，很容易完全补偿系统的球差。Wassermann 和 Wolf 提出用两个相邻面进行非球面化，去校正球差和彗差。最后的设计结果需要求解两个联立的一阶微分方程。两个方程式按如下过程建立的：追迹从轴外像点发出的光线，从顶点处的切面和到第一 Wassermann－Wolf 面的切面；然后，光线被从想要的轴外像点方向追迹回到第二 Wassermann－Wolf 面的切面。这两束光线被用来构建两个方程，然后进行数值求解。有兴趣的读者可以参考 Born 和 Wolf（1999）的书。

6.6　畸变

当不存在任何像差时，物点的像位于高斯像点。如果物高为 h，高斯像高等于 mh'，其中，m 为一阶垂轴放大率，由拉格朗日定理得到。如图6-3所示，我们看到，当彗差为0，子午像 T 和弧矢像 S 分别位于主光线上 U 和 Q。如果没有球差，边缘弧矢焦点 S 和细光束弧矢焦点 S_b 重合，所以点 Q 和点 S_b 为同一点。如果没有像散，细光束弧矢焦点 S_b 和子午焦点 T 重合在佩兹伐面上的点 P'。

让我们进一步假设不存在佩兹伐场曲。那么，像点将位于主光线上的点 N。总之，即使光学系统不存在任何我们前面研究的像差，像点仍然在垂轴方向上偏离高斯像点。

畸变像差是由主光线决定的实际像高和高斯像高 h' 间的差异引起的。因而，我们绘制实际像高，被定义为主光线和高斯焦平面交点的高度，作为高斯像高 h' 的函数曲线，结果并不是一条直线，如图 6-23 所示。畸变分为正畸变和负畸变。如果一个方形经过一个含有畸变的透镜成像，所成的像如图 6-24 所示。根据方形所成像的形状，我们称正畸变为枕形畸变，而称负畸变为桶形畸变。

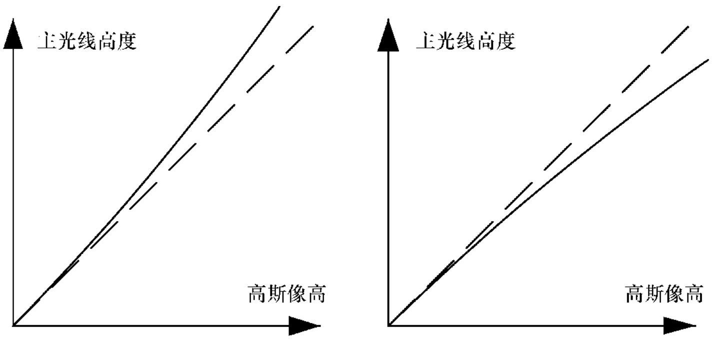


图 6-23　畸变存在下，主光线高度相对高斯像高的函数图

a）正畸变　b）负畸变

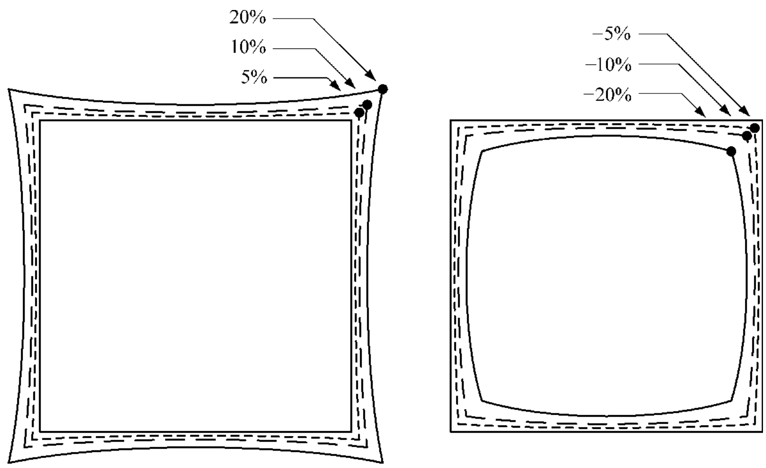


图 6-24　正负畸变时的方形像

a）正畸变　b）负畸变

当主光线高于理想高斯像时，产生正畸变。让我们再看看图 6-3，单个折射面，以及主光线和辅助轴。理想像，或者说高斯像在辅助轴上的点 G。畸变的大小为高斯像 M 到主光线和高斯焦平面交点 N 的距离。这样，由图所示，畸变的值可以表示

$$Dist = \overline{GN} = -\overline{GS_b}\psi = -(\overline{PS_b} + \overline{GP})\psi \tag{6-78}$$

由式（6-7）得到$\overline{PS_b}$的值，而式（6-21）说明$\overline{GP}$为 Ptz 的值，代入上式得

$$Dist = -\left[SphL\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^2 + Ptz\right]\psi \tag{6-79}$$

然后，应用式（6-3）中的 ψ 值

$$Dist = SphT\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^3 - Ptz\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)u' \tag{6-80}$$

该面的畸变也可以写为

$$Dist = Coma_S\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^2 - Ptz\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)u' \tag{6-81}$$

这是单个面产生的畸变。按惯例，该面对整个系统像差的贡献为，这个结果乘上该面之后系统的轴向放大率。我们得到

$$DistC = Coma_SC\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^2 - PtzC\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)u'_k \tag{6-82}$$

另一种更适合数值计算的畸变表达式，由 Feder（1951）在 Wachendorf（1949）的工作基础上提出，如下所示：

$$Dist = \bar{\sigma}i\,\bar{i} + \frac{h'_k}{2}(\overline{u'^2} - \bar{u}^2) \tag{6-83}$$

式中，

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{y}(n/n')(n-n')(\bar{i}+\overline{u'})}{2n'_ku'_k} = \frac{\bar{y}(n/n')(n-n')(\bar{i}+\overline{u'})}{2\Lambda}h'_k \tag{6-84}$$

式中，Λ 是拉格朗日光学不变量。

第一项指的是主光线和像平面交点的垂轴偏移，在6.10节中已经说明它等于光瞳弧矢彗差的值。第二部分对应的是，由于佩兹伐场曲的存在，像沿着辅助轴移位，引起的高斯像偏移。

畸变像差可以通过光线追迹准确得到：追迹主光线，从中减去经过高斯像的光线高度。

畸变随着像高而增加，具体为像高的奇次方幂多项式。而初级畸变像随像高的立方变化。这就是在畸变存在的情况下，方形所成像的畸变形状出现的原因。

大多数畸变是用高斯像高的百分比表示，如图6-24所示。如果物体是方形的，角上的畸变则刚好是边的中心畸变的两倍。

6.7　齐明面上的轴外像差

第4章中说明，一个非球面的面型相对于球面面型有一个变形，从而引入了一个额外的球差项，可以写为

$$SphTC_{\mathrm{asph}} = Dy^3 \tag{6-85}$$

式中，S 被符号 y 取代，常数 D 定义为

$$D = -(8A_1 + Kc^3)\left(\frac{n - n'}{2n'_k u'_k}\right)y \tag{6-86}$$

y/u'_k的比值接近常数。

这一项改变了折射光线的斜率，并且它们的垂轴像差在数量上等于这个球面的垂轴球差。$\bar{y}$的大小指的是从光轴（也可认为是折射面顶点）到光线与折射面交点的距离。从图 6-25 中的光线路径，可以得到这些额外产生的垂轴像差表示如下：

1）通过 P 的主光线：

$$TA_P = D\,\bar{y}^3 \tag{6-87}$$

2）通过 T_1的上子午光线：

$$TA_{T1} = D\,(\bar{y} + y)^3 = D(\bar{y}^3 + y^3 + 3y\,\bar{y}^2 + 3y^2\,\bar{y}) \tag{6-88}$$

3）通过 T_2的下子午光线：

$$TA_{T2} = D\,(\bar{y} - y)^3 = D(\bar{y}^3 - y^3 - 3y\,\bar{y}^2 + 3y^2\,\bar{y}) \tag{6-89}$$

4）通过 S_1 和 S_2 的弧矢光线：

$$TA_S = D\,(\bar{y}^2 + y^2)^{3/2} \approx D(\bar{y}^3 + \bar{y}y^2) \tag{6-90}$$

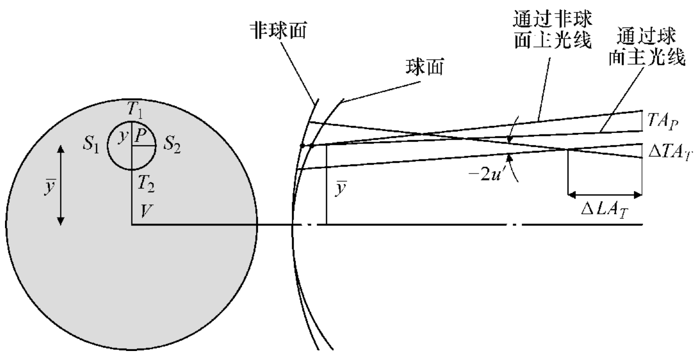


图 6-25　非球面化折射面后引入的像差

基于上述结果，我们可以确定，由于非球面和球面的面型差异而引起的附加像差。我们用 $Coma_S C_{asph}$表示需要加到彗差贡献 $Coma_S C$ 上的附加项，具体表达为

$$Coma_S C_{asph} = TA_S - TA_P = SphTC_{asph}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right) \tag{6-91}$$

注意，主光线和弧矢光线路径都发生了变化。

边缘子午焦点的垂直方向位移可以通过对这些光线的垂轴像差求平均得到。从子午焦点到主光线的距离即为子午彗差，所有被加到子午彗差 $Coma_T$ 的额外项表达式为

$$Coma_{T\ asph} = \frac{TA_{T1} + TA_{T2}}{2} - TA_P \tag{6-92}$$

这样得到了子午彗差的贡献项：

$$Coma_T C_{asph} = 3SphTC_{asph}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right) \tag{6-93}$$

可以看到，弧矢彗差和子午彗差间1∶3的关系仍然成立。

弧矢光线并不处在子午面内。从图6-25中可以容易看出，因为非球面化的面型，弧矢垂轴像差 TA_S 沿着方向 VS_2（而不是 VP 方向）。

因此两条弧矢光线分别存在方向相反的水平分量（x 方向）垂轴像差。该分量大小等于

$$TA_{Sx} = TA_S\left(\frac{y}{\bar{y}}\right) = D(\bar{y}^3 + \bar{y}y^2)\left(\frac{y}{\bar{y}}\right) \tag{6-94}$$

引入一阶近似，忽略掉第二项，细光束弧矢焦点的轴向偏离，数量上等于轴向弧矢像散贡献量，如下：

$$AstL_{S\ \mathrm{asph}} = -\frac{TA_{Sx}}{u'} = -\frac{D\bar{y}^2y}{u'} \tag{6-95}$$

然后，运用式（6-85）和式（4-27），我们得到非球面引起的轴向弧矢像散贡献表达式为

$$AstL_SC_{\mathrm{asph}} = SphLC_{\mathrm{asph}}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right)^2 \tag{6-96}$$

如图6-25所示，因为两条边缘子午光线垂直方向上的垂轴像差的差异，而引起了子午焦点的轴向偏移 ΔLA_T，具体为

$$\begin{aligned}\Delta LA_T &= -\frac{\Delta TA_T}{2u'} = -\frac{TA_{T1} - TA_{T2}}{2u'} \\ &= -\frac{D(y^3 + 3y\bar{y}^2)}{u'}\end{aligned} \tag{6-97}$$

这样，细光束子午焦点的轴向偏移可以写为

$$\Delta LA_T = -\frac{3Dy\bar{y}^2}{u'} \tag{6-98}$$

式中，y 的三次方项被忽略掉以引入一阶近似。有意思的是，与细光束子午焦点和边缘子午焦点固定的球形折射面情况相反，在这里存在球差作用，这样导致了细光束子午焦点和边缘子午焦点在不同的位置。焦点位置的改变，是由非球面引入的像散贡献的，表达式为

$$AstL_TC_{\mathrm{asph}} = -3SphLC_{\mathrm{asph}}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right)^2 \tag{6-99}$$

我们看出，非球面引入的像散贡献，仍然维持1∶3的关系。

主光线垂轴像差等于非球面引入的畸变贡献，表达式如下：

$$DistC_{\mathrm{asph}} = SphLC_{\mathrm{asph}}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right)^3 \tag{6-100}$$

6.8　对称原则和Bow-Sutton条件

当系统的一半和另一半完全一样，包括物和像，那么我们称系统完全对称。这样，

如图 6-26 所示，光阑位于系统的中间，放大率为 −1。

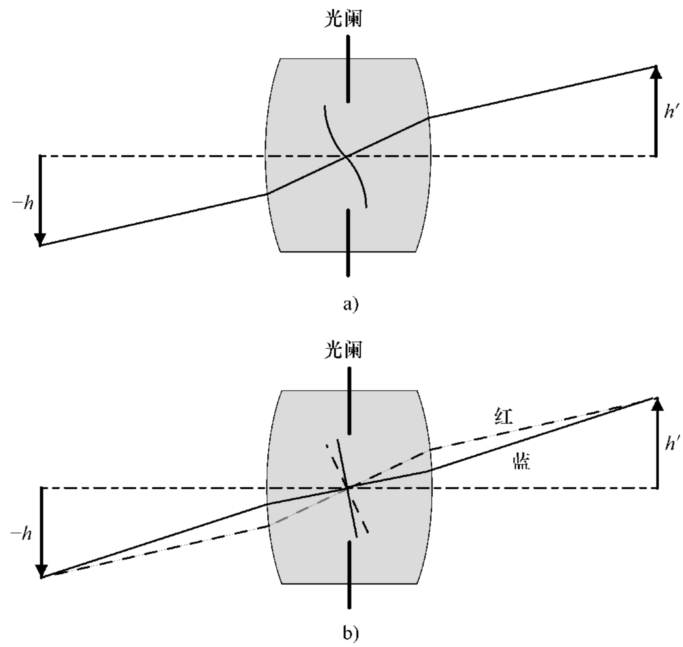


图 6-26　对称光学系统（有彩色插图）

a）0 彗差　b）0 倍率色差

在这样的系统中，对称的波像差[$W(y) = W(-y)$]会加倍，而反对称的波像差[$W(y) = -W(-y)$]会消除。这样，彗差、畸变和倍率色差将自然而然为 0。

如果系统是对称的，而物像共轭并不相同，反对称的像差仍然很小。幸运的是，反对称像差为 0 并不需要系统完全对称。为了理解如何达到的，我们要回顾一些主平面的一阶特性。当物方介质和像方介质都是空气的时候，节点和主点重合。如果光阑位于一个主平面上，入瞳与其中一个主平面重合，而出瞳与另一个重合。这样主光线将通过节点。我们也可以说，如果主平面对于所有倾角（指所有视场）是固定的，那么系统不存在畸变。类似地，如我们在第 4 章所见，如果对于所有颜色波长，入瞳和出瞳是固定的，那么系统不存在倍率色差。这些就是 Bow – Sutton 条件。

6.9　光阑平移方程

当光阑的位置改变时，主光线在每个面的高度也会发生变化。虽然如此，式（3-64）指出，系统所有面上，主光线高度的改变量与子午光线高度的比值为常数，表示如下：

$$\bar{Q} = \frac{\bar{y}^{*} - \bar{y}}{y} \tag{6-101}$$

式中，我们用星号标记光阑位置改变后的量。

在我们推导光阑位置改变后像差变化量的表达式前，先列举一些有用的关系式。从图6-27中看出，当光阑平移，主光线将：

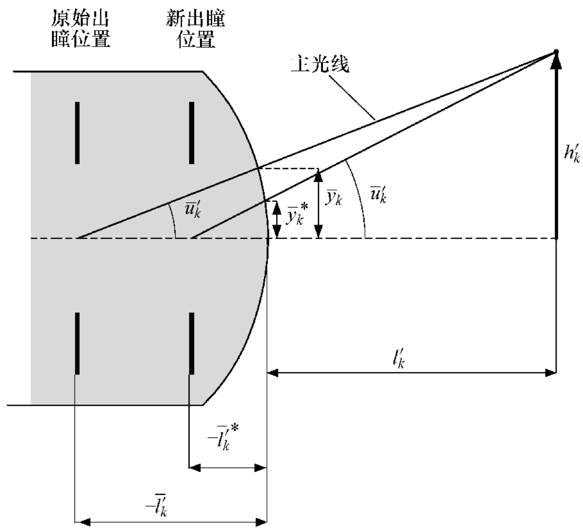


图6-27　光阑平移引起的轴外像差改变

$$\overline{u'_k}^* - \overline{u'_k} = \left(\frac{1}{l'_k - \overline{l'_k}^*} - \frac{1}{l'_k - \overline{l'_k}}\right)h'_k \tag{6-102}$$
$$= \frac{\bar{y}^*_k - \bar{y}_k}{l'_k} = \frac{(\bar{y}^*_k - \bar{y}_k)u'_k}{y_k}$$

因此，固定常数$\bar{Q}$写为

$$\bar{Q} = \left(\frac{1}{l'_k - \overline{l'_k}^*} - \frac{1}{l'_k - \overline{l'_k}}\right)\frac{h'_k}{u'_k} \tag{6-103}$$

另一个有用的关系来自式（6-5）（见图6-3），如下：

$$\bar{i}' = \overline{AA_0}\frac{i'}{y} = (\overline{AV} + \bar{y})\frac{i'}{y} \tag{6-104}$$

式中，$\overline{AV}$在光阑平移时保持不变。类似地，我们写出上式在平移光阑后的形式

$$\bar{i}'^* = (\overline{AV} + \bar{y}^*)\frac{i'}{y} \tag{6-105}$$

减去式（6-104）：

$$\bar{i}'^* - \bar{i}' = (\bar{y}^* - \bar{y})\frac{i'}{y} \tag{6-106}$$

用$\bar{Q}$的定义，得

$$\bar{Q} = \frac{\bar{i}'^* - \bar{i}'}{i'} = \frac{\bar{i}^* - \bar{i}}{i} \tag{6-107}$$

从这个方程，可看到

$$\overline{i'}^{*2}-\overline{i'}^{2}=\overline{Q}(\overline{i'}^{*}+\overline{i'})i' \tag{6-108}$$

借助式（6-107），上式可变为

$$\left(\frac{\overline{i'}^{*}}{i'}\right)^2=\left(\frac{\overline{i'}}{i'}\right)^2+2\overline{Q}\left(\frac{\overline{i'}}{i'}\right)+\overline{Q}^2 \tag{6-109}$$

上述这些表达式全部是用来辅助我们得到光阑平移后初级像差改变量的。因为像是位于轴上的，所以光阑的位置变化不影响球差值。故球差的情况由下式描述

$$SphT^{*}=SphT \tag{6-110}$$

从式（6-40）和式（6-107）容易得到彗差 $Coma_S$ 的情况

$$\begin{aligned} Coma_S^{*} &= SphT^{*}\left(\frac{\overline{i'}^{*}}{i'}\right) \\ &= Coma_S+SphT\,\overline{Q} \end{aligned} \tag{6-111}$$

该式说明，当系统球差为 0 的时候，彗差的值不受光阑位置影响。如果我们意图通过选择合适光阑位置来校正彗差，那么系统必须存在球差。

对于像散的情况，用式（6-50）和式（6-109），我们可以写出

$$\begin{aligned} AstT_S^{*} &= SphT^{*}\left(\frac{\overline{i'}^{*}}{i'}\right)^2 \\ &= AstT_S+2Coma_S\,\overline{Q}+SphT\,\overline{Q}^2 \end{aligned} \tag{6-112}$$

佩兹伐场曲不随光阑位置平移而改变，写为

$$Ptz^{*}=Ptz \tag{6-113}$$

相同的方法，根据式（6-81），我们给出对畸变的光阑平移方程，如下：

$$\begin{aligned} Dist^{*} &= SphT^{*}\left(\frac{\overline{i}^{*}}{i}\right)^3-Ptz^{*}\left(\frac{\overline{i}^{*}}{i}\right)u' \\ &= Dist+(3AstT_S+PtzT)\overline{Q}+3Coma_S\,\overline{Q}^2+SphT\,\overline{Q}^3 \end{aligned} \tag{6-114}$$

关于光阑平移方程有一个有趣的结论，如果系统所有的初级像差都已校正，那么光阑的平移将不会改变像差的校正状况。

6.10　光瞳像差

成像光学系统的主要目的是得到物的无像差像。光学系统也在别的平面上形成光阑的像，如入瞳和出瞳。光瞳的像也会存在像差，这些像差会跟像的像差有关系。多数情况下，测试分析光瞳的像差，能更好掌握物的像差情况。因此，相关研究是很有意义的。光瞳像差和它们与像的像差之间的关系，曾被 Smith（1921，1922）、Feder（1951）和 Wynne（1952）提到过，一些更新更详细的内容则由 Sasian（2006）研究发表。

评价光瞳像差时，子午光线和主光线的角色要互换。拉格朗日不变量的值保持不变。图 6-28 说明了单个折射球面对一个物成像的过程。子午光线从点物平面 O 发出，到达像平面的点 I。主光线从物的下边缘出发，到达像的上边缘，通过了入瞳的中心。

如果把折射主光线延长到物空间，它将穿过光轴在出瞳处的点（点 Q）。

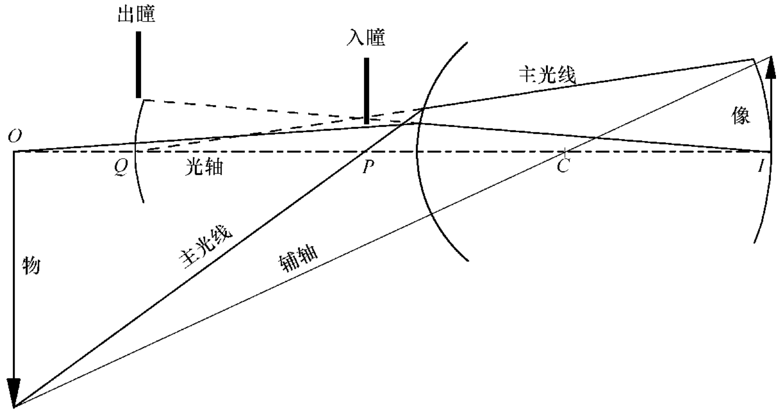


图 6-28　交换子午光线和主光线角色，说明光瞳像差的形成

现在，让我们考虑一个位于物平面且在光轴上的点光源产生的折射波面。在出瞳处分析该折射波面。理想状况下，没有像差，波面为曲率中心在像平面点 I 的球面。但因为像差的存在，波面的形状会偏离球面。

让我们现在交换子午光线和主光线的角色。作为一个像的点光源，现在位于入瞳和光轴的交点 P 上。它的像位于光轴和出瞳的交点 Q 上。现在则在像平面处分析折射波面，而不是在出瞳处。如果没有光瞳像差，波面将是球面的，并且其曲率中心在出瞳面的点 Q 上。很有趣的是：完全校正像差的系统，也不存在光瞳像差。

Sasian（2006）称，光瞳像差和成像像差有着紧密的联系。光瞳彗差引起像的畸变，而光瞳的畸变则引起像的彗差。

参考文献

[1] Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics*, 7th Ed., pp. 214 – 217, Cambridge University Press, New York (1999).

[2] Buchdahl, H. A., "Algebraic Theory of the Primary Aberrations of the Symmetrical Optical System," *J. Opt. Soc. Am.*, **38**, 14 – 19 (1948).

[3] Buchdahl. H. A, *Optical Aberration Coefficients*, Oxford University Press, London (1954). (Reprinted with Buchdahl's articles by Dover Publications, New York, 1968.)

[4] Buchdahl. H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅰ. The Coefficient of Tertiary Spherical Aberration," *J. Opt. Soc. Am.*, **46**, 941 – 943 (1956).

[5] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅱ. The Tertiary Intrinsic Coefficients," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 563 – 567 (1958a).

[6] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅲ. The Computation of the Tertiary Coefficients," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 747 – 756 (1958b).

[7] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅳ. The Coefficient of Quaternary Spherical Aberration," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 757–759 (1958c).

[8] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅴ. On the Quality of Predicted Displacements," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 1113–1121 (1959).

[9] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅵ. On the Computations Involving Coordinates Lying Partly in Image Space," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 534–539 (1960a).

[10] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅶ. The Primary, Secondary and Tertiary Deformations and Retardation of the Wavefront," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 539–544 (1960b).

[11] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅷ. Coefficient of Spherical Aberration of Order Eleven," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 678–683 (1960c).

[12] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅸ. Theory of Reversible Optical Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **51**, 608–616 (1961).

[13] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅹ. Theory of Concentric Optical Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 1361–1367 (1962a).

[14] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅺ. Theory of a Concentric Corrector," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 1367–1372 (1962b).

[15] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅻ. Remarks Relating to Aberrations of Any Order," *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 641–649 (1965).

[16] Buchdahl, H. A., *Introduction to Hamiltonian Optics*, Cambridge University Press, Cambridge UK (1970).

[17] Conrady, A. E., *Applied Optics and Optical Design*, *Part* Ⅰ, Dover Publications, New York (1957).

[18] Conrady, A. E., *Applied Optics and Optical Design*, *Part* Ⅱ, Dover Publications, New York (1960).

[19] Cruickshank, F. D. and Hills, G. A., "Use of Optical Aberration Coefficients in Optical Design," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 379–387 (1960).

[20] Epstein, L. I., "The Aberrations of Slightly Decentered Optical Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 847–853 (1949).

[21] Feder, D., "Optical Calculations with Automatic Computing Machinery," *J. Opt. Soc. Am.*, **41**, 630–635 (1951).

[22] Focke, J., "Higher Order Aberration Theory," in *Progress in Optics*, E. Wolf, ed., Vol. Ⅳ, Chap. Ⅰ, North Holland, Amsterdam (1965).

[23] Herzberger, M. and Marchand, E., "Image Error Theory for Finite Aperture and Field," *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, 306–321 (1952).

[24] Herzberger, M. and Marchand, E., "Tracing a Normal Congruence through an Optical System," *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 146–154 (1954).

[25] Hopkins, R. E. and Hanau, R., "Aberration Analysis and Third Order Theory," in *Military Standardization Handbook*: *Optical Design*, *MIL–HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962).

[26] Hopkins, R. E., McCarthy, C. A., and Walters, R., "Automatic Correction of Third Order Aberrations," *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 363–365 (1955).

[27] Kingslake, R., "Lens Design," in *Applied Optics and Optical Engineering*, R. Kingslake, ed., Vol, Ⅲ, Chap. 1, Academic Press, San Diego, CA (1965).

[28] Kingslake, R., *Lens Design Fundamentals*, Academic Press, San Diego, CA (1978).

[29] Kingslake, R., "Who Discovered Coddington's Equations?," *Optics and Photonics News*, August, p. 23 (1994).

[30] Rakich, A., "Evidence Supporting the Primacy of Joseph Petzval in the Discovery of Aberration Coefficients and Their Application in Lens Design," *Proc. SPIE*, **6668**, 1–12 (2007).

[31] Rosendahl, G. L., "A New Derivation of Third–Order Aberration Coefficients," *Appl. Opt.*, **6**, 765–771 (1967).

[32] Ruben, P., "Aberrations Arising from Decentrations and Tilts," *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 4552 (1964).

[33] Sasian, J., "Interpretation of Pupil Aberrations in Imaging Systems," *Proc. SPIE*, **634**, 634208 (2006).

[34] Smith, T., "The Changes in Aberrations when the Object and Stop Are Moved," *Trans. Opt. Soc.*, **23**, 139–153 (1921/1922).

[35] Wachendorf, F., "Bestimmung der Bildfehler 5. Ordnung in zentrierten optischen Systemen," *Optik*, **5**, 80 (1949).

[36] Wallin, W., "The Control of Petzval Curvature," *J. Opt. Soc. Am.*, **41**, 1029–1032 (1951).

[37] Wassermann, G. D. and Wolf, E., "On the Theory of Aplanatic Aspheric Systems," *Proc. Phys. Soc. B*, 62 (1949).

[38] Wynne, C. C., "Primary Aberrations and Conjugate Change," *Proc. Phys. Soc. Lond.*, **65b**, 429–437 (1952).

第 7 章　像差多项式和高阶像差

7.1　光学系统中的波面

我们已经认识到，一个理想光学成像系统能够将朝各个方向发出光线的点光源成像为一个点像，这就是几何光学的基本观点。然而，如果我们记得光是一种波，我们就要接受，点光源发出的是一个球面波。按第 1 章的定义，波面是光波相位相等的空间面。另一等效的观点认为，波面是指从光源发出的光线沿不同路径传播中光程相等的点组成的空间面。

我们容易注意到，如果点光源发出的是球面波，那么只有当折射波面是会聚的理想球面波时，可以得到理想的点像。在这种情况下，从点光源到点像的所有光线路径的光程都是相同的。这就是在第 1 章中提到的费马原理，等效于力学中由 Maupertuis 提出的最小作用原理。

以光波面模型为基础，我们可以将像差看作波面与理想球面间的差别。按照我们将在本章中讲述内容，几何光学模型和波动光学模型在设计消像差光学系统中都是很有用的。

7.2　几何像差和波像差

在第 1 章中，我们认识到在各向同性的介质中，光线被定义为波面的法线。如果波面不是理想球面，波面被称为有像差的。像差的大小是测量波面和与之相近的任一被作为参考的球面间的差异，被选作参考的球面称为参考球面。

共轴光学系统意味着，系统的所有球面和旋转对称面的曲率中心都位于一条称为“光轴”的直线上。物点在共轴系统的 y 轴，像差引起的波面变形，是关于 y 轴对称的。然而，绝大多数实际系统并不具备这种对称性，因为光学面偏心或不是理想球面。因此，我们经常面对的是具有随机变形的波面，而初级像差和塞德尔像差只是一种特殊情况。

波面变形能够与几何光线建立的像面垂轴像差建立精确的数学关系。让我们考虑一个具有像差的波面，相对于理想参考球面的变形量为 $W(x, y)$，它与垂轴像差 $TA_x(x, y)$ 和 $TA_y(x, y)$ 如下

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x} = -\frac{TA_x(x,y)}{r_W - W(x,y)} \tag{7-1}$$

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}=-\frac{TA_y(x,y)}{r_W-W(x,y)} \quad (7\text{-}2)$$

式中，r_W 是参考球面的曲率半径。准确的表达式由 Rayces（1964）推导得出。衡量垂轴像差值的平面位于参考球面曲率中心处，如图7-1所示。通常，参考球面曲率半径 r_W 远远大于波面偏差 $W(x, y)$。所以，在对绝大多数实际应用仍保持足够高的精度的情况下，我们可以将表达式近似为

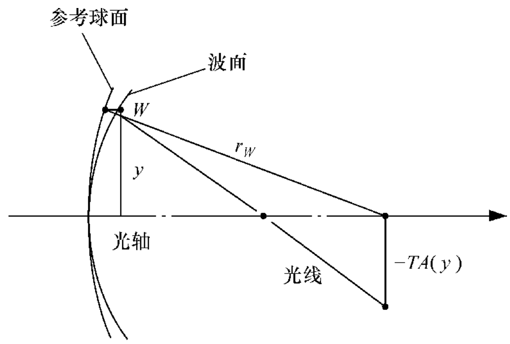


图7-1　光学和波像差的联系

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}=-\frac{TA_x(x,y)}{r_W}=\varepsilon_x \quad (7\text{-}3)$$

$$\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}=-\frac{TA_y(x,y)}{r_W}=\varepsilon_y \quad (7\text{-}4)$$

式中，ε_x 和 ε_y 分别是波面 $W(x, y)$ 关于参考球面在 x、y 方向的斜率。如果垂轴像差是已知的，波面变形可以通过对像差积分得到

$$W(x,y)=-\frac{1}{r_W}\int_0^x TA_x(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_0^x \varepsilon_x(x,y)\,\mathrm{d}x \quad (7\text{-}5)$$

$$W(x,y)=-\frac{1}{r_W}\int_0^y TA_y(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^y \varepsilon_y(x,y)\,\mathrm{d}y \quad (7\text{-}6)$$

如果垂轴像差可以计算或测得，那么波像差可以通过上述积分式求得。要注意到，正的垂轴像差或轴向像差意味着负的波像差斜率，反之亦然。

7.3　波像差多项式

如果像差引起的波面变形存在解析表达式，那将是非常方便的。考虑普遍的情况，不假设任何对称性，在光学系统出瞳处测得的波面形状可以用多项式表示为

$$W(x,y)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{i}c_{ij}x^j y^{i-j} \quad (7\text{-}7)$$

这里包含了高阶像差项，其中 N 是多项式的次数。在极坐标中，我们定义

$$x=S\sin\theta \quad (7\text{-}8)$$

$$y=S\cos\theta \quad (7\text{-}9)$$

式中，S 是出瞳上的径向距离，角度 θ 是相对于 y 轴的夹角，如图7-2所示。这样，波面形状可以在极坐标中，由一系列 $\cos^n\theta$ 与 $\sin^n\theta$ 的和的形式表示

$$W(S,\theta)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=0}^{n}S^n(a_{nl}\cos^l\theta+b_{nl}\sin^l\theta) \quad (7\text{-}10)$$

式中，$\cos\theta$ 项和 $\sin\theta$ 项分别对应波面的对称分量和非对称分量（关于 y 轴）。然而，并

不是所有可能的 n 和 l 值都是允许的。为保证表达式是一个单值函数，我们要满足条件

$$W(S,\theta)=W(-S,\theta+\pi) \tag{7-11}$$

因而，很容易看出满足这个条件的要求，n 和 l 同时为奇或偶。在另一方面，如果将波面表达式变换到直角坐标系 $W(x,y)$ 中，除非 $l\leq n$，否则它将变为一个无穷项的多项式。所以，如果我们要使式（7-10）等效于有限项的式（7-7），我们需要满足这个条件。这个条件一般是满足的，除了极少数情况，如 Malacara 和 DeVore（1992）指出一些旋转剪切干涉图中的情况。

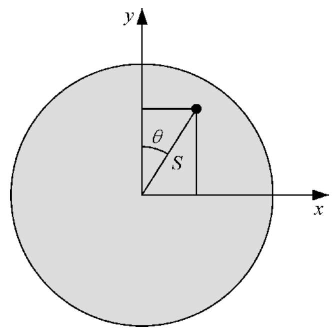


图 7-2　光线在光学系统入瞳面的极坐标表示

在继续学习前，需要记住很重要的一点，波面变形 $W(S,\theta)$ 的大小是以顶点在出瞳中心且形状与波面十分接近的参考球面为基准衡量的。参考球面的顶点和波面的顶点是重合的，并在该点与主光线相交。参考波面的曲率中心，为了简化称为点 C，可以位于很多不同的位置。对给定像高 h，点 C 在沿着主光线的某些点上。这些面的顶点附近的小的圆区域，称为细光束区域，这些小的圆区域的曲率和倾斜决定了点 C 的位置。因此点 C 的位置仅由线性项和二次项决定。线性项决定了主光线的传播方向，而二次项决定了点 C 在主光线上的位置。从另一方面看，二次项仅仅对应了离焦和初级像散项。

我们看到，如果离焦和像散都是 0，参考球面将是密切球面，指在它们共同的顶点处波面有相同曲率的球面。离焦的存在将引起波面细光束曲率与参考球面曲率的不同。

7.3.1　共轴系统的霍普金斯波像差多项式

现在，我们限定自己只考虑物在 y 轴上的共轴系统，也称为轴对称系统，所产生的波面。波面关于子午面或光轴面是对称的，得到

$$W(S,\theta)=\sum_{n=0}^{N}\sum_{l=0}^{n}a_{nl}S^n\cos^l\theta \tag{7-12}$$

式中，由于共轴系统关于子午面对称，出于方便，角 θ 被选为在入瞳处对 y 轴的夹角。波面变形随像高 h 改变。故系数 a_{nl} 是像高的函数，也可以写为多项式

$$a_{nl}=\sum_{k=0}^{K}w_{knl}h^k \tag{7-13}$$

式中，K 是像高 h 的最高次数。按照霍普金斯（Hopkins）（1950）的研究，如果我们将 h 代入式（7-12）中，并满足条件

$$W(S,\theta,h)=W(S,-\theta,h) \tag{7-14}$$

由于关于子午面的对称性

$$W(S,\theta,h)=W(S,\theta+\pi,-h) \tag{7-15}$$

由于系统关于光轴的旋转对称性，波面表达式中应该只会存在如下项

$$\begin{aligned}F_1&=h^2\\F_2&=S^2\\F_3&=hS\cos\theta\end{aligned} \tag{7-16}$$

以及它们的积。一个有趣的结果是，S 和 h 的指数和总为偶数，这个值减去 1 等于像差的阶数。换一种表达方式，像差的阶数，由 S 和 h 的指数按 $(n+k)-1$ 规则决定，见表 7-1。波像差 $W(S, \theta, h)$ 可以用这些像差项 $w_{knl}S^n h^k \cos^l\theta$ 的线性组合表示，其中，k 是像高 h 的次数，n 是孔径半径 S 的次数，l 是 $\cos\theta$ 的次数，且满足 $l \leqslant n$。

表 7-1　五阶像差的霍普金斯系数

一阶系数（$n+k=2$）		w_{000}		平移
	F_1	w_{200}	h^2	平移
	F_2	w_{020}	S^2	离焦
	F_3	w_{111}	$Sh\cos\theta$	绕 x 轴倾斜
三阶系数（初级像差）（$n+k=4$）	F_1F_1	w_{400}	h^4	平移
	F_1F_3	w_{311}	$Sh^3\cos\theta$	畸变
	F_1F_2	w_{220}	S^2h^2	场曲
	F_3F_3	w_{222}	$S^2h^2\cos^2\theta$	像散
	F_2F_3	w_{131}	$S^3h\cos\theta$	慧差
	F_2F_2	w_{040}	S^4	球差
五阶系数（$n+k=6$）	$F_1F_1F_1$	w_{600}	h^6	平移
	$F_1F_1F_3$	w_{511}	$Sh^5\cos\theta$	五阶畸变
	$F_1F_1F_2$	w_{420}	S^2h^4	五阶场曲
	$F_1F_3F_3$	w_{422}	$S^2h^4\cos^2\theta$	五阶像散
	$F_1F_2F_3$	w_{331}	$S^3h^3\cos\theta$	椭圆慧差
	$F_3F_3F_3$	w_{333}	$S^3h^3\cos^3\theta$	椭圆慧差（三角像散）
	$F_1F_2F_2$	w_{240}	S^4h^2	斜球差
	$F_2F_3F_3$	w_{242}	$S^4h^2\cos^2\theta$	斜球差
	$F_2F_2F_3$	w_{151}	$S^5h\cos\theta$	五阶慧差
	$F_2F_2F_2$	w_{060}	S^6	五阶球差

每一项都对应一个名称，但并不是所有的高阶项都有。不幸的是像差系数的名称还没有广泛统一。但也有人用它们来代表波像差（Geary，2002；Hopkins，1950；Sasian，2006）。下面列举了常见的名称：

1）球差：与 θ 无关的项（$k=0$）。

2）彗差：$\cos\theta$ 的奇次项（k 为奇数）。

3）像散：$\cos\theta$ 的偶次项（k 为偶数）。

举一个例子，五阶像差 $w_{333}S^3h^3\cos^3\theta$ 称为椭圆彗差，因为，在图 7-6 中，它使出瞳处的圆形像变为像面的椭圆像。有时，这种像差被望远镜制造者称为三角像散，因为它在轴上表现出轻微不同形式，三角形形状的变形，这是由于反射镜的变形，而不是由像的离轴偏移引起的。

共轴系统五阶以下的波像差（Kidger，2004）可以表示为表 7-1 中霍普金斯像差的线性组合，如下：

$$
\begin{aligned}
W(S,\theta,h) = {} & w_{000} + w_{020}S^2 + w_{200}h^2 + w_{111}Sh\cos\theta + \\
& w_{400}h^4 + w_{311}Sh^3\cos\theta + w_{220}S^2h^2 + w_{222}S^2h^2\cos^2\theta + \\
& w_{131}S^3h\cos\theta + w_{040}S^4 + w_{600}h^6 + w_{511}Sh^5\cos\theta + \\
& w_{420}S^2h^4 + w_{422}S^2h^4\cos^2\theta + w_{331}S^3h^3\cos\theta + w_{333}S^3h^3\cos^3\theta + \\
& w_{240}S^4h^2 + w_{242}S^4h^2\cos^2\theta + w_{151}S^5h\cos\theta + w_{060}S^6
\end{aligned} \tag{7-17}
$$

用直角坐标 x，y 写出像差多项式，并按 x^jy^k 合并同类项：

$$
\begin{aligned}
W(x,y,h) = {} & (w_{000} + w_{200}h^2 + w_{400}h^4 + w_{600}h^6) + (w_{111}h + w_{311}h^3 + w_{511}h^5)y + \\
& (w_{020} + w_{220}h^2 + w_{420}h^4)(x^2+y^2) + (w_{222}h^2 + w_{422}h^4)y^2 + \\
& (w_{131}h + w_{331}h^3)y(x^2+y^2) + (w_{040} + w_{240}h^2)(x^2+y^2)^2 + \\
& w_{333}h^3y^3 + w_{242}h^2y^2(x^2+y^2) + w_{151}hy(x^2+y^2)^2 + w_{060}(x^2+y^2)^3
\end{aligned} \tag{7-18}
$$

如果初级像散存在，波面顶点曲率不是单值的。如果离焦项为 0，存在好几个点 C 的可能位置：

1）如果像散项是 y^2，位于细光束弧矢焦点。

2）如果像散项是 x^2，位于细光束子午焦点。

3）如果像散项是（y^2-x^2），位于弧矢焦点和子午焦点间的最佳焦点位置。

4）如果像散项是（x^2+3y^2），位于佩兹伐焦点。这是根据子午焦点和弧矢焦点到佩兹伐焦点的距离比为 1∶3 而得出的结论。

为了选择需要的点 C 位置，我们要在像散项中引入合适的离焦量。例如，为了让参考球面 C 的曲率中心从细光束弧矢焦点移动到最佳焦点位置，我们可以通过式(7-19)替代 y^2，引入离焦量：

$$
y^2 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}(y^2-x^2) \tag{7-19}
$$

正如前面所说的，任意不为 0 的离焦项，会引起点 C 沿着主光线的平移。

7.3.2　共轴系统的 Kingslake 波像差多项式

当测量或分析光学系统波像差时，像高可以看成是常数。对于这种情况，Kingslake（1925－1926）提出不出现像高项的多项式。这样，多项式可以写为如下形式：

$$
\begin{aligned}
W(x,y) = {} & A + By + C(y^2+x^2) + D(y^2-x^2) + Ey(y^2+x^2) + F(y^2+x^2)^2 + \\
& Gy(y^2-x^2) + Hy^2(y^2+x^2) + Jy(y^2-x^2)^2 + K(y^2+x^2)^3
\end{aligned} \tag{7-20}
$$

或者在极坐标中，

$$
\begin{aligned}
W(S,\theta) = {} & A + BS\cos\theta + CS^2 + DS^2\cos2\theta + ES^3\cos\theta + FS^4 + \\
& GS^3\cos2\theta + HS^4\cos\theta + JS^5\cos\theta + KS^6
\end{aligned} \tag{7-21}
$$

Kingslake 仅仅采用了初级像差系数，但我们在这里加入了一些高阶像差。A、B、C、D、E、F、G、H、J 和 K 这些系数可以用 Hopkins 系数表达

$$
\begin{aligned}
A &= (w_{000} + w_{200}h^2 + w_{400}h^4 + w_{600}h^6) \\
B &= (w_{111}h + w_{311}h^3 + w_{511}h^5) \\
C_0 &= (w_{020}) \\
C_h &= [(w_{220} + 0.5w_{222})h^2 + (w_{420} + 0.5w_{422})h^4] \\
D &= 0.5(w_{222}h^2 + w_{422}h^4) \\
E &= (w_{131}h + w_{331}h^3) \\
F_0 &= w_{040} \\
F_h &= w_{240}h^2 \\
G &= 0.5w_{333}h^3 \\
H &= w_{242}h^2 \\
J &= w_{151}h \\
K &= w_{060}
\end{aligned} \tag{7-22}
$$

这些常数的意义如下：

A 是相位平移项，代表固定大小的相位平移，它的值是像高 h 的函数。这一常数项不影响成像。

B 表示波面在 y 方向上，绕 x 轴的倾斜。在这里，常数 w_{111} 由系统放大率决定，常数 w_{311} 代表3阶畸变而常数 w_{511} 代表5阶畸变。

C_0 是整个像面的离焦量。

C_h 是轴外像点的离焦量，其中，w_{220} 和 w_{222} 代表3阶场曲，而 w_{420} 和 w_{422} 代表5阶场曲。

D 是像散，w_{222} 和 w_{422} 代表它的3阶和5阶分量。

E 是彗差，其中，w_{131} 和 w_{331} 是3阶彗差和椭圆彗差。

F_0 代表初级球差。

F_h 代表高阶轴外球差。

G 是椭圆彗差的另一分量。

H 是轴外球差的另一分量。

J 是5阶彗差。

K 是5阶球差。

如果我们引入合适的离焦，使佩兹伐焦点作为参考球面的曲率中心，波像差多项式变为

$$
\begin{aligned}
W(x,y) = {} & A + By + C(y^2 + x^2) + D(3y^2 + x^2) + Ey(y^2 + x^2) + F(y^2 + x^2)^2 + \\
& Gy(y^2 - x^2) + Hy^2(y^2 + x^2) + Jy(y^2 - x^2)^2 + K(y^2 + x^2)^3
\end{aligned} \tag{7-23}
$$

式中，$C = C_0 + C_h$ 和 $F = F_0 + F_h$。在极坐标中，我们可以写为

$$
\begin{aligned}
W(S,\theta) = {} & A + BS\cos\theta + CS^2 + DS^2(2 + \cos2\theta) + ES^3\cos\theta + FS^4 + \\
& GS^3\sin2\theta + HS^4\cos^2\theta + JS^5\cos\theta + KS^6
\end{aligned} \tag{7-24}
$$

7.3.3　共轴系统的塞德尔波像差多项式

根据我们第 6 章讲述的内容，塞德尔（Seidel）建立了初级像差理论。按照他的记法，波像差多项式应该写为

$$
\begin{aligned}
W(x,y,h) = &\frac{1}{4}\sigma_1(x^2+y^2)^2+\sigma_2(x^2+y^2)yh+\\
&\frac{1}{2}\sigma_3(x^2+3y^2)h^2+\frac{1}{2}\sigma_4(x^2+y^2)h^2+\sigma_5 yh^3
\end{aligned}
\tag{7-25}
$$

或在极坐标下

$$
\begin{aligned}
W(S,\theta,h) &= \frac{1}{4}\sigma_1 S^4+\sigma_2 S^3 h\cos\theta+\frac{1}{2}\sigma_3 S^2h^2(2+\cos 2\theta)+\frac{1}{2}\sigma_4 S^2h^2+\sigma_5 Sh^3\cos\theta\\
&= \frac{1}{4}\sigma_1 S^4+\sigma_2 S^3 h\cos\theta+\sigma_3 S^2h^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}(\sigma_3+\sigma_4)S^2h^2+\sigma_5 Sh^3\cos\theta
\end{aligned}
\tag{7-26}
$$

式中，σ_1、σ_2、σ_3、σ_4 和 σ_5 分别是球差、彗差、像散、佩兹伐场曲和畸变的系数。像散包含一定量的离焦，以便使参考球面为佩兹伐曲面。通常塞德尔系数可以写为 $S_{\mathrm{I}}=2\sigma_1$、$S_{\mathrm{II}}=2\sigma_2$、$S_{\mathrm{III}}=2\sigma_3$、$S_{\mathrm{IV}}=2\sigma_4$ 和 $S_{\mathrm{V}}=2\sigma_5$，这些系数可以按下述公式计算

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{I}} &= -\sum_{j=1}^{k}(ni)^2 y\left(\frac{u'}{n'}-\frac{u}{n}\right)\\
S_{\mathrm{II}} &= -\sum_{j=1}^{k}n^2 i\bar{i}y\left(\frac{u'}{n'}-\frac{u}{n}\right)\\
S_{\mathrm{III}} &= -\sum_{j=1}^{k}(n\bar{i})^2 y\left(\frac{u'}{n'}-\frac{u}{n}\right)\\
S_{\mathrm{IV}} &= -\sum_{j=1}^{k}\frac{(nhu)^2}{r}\left(\frac{u'}{n'}-\frac{u}{n}\right)\\
S_{\mathrm{V}} &= -\sum_{j=1}^{k}\left\{\frac{(n\bar{i})^3}{ni}y\left(\frac{u'}{n'}-\frac{u}{n}\right)+\frac{n\bar{i}}{ni}\frac{(nhu)^2}{r}\left(\frac{1}{n'}-\frac{1}{n}\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{7-27}
$$

理论上，这些系数是根据第 6 章中像差贡献值计算得到的。然而，直接推导更简单，因为第 6 章中的像差系数指光线垂轴像差，而塞德尔系数是按 7.7 节中类似的步骤通过计算光程差推导得到的。这些系数推导过程细节可以在一些参考书中找到，如 Welford（1964）的书中。调整这些系数形式意见已经被提出过好几次（Mikš，2002）。

7.3.4　共轴系统的高阶 Buchdahl 像差多项式

第 6 章研究的理论对设计小视场小孔径的光学系统非常有用。如果视场的尺寸并不小，那么高阶像差会严重影响成像。这部分内容，我们将更详细地研究这些高阶像差。一些垂轴像差多项式由 Buchdahl（1954，1956，1958a，1958b，1958c，1959，1960a，1960b，1960c，1961，1662a，1962b，1965，1970）以及 Cruickshank 和 Hills（1960）给出，他用塞德尔系数表示初级像差，他的系数表示高阶像差。它们现在广泛应用于商业透镜设计和评估软件中。具体表达式如下：

$$TA_y(S,\theta,h) = \sigma_1 S^3\cos\theta + \sigma_2(2+\cos 2\theta)hS^2 + (3\sigma_3+\sigma_4)h^2 S\cos\theta + \sigma_5 h^3 + \mu_1 S^5\cos\theta + (\mu_2+\mu_3\cos 2\theta)hS^4 + (\mu_4+\mu_6\cos^2\theta)h^2S^3\cos\theta + (\mu_7+\mu_8\cos 2\theta)h^3S^2 + \mu_{10}h^4 S\cos\theta + \sigma_5 h^3 + \mu_{12}h^5 \tag{7-28}$$

$$TA_x(S,\theta,h) = \sigma_1 S^3\sin\theta + \sigma_2 hS^2\sin 2\theta + (\sigma_3+\sigma_4)h^2 S\sin\theta + \mu_1 S^5\sin\theta + \mu_3 hS^4\sin 2\theta + (\mu_5+\mu_6\cos^2\theta)h^2S^3\sin\theta + \mu_9 h^3S^2\sin 2\theta + \mu_{11}h^4 S\sin\theta \tag{7-29}$$

式中，σ_i 是5个初级像差的系数，μ_i 是9个5阶像差的 Buchdahl 系数。我们有12个 Buchdahl 系数，但只有9个独立的5阶像差。这说明（Cruickshank 和 Hills，1960）在三阶像差被补偿的系统中，这些系数间存在如下关系：

$$\mu_2 = \frac{3}{2}\mu_3 \qquad \mu_4 = \mu_5 + \mu_6 \qquad \mu_7 = \mu_8 + \mu_9 \tag{7-30}$$

用上述关系，我们可以将系数的个数减少到9个，但这些12个系数具有更易理解的含义。Steward（1928）详细地说明了这些像差所成像的形状结构。这些5阶像差如下：

1. 球差

从式（7-28）和式（7-29）中得到，初级和5阶垂轴球差为

$$TA_y(S,\theta,h) = \sigma_1 S^3\cos\theta + \mu_1 S^5\cos\theta \tag{7-31}$$

$$TA_x(S,\theta,h) = \sigma_1 S^3\sin\theta + \mu_1 S^5\sin\theta \tag{7-32}$$

这两个表达式不受像高 h 影响。因为系统的旋转对称性，TA_x 和 TA_y 的形式相同。关于球差更详细的内容，可以参考第5章。

2. 彗差

初级和5阶垂轴彗差，有时也称为线性彗差，写为

$$TA_y(S,\theta,h) = \sigma_2(2+\cos 2\theta)hS^2 + (\mu_2+\mu_3\cos 2\theta)hS^4 \tag{7-33}$$

$$TA_x(S,\theta,h) = \sigma_2 hS^2\sin 2\theta + \mu_3 hS^4\sin 2\theta \tag{7-34}$$

初级彗差已经在第6章中详细讨论过了。初级彗差和5阶彗差的结构十分相似，仅在尺寸上有略微差别，如图7-3所示。我们从式（7-30）中得到 μ_2 和 μ_3 的固定关系。

3. 像散

初级和5阶垂轴像散，也称为线性像散，写为

$$TA_y(S,\theta,h) = (3\sigma_3+\sigma_4)h^2 S\cos\theta + \mu_{10}h^4 S\cos\theta \tag{7-35}$$

$$TA_x(S,\theta,h) = (\sigma_3+\sigma_4)h^2 S\sin\theta + \mu_{11}h^4 S\sin\theta \tag{7-36}$$

塞德尔分量（第1项）是位于佩兹伐面（σ_3）具有合适离焦（σ_4）的初级像散，以便把像平移到高斯像平面上。初级像散随像高的2次方增加，而5阶像散随像高的4

次方增加。如图 7-4 所示，初级像散所成的像和高阶像散所成的像一样，在佩兹伐面都是椭圆形状。该面上的长半轴和短半轴的值分别为 μ_{10} 和 μ_{11}。

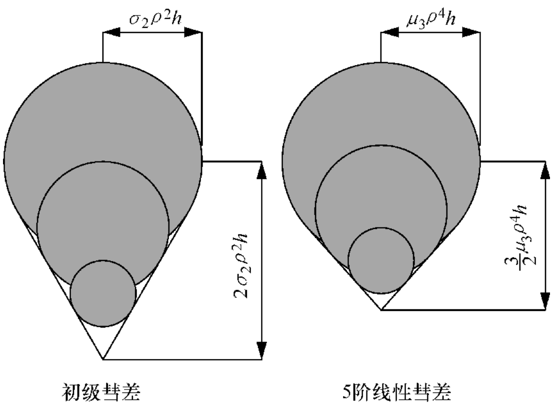


图 7-3　初级和 5 阶线性彗差的像结构

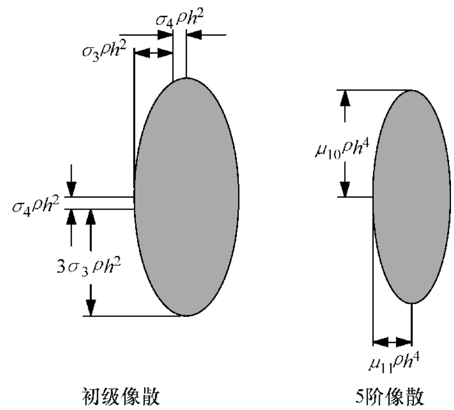


图 7-4　初级和 5 阶像散的像结构

4. 畸变

对于初级和 5 阶畸变，垂轴像差是

$$TA_y(S,\theta,h)=\sigma_5 h^3+\mu_{12}h^5 \tag{7-37}$$

$$TA_x(S,\theta,h)=0 \tag{7-38}$$

这种像差使像点沿 y 方向平移。成像畸变的出现是由于这个平移量不随像高线性变化。

5. 轴外球差

这种像差被广泛称为轴外球差；根据 Cruickshank 和 Hills（1960）的观点，按照霍普金斯的建议，它被称为 3 次方像散更加合适。轴外球差对应的垂轴像差为

$$TA_y(S,\theta,h)=(\mu_4+\mu_6\cos^2\theta)h^2S^3\cos\theta \tag{7-39}$$

$$TA_x(S,\theta,h)=(\mu_5+\mu_6\cos^2\theta)h^2S^3\sin\theta \tag{7-40}$$

图 7-5 展示了几个不同比值 μ_5/μ_6，对应的像的结构形状。根据 Cruickshank 和 Hills（1960）的看法，这种像差十分重要，它可能是中等或大视场物镜轴外分辨率的限制因素。

6. 椭圆彗差

最后，椭圆彗差的垂轴像差为

$$TA_y(S,\theta,h)=(\mu_7+\mu_8\cos2\theta)h^3S^2 \tag{7-41}$$

$$TA_x(S,\theta,h)=\mu_9h^3S^2\sin2\theta \tag{7-42}$$

该像差的像结构类似于初级彗差，如图 7-6 所示。主要的差别在椭圆彗差随像高的立方增加，而初级彗差随像高线性增加。另一个区别是，通过出瞳上同一圆环的光线，形成的是椭圆形状。仅仅在 $\mu_8/\mu_9=1$ 时，为圆形。决定成像的三个系数并不是线性无关的，它们间存在关系式（7-30）。

通过评估子午和弧矢光线图给出的 Buchdahl 垂轴像差，对光学系统进行计算机分析的过程将在下一章讲解。

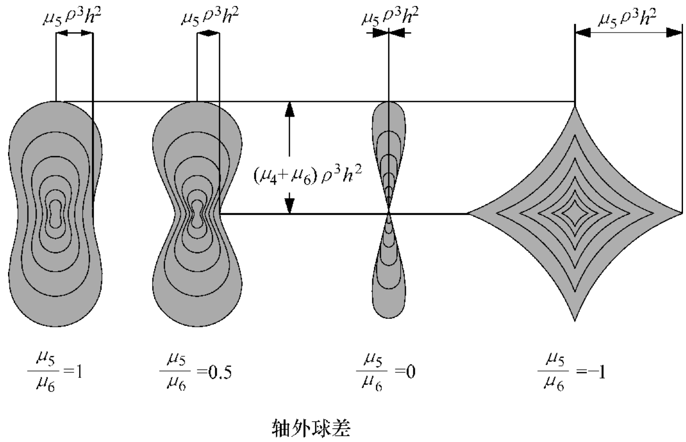


图 7-5　轴外球差的像结构

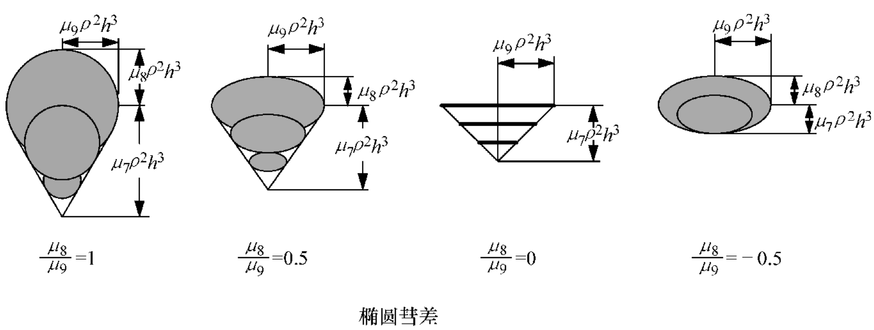


图 7-6　椭圆彗差的像结构

7.3.5　非共轴对称系统的波像差多项式

往往那些不假设光学系统对称而得到的更普遍的表达式是很有用的。真实系统并不完美的实际情况导致了这种需求。它们可能存在透镜偏心、倾斜和光学面瑕疵的问题。

最高次数为 n 时，一定会有一组 $(n+2)(n+1)/2$ 项线性无关多项式。换句话说，没有多项式可以表示为其他几项的线性组合。

我们为所有次数等于 n 的项定义序号 m，它的值从 0 开始，最后一项等于 n。这样，整组多项式的所有项可以用单个序号 r，指定顺序：

$$r = \frac{n(n+1)}{2} + m + 1 \tag{7-43}$$

反向过程，已知 r 的值，确定对应的 n 和 m 的值，能写为下述表达式

$$n = 大于\frac{-3+(1+8r)^{1/2}}{2}的最小整数;\ m = r - \frac{n(n+1)}{2} - 1 \tag{7-44}$$

如果我们把中间焦点作为参考球面的曲率中心，将得到表 7-2 中的多项式。波前多项式成为这些多项式的线性组合，如下：

$$\begin{aligned} W(x,y) = {} & A_0 + A_1 x + A_2 y + A_3(y^2+x^2) + A_4(y^2-x^2) + A_5 xy + \\ & A_6 x(x^2+y^2) + A_7 y(x^2+y^2) + A_8 x(y^2-x^2) + \\ & A_9 y(y^2-x^2) + A_{10}(x^2+y^2)^2 + A_{11}x^2y^2 + A_{12}xy(x^2+y^2) + \\ & A_{13}xy(y^2-x^2) + A_{14}(y^4-x^4) + A_{15}x(y^2+x^2)^2 + \\ & A_{16}y(y^2+x^2)^2 + A_{17}x(y^2-x^2)^2 + A_{18}y(y^2-x^2)^2 + A_{19}(y^2+x^2)^3 \end{aligned} \tag{7-45}$$

这些多项式中的一部分，包括一项高阶像差，已经在图 7-7 的等尺度图中展示出来。

注意到有趣的一点，用第 5 章中的像差系数计算的像差，和用波像差计算的像差具有相反的符号规律约定。

表 7-2　参考球的球心位于副焦点时像差的 5 阶多项式表达式

n	m	r	笛卡儿坐标	极坐标	像差类型
0	0	1	1	1	平移
1	0	2	x	$S\sin\theta$	绕 y 轴倾斜
	1	3	y	$S\cos\theta$	绕 x 轴倾斜
2	0	4	y^2+x^2	S^2	离焦
	1	5	yx	$S^2\sin\theta\cos\theta$	±45°方向像散
	2	6	y^2-x^2	$S^2\cos2\theta$	0°或 90°像散
3	0	7	$x(y^2+x^2)$	$S^3\sin\theta$	沿 x 轴的彗差
	1	8	$y(y^2+x^2)$	$S^3\cos\theta$	沿 y 轴的彗差
	2	9	$x(y^2-x^2)$	$S^3\sin\theta\cos2\theta$	三角像散 30°，150°，270°
	3	10	$y(y^2-x^2)$	$S^3\cos\theta\cos2\theta$	三角像散 0°，120°，240°
4	0	11	$(x^2+y^2)^2$	S^4	球差
	1	12	$xy(y^2+x^2)$	$0.5S^4\sin2\theta$	45°方向 5 阶像散
	2	13	y^4-x^4	$S^4\cos2\theta$	0°或 90°方向 5 阶像散
	3	14	y^2-x^2	$S^4\sin^2\theta\cos^2\theta$	±45°烟灰缸
	4	15	$xy(y^2-x^2)$	$0.25S^4\sin4\theta$	22.5°烟灰缸

注：θ 角是与 y 轴的夹角。

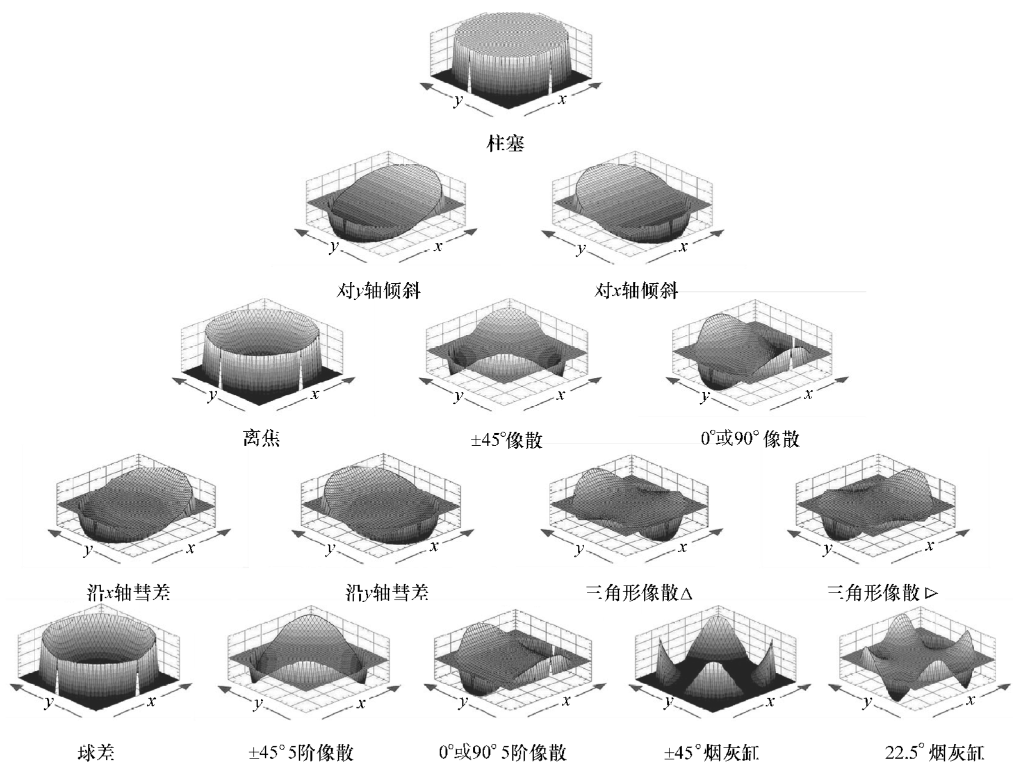


图 7-7　表 7-2 中像差多项式的等尺度图

7.4　泽尼克多项式

在这部分，我们讲述泽尼克波像差多项式。与 Kingslake 像差多项式类似，它们明显不与像高有关。

前面已经指出，波像差多项式能指定任意参考球面。之前定义的多项式，其参考球面波的中心在近轴（小孔径）最佳焦点或在佩兹伐焦点。然而，很多次，选择中心在全孔径最佳焦点处的参考球面更好。由于非对称像差存在，如彗差，使像偏离了主光线，最佳焦点位置并不需要位于主光线上。

指出很重要的一点，“最佳”成像位置能够用两种不同原则确定：

1）像的位置，能最小化垂轴像差，得到一个最小的几何像点。

2）像的位置，具有最小波像差。广泛使用的泽尼克多项式就是按照这种原则确定参考球面在最佳成像位置。

通过加入合适数量的平移、倾斜、离焦或低阶像差项，得到与像差多项式偏差最小的参考球面。按照这种思路最小化波像差多项式和参考球面间差异值的最大优势是，整

个波面和每一个单项都被最小化。这样，可以通过减少或增加它们中的项维持最小化的结果。数学证明，这种性质等价于所有项彼此正交。

这类多项式可以用下列两种方法推导出：

1）将平移项、倾斜、离焦或一个低阶项作为最小化变量，找出使这些项最小的最佳球面。

2）构造一组在光瞳面内相互正交的多项式。

我们现在简单描述这种多项式的表现形式（Kim 和 Shannon，1987；Mahajan，2007；Malacara 和 DeVore，1992；Wyant 和 Creath，1992）。泽尼克多项式在极坐标中表示为两个函数的乘积，一个是光瞳径向距离的函数，另一个是关于 y 轴的夹角函数。这个夹角函数有时是一个复杂的函数，但有另一种规则，将夹角函数表示为一个对称函数与一个非对称函数的和。按照这种规则，泽尼克多项式表示为 $U(\rho,\ \theta)$。角 θ 是关于 y 轴的夹角，与大部分光学设计书一致，这样可以在关于子午面对称的共轴系统中方便应用。也有一些作者按解析几何的做法，选择与 x 轴的夹角，例如，Mahajan（2007）。泽尼克多项式在单位圆（半径为 1 的出瞳）上正交，极坐标中的正交条件写为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} U_n^l U_{n'}^{l'} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \frac{(1+\delta_{l0})}{2(n+1)}\delta_{nn'}\delta_{ll'} \text{ 或 } \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} U_n^l U_{n'}^{l'} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \delta_{nn'}\delta_{ll'} \tag{7-46}$$

式中，$\rho = S/S_{\max}$。第一个条件要求多项式是正交的，但第二个条件，由于表达式右边为单位常数，被称为标准正交。在这我们讨论的是正交多项式。当然，如果需要，标准正交多项式可以通过正交多项式乘上等于 2（$n+1$）平方根倒数的常数。

泽尼克多项式用 n 和 l 两个序号表示，代表两个坐标。序号 n 代表径向多项式的次数，而 l 是角度函数的序号。n 和 l 同时为偶或为奇，使 $n-l$ 始终是偶数，如 7.3 节中所讲述的满足式（7-11）。存在$\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$个线性无关的次数小于 n 的多项式 U_n^l，每一项对应一对 n 和 l。上文指出，这些多项式是两个函数的积，一个取决于半径 ρ，另一个仅由角 θ 决定，如下：

$$U_n^l = R_n^l \begin{bmatrix}\sin\\ \cos\end{bmatrix} l\theta = U_n^{n-2m} = R_n^{n-2m}\begin{bmatrix}\sin\\ \cos\end{bmatrix}(n-2m)\theta \tag{7-47}$$

式中，$l=n-2m$ 而正弦项出现在 $n-2m>0$ 时（非对称函数），余弦项出现在 $n-2m<0$（对称函数）。这样，在共轴光学系统中，所有正弦项为 0，而仅仅存在余弦项。径向项 $R_n^l(\rho)$ 的次数为 n 并且 $0\leqslant m \leqslant n$。这说明 $|l|$ 是项 R_n^l 的最小指数。径向项写为

$$\begin{aligned} R_n^{n-2m}(\rho) &= R_n^{-(n-2m)}(\rho) \\ &= \sum_{s=0}^{m}(-1)^s \frac{(n-s)!}{s!(m-s)!(n-m-s)!}\rho^{n-2s} \end{aligned} \tag{7-48}$$

按之前讲述的波像差多项式，泽尼克多项式 $U_n(\rho)$ 也可以按式（7-43）的定义，用单个序号 r 表示。已知 r 的值，求 n 和 m 的值，可以运用式（7-44）。表 7-3 列出了前 15 项泽尼克多项式。图 7-8 展示了一些泽尼克多项式的等尺度图。

表 7-3　至 5 阶的正交泽尼克多项式

n	m	r	笛卡儿坐标	极坐标	像差类型
0	0	1	1	1	平移
1	0	2	x	$\rho\sin\theta$	绕 y 轴倾斜
	1	3	y	$\rho\cos\theta$	绕 x 轴倾斜
2	0	4	$2xy$	$\rho^2\sin2\theta$	±45°方向初级像散
	1	5	$-1+2y^2+2x^2$	ρ^2-1	离焦
	2	6	y^2-x^2	$\rho^2\cos2\theta$	0°或 90°方向初级像散
3	0	7	$3xy^2-x^3$	$\rho^3\sin3\theta$	三角像散 30°，150°，270°
	1	8	$-2x+3xy^2+3x^3$	$(3\rho^3-2\rho)\sin\theta$	x 轴方向彗差
	2	9	$-2y+3y^3+3x^2y$	$(3\rho^3-2\rho)\cos\theta$	y 轴方向彗差
	3	10	y^3-3x^2y	$\rho^3\cos3\theta$	三角像散 0°，120°，240°
4	0	11	$4y^3x-4x^3y$	$\rho^4\sin4\theta$	22. 5°烟灰缸
	1	12	$-6xy+8y^3x+8x^3y$	$(4\rho^4-3\rho^2)\sin2\theta$	45°方向 5 阶像散
	2	13	$1-6y^2-6x^2+6y^4+12x^2y^2+6x^4$	$6\rho^4-6\rho^2+1$	球差
	3	14	$-3y^2+3x^2+4y^2-4x^2$	$(4\rho^4-3\rho^2)\cos2\theta$	0°或 90°方向 5 阶像散
	4	15	$y^4-6x^2y^2+x^4$	$\rho^4\cos4\theta$	0°烟灰缸

注：θ 角是与 y 轴的夹角。

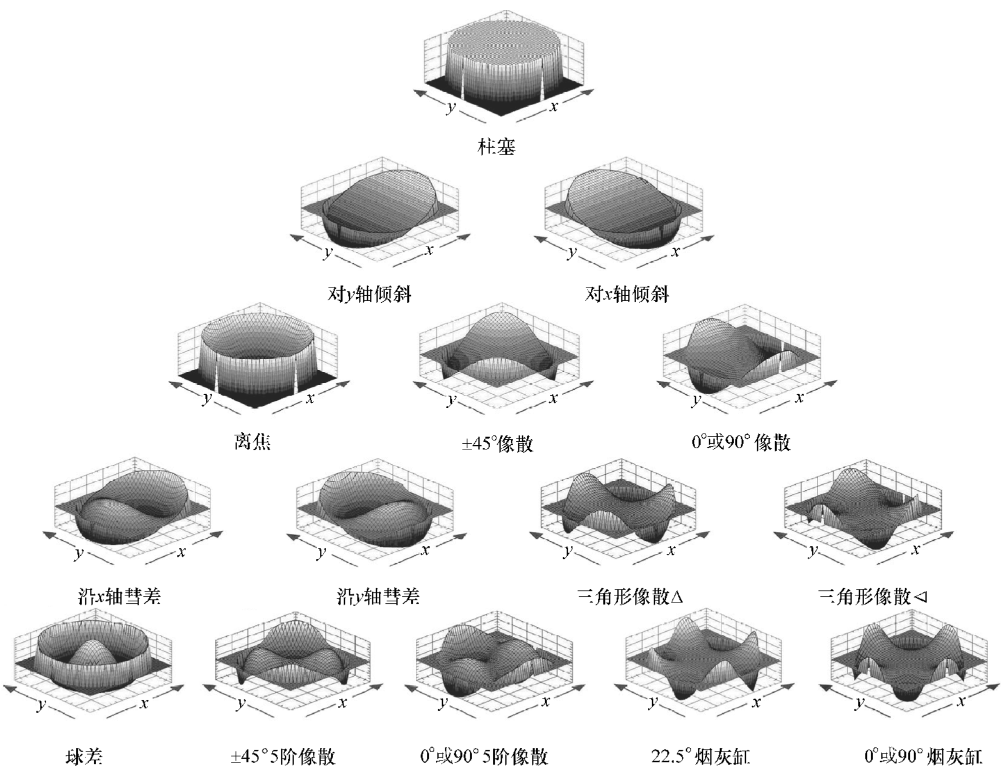


图 7-8　表 7-8 中泽尼克多项式的等尺度图

一个与 x 轴成 10°角的彗差，可以表示为沿 y 轴的彗差（$r=9$）和沿 x 轴的彗差（$r=8$）的组合。根据 Malacara（1983）的结论，这两项可以组合为一项，其中方向角作为一个参数，组合像差的大小作为另一个参数。

三角形和“烟灰缸”像散可以形成一个在上端支撑，三或四个支撑点沿边缘均匀分布的弹性圆盘所成的形状。然而，根据 Hopkins 的注释，这个有时被称为三角形像散的像差，确实是彗差项（椭圆彗差）。应该指出的是，根据式（7-46），仅仅当光瞳是圆形，没有任何中心遮挡时，这些多项式都是正交的。表 7-3 列出了从第 1 项正交（非标准正交，由于省略标准正交常数）泽尼克多项式，一直到第 5 阶的。如果想找标准正交泽尼克多项式列表，参看 Mahajan（2007）。

任何连续的波面形状 $W(\rho,\theta)$ 可以用泽尼克多项式的线性组合表示，如下：

$$W(\rho,\theta) = \sum_{n=0}^{k}\sum_{m=0}^{n} A_{nm}U_{nm} = \sum_{r=1}^{L} A_r U_r \tag{7-49}$$

给定了用于表示波面的泽尼克多项式的项数 L，系数 A_r 通过几个可能的步骤获得，使式（7-52）中定义的拟合差异为最小值。

根据正交条件，式（7-46）左边部分表达式，波面相对于参考球面变形的均方根值（rms），σ_U^2，可以通过在整个光瞳上的积分得到对每一项泽尼克多项式的均方根值：

$$\sigma_{Ur}^2 = \frac{\int_0^1\int_0^{2\pi} U_r^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}{\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} U_r^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \frac{(1+\delta_{l0})}{2(n+1)} \tag{7-50}$$

式中，r 对应的 n 值可以由式（7-44）计算得出。

按照之前的描述，每一项泽尼克多项式是在每种像差项中，加入合适大小的平移、倾斜、离焦和其他低阶像差，使式（7-50）中定义的每个泽尼克项的面形偏差均方根值 σ_{Ur}^2 最小化。举个例子，让我们分析球差对应的项，可以看到 $+1$ 项（平移项）和 $-6\rho^2$ 项（离焦项）被加入到球差项 $6\rho^4$ 中。这些项最小化了多项式的 σ_U^2 值。

用一组正交多项式的线性组合表示波面的好处是，每一项对波面差异值的表示都是最佳拟合的。这样，它们的线性组合也是最佳拟合的。

再次运用正交条件式（7-46），我们可以看到所有的泽尼克项都是正交于第一项，平移项，其值为 1。根据这个现象，可以得到结论，每一泽尼克项的波面变形平均值为

$$\begin{aligned} U_{av} &= \frac{\int_0^1\int_0^{2\pi} U_r\ \rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}{\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} U_r(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= 1 \qquad (r=1) \\ &= 0 \qquad (r>1) \end{aligned} \tag{7-51}$$

换句话说，除了平移项，所有泽尼克项波面平均值为 0。

7.5　波面变形拟合到多项式

在实际系统中，波面变形可以通过几种方法得到，例如，通过垂轴像差值的积分可以得到波面变形量，或者运用干涉仪，选择出瞳上几个离散点，直接测量波面变形值。一旦波面数据确定，由泽尼克多项式表示的波面解析式将通过2维的最小二乘法拟合得到。该过程在 Malacara 和 DeVore（1992）以及 Malacara 等（1990）中有所说明。

在获得了测量点拟合成的多项式，拟合误差指实际波面测量数据 W' 和解析波面 W 之间的差别。我们可以定义一个量，称为拟合误差 σ_f^2，表征拟合的质量，如下：

$$\sigma_f^2 = \frac{\int_0^1\int_0^{2\pi}(W'-W)^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}{\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(W'-W)^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \tag{7-52}$$

如果解析波面 W 是由泽尼克多项式 U_r 线性组合表示，拟合误差可以写为

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left(W' - \sum_{r=1}^{L}A_rU_r\right)^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \tag{7-53}$$

注意到，如果拟合误差为0，解析函数就是实际波面的准确表达。这意味着波面变形 W_{av} 可以定义为

$$W_{av} = \frac{\int_0^1\int_0^{2\pi}W(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}{\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}W(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \tag{7-54}$$

波面方差值 σ_w^2 定义为

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 &= \frac{\int_0^1\int_0^{2\pi}(W(\rho,\theta)-W_{av})^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta}{\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(W(\rho,\theta)-W_{av})^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}W^2(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta - W_{av}^2\end{aligned} \tag{7-55}$$

这代表了波面和参考球面间偏差的均方根值。我们前面解释过，参考球面波可以选为任意曲率半径（平移项），而不改变曲率中心位置和像的结构。尽管如此，波面方差值却会被这个选择所影响。消除这个问题的方法很简单，使定义波面方差值的参考球面位置与定义波面变形平均值的参考球面位置相同。这就是在式（7-55）中减去 W_{av}^2 的原因。这样，当波面 $W(\rho,\theta)$ 表示成式（7-49）的形式，波面方差值可以表示为

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{L}\frac{A_r^2}{n+1} - W_{av}^2 = \frac{1}{2}\sum_{r=2}^{L}\frac{A_r^2}{n+1} \tag{7-56}$$

7.6　高斯函数阵列表示波面

通常，波面的测量和计算，仅仅针对一些采样点，例如，在移相干涉仪中，又比如当在点列图中计算点阵上的光线。用解析式表示波面的需求就出现了。在这种情况下，可以运用泽尼克多项式。然而当存在尖锐的局部变形，用多项式来表示波面形状就不够精确了。解析表达式最大误差会发生在这种变形处和光瞳的边缘附近。如 Montoy – Hernández 等（1999）所得出的结论，在这种情况下，用高斯函数阵列构造解析表达式有更好的效果。让我们假设有一个 2 维的 $(2M+1)\times(2N+1)$ 的高斯函数阵列，如图 7-9 所示，间隔为 d。每个高斯函数的高度 w_{nm} 经调整，得到目标波面形状 $W(x,y)$，如下：

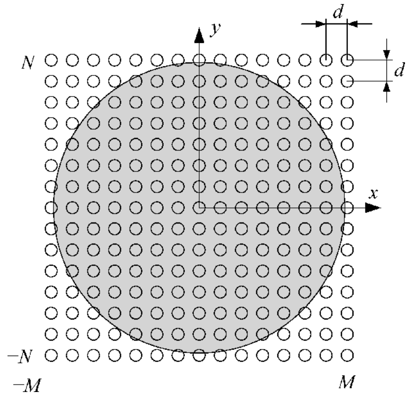


图 7-9　2 维高斯函数阵列抽样波面形状

$$W(x,y)=\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N}w_{nm}\mathrm{e}^{-[(x-md)^2+(y-nd)^2]/\rho^2} \tag{7-57}$$

函数 $W(x,y)$ 的傅里叶变换 $F\{W(x,y)\}$ 代表了波面的空间频率，写为

$$F\{W(x,y)\}=\pi\rho^2\mathrm{e}^{[-\pi^2\rho^2(f_x-f_y)]}\sum_{m=-M}^{M}\sum_{n=-N}^{N}w_{nm}\mathrm{e}^{-i2\pi d(mf_x-nf_y)} \tag{7-58}$$

间隔 d 和高斯函数宽度 ρ 是两个需要选择的重要参数。为了理解如何确定这些值，我们讨论图 7-10a 中，梳状函数 $h(x)$ 抽样 1 维函数 $g(x)$。我们设定函数 $g(x)$ 是带宽有限的，其最大空间频率为 $f_{\max}$。根据抽样定理，梳状抽样频率大于两倍 $f_{\max}$，这样函数 $g(x)$ 能被完全重建。

两个函数乘积的傅里叶变换等于两个函数的傅里叶变换的卷积，如下：

$$F\{g(x)h(x)\}=G(f)*H(f) \tag{7-59}$$

式中，符号 $*$ 是卷积运算符。

在图 7-10b 的傅里叶或频率空间中，一系列的半周正弦图形表示每一抽样函数的傅里叶变换。如果抽样频率高于 $2f_{\max}$，这些半周正弦图形将是分立的，没有重叠区域。理想状况下，它们应该是刚好相接。仅当所有半周正弦图形在傅里叶空间，除中心处外，所有半正弦图样用唯一半周正弦图形滤除，函数 $g(x)$ 能被完好地表示。

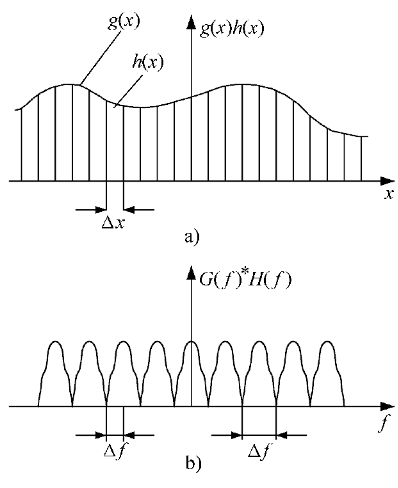


图 7-10　梳状函数抽样 1 维函数

为实施必需的空间滤波，梳状函数被高斯函数阵列取代，如图 7-11a 所示。在傅里

叶空间中，高斯函数的傅里叶变换为一个调制包络，滤除那些不需要的半周正弦图形，如图7-11b所示。要得到好的滤波效果，高斯函数的宽度ρ需近似等于阵列间隔d。

还剩下高斯函数高度w_{nm}需要确定。这能通过一个迭代过程完成。为了确定给定点的波面变形，并不需要考虑所有的高斯函数高度，因为高斯函数的值，随到该点的距离增加，衰减非常快。通过多次调整每个高斯函数的高度，使函数$g(x)$在那个点达到目标值。几步迭代就足够了。

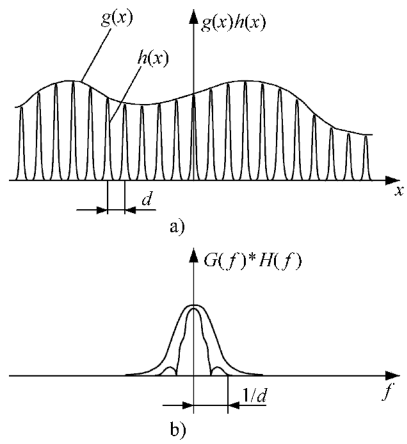


图7-11　高斯函数阵列抽样1维函数

7.7　折射面的波像差

根据费马原理，如果所成的像是完美的，那么从任意物点到它的像的所有光线路径光程是一个常数。然而如果所成的像包含像差，意味着光学系统出射的波面不是球面而存在一些变形（Miyamoto，1964）。当能够计算一个物点上足够多物到像的不同的光线路径光程，就可以算出这些像差。接下来关于计算点光源发出的球面波，与经折射球面后的光程差的内容可以在一些书本中找到，如Conrady（1960）的书和Schroeder（1987）的书。

让我们分析一个顶点在坐标原点的折射球面，如图7-12所示，方便起见所有的量都记为正。我们画出了两条原本会聚在虚物点B的光线（虚拟光路），经过折射球面后，形成了实际像点B'。折射前的主光线路径为$\overline{AB}$，折射后的为$\overline{AB'}$。入瞳位于光学面的顶点。另一条原本通过虚物点的光线是倾斜光线，折射前是$\overline{PB}$，折射后是$\overline{PB'}$。点P

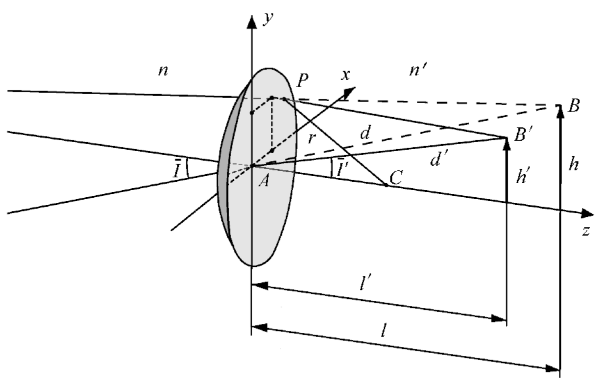


图7-12　光程及相关的光程差和波面（有彩色插图）

的坐标为 x，y，z。这两条光线的光程差为

$$\begin{aligned} OPD &= (n'\overline{PB'} - n\,\overline{PB}) - (n'\overline{AB'} - n\,\overline{AB}) \\ &= n'(\overline{PB'} - \overline{AB'}) - n(\overline{PB} - \overline{AB}) \end{aligned} \tag{7-60}$$

线段$\overline{PB}$可以表示为

$$\overline{PB}^2 = (l-z)^2 + (h-y)^2 + x^2 \tag{7-61}$$

式中，x、y 和 z 是光线折射处点 P 的坐标。主光线与折射面法线（当前情形，为光轴）夹角正弦和余弦值可以写为

$$\cos\bar{I} = \frac{l}{d};\cos\bar{I}' = \frac{l'}{d'};\sin\bar{I} = \frac{h}{d};\sin\bar{I}' = \frac{h'}{d'} \tag{7-62}$$

这样，我们发现

$$\overline{PB}^2 = d^2 - 2dz\cos\bar{I} - 2dy\sin\bar{I} + s^2 \tag{7-63}$$

然后，用泰勒展开式的前 2 项展开 z：

$$\overline{PB} = d\sqrt{1 - \left[2\left(\frac{z}{d}\right)\cos\bar{I} + 2\left(\frac{y}{d}\right)\sin\bar{I} - \left(\frac{s}{d}\right)^2\right]} \tag{7-64}$$

这个表达式是精确的。在泰勒展开式中展开，假设 $a << 1$：

$$\sqrt{1-a} = 1 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a^2 + \cdots \tag{7-65}$$

我们得到

$$\begin{aligned} \overline{PB} = d - y\sin\bar{I} - z\cos\bar{I} + \frac{s^2}{2d} - \frac{y^2}{2d}\sin^2\bar{I} + \\ \frac{ys^2}{2d^2}\sin\bar{I} - \frac{zy}{d}\cos\bar{I}\sin\bar{I} - \frac{z^2}{2d}\cos^2\bar{I} + \frac{zs^2}{2d^2}\cos\bar{I} \end{aligned} \tag{7-66}$$

位矢 z 的准确值为

$$z = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2r} = \frac{s^2}{2r} \tag{7-67}$$

将该值代入

$$\begin{aligned} \overline{PB} = d - y\sin\bar{I} - \frac{s^2}{2r}\cos\bar{I} + \frac{s^2}{2d} - \frac{y^2}{2d}\sin^2\bar{I} + \\ \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{r}\cos\bar{I}\right)\frac{ys^2}{2d}\sin\bar{I} - \left(\frac{1}{r^2}\cos^2\bar{I} - \frac{2}{rd}\cos\bar{I} + \frac{1}{d^2}\right)\frac{s^4}{8d} \end{aligned} \tag{7-68}$$

对具有最高次数的最后两项，我们可以做一个近似：假设角度$\bar{I}$相对较小，换句话说，就是像高和物高相对较小，这样，余弦值近似为 1，距离 d 的值近似为 l。我们也可以对第 1 项做近似处理，但这样会带来不方便，因为这些项现在的形式，可以用来推导第 6 章中出现的 Coddington 方程。这样，我们得到

$$\begin{aligned} \overline{PB} = d - y\sin\bar{I} - \frac{s^2}{2r}\cos\bar{I} + \frac{s^2}{2d} - \frac{y^2}{2d}\sin^2\bar{I} + \\ \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r}\right)\frac{yhs^2}{2l^2} - \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r}\right)^2\frac{s^4}{8l} \end{aligned} \tag{7-69}$$

距离$\overline{AB}$等于 d，这样

$$\overline{PB}-\overline{AB}=-y\sin\bar{I}-\frac{s^2}{2r}\cos\bar{I}+\frac{s^2}{2d}-\frac{y^2}{2d}\sin^2\bar{I}+\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{r}\right)\frac{yhs^2}{2l^2}-\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{s^4}{8l} \tag{7-70}$$

相似地，我们得到

$$\overline{PB'}-\overline{AB'}=-y\sin\bar{I}'-\frac{s^2}{2r}\cos\bar{I}'+\frac{s^2}{2d'}-\frac{y^2}{2d'}\sin^2\bar{I}'+\left(\frac{1}{l'}-\frac{1}{r}\right)\frac{yhs^2}{2l'^2}-\left(\frac{1}{l'}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{s^4}{8l'} \tag{7-71}$$

因此，光程差 $OPD(s,y)$ 为

$$\begin{aligned}OPD(s,y)=&-y(n'\sin\bar{I}'-n\sin\bar{I})-\\&(n'\cos\bar{I}'-n\cos\bar{I})\frac{s^2}{2r}+\left(\frac{n'}{d'}-\frac{n}{d}\right)\frac{s^2}{2}-\left(\frac{n'}{d'}\sin^2\bar{I}'-\frac{n}{d}\sin^2\bar{I}\right)\frac{y^2}{2}+\\&\left(\left(\frac{1}{l'}-\frac{1}{r}\right)\frac{n'h'}{l'^2}-\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{r}\right)\frac{nh}{l^2}\right)\frac{ys^2}{2}-\\&\left(\left(\frac{1}{l'}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{n'}{l'}-\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{n}{l}\right)\frac{s^4}{8}\end{aligned} \tag{7-72}$$

在计算点 B'处光程差的过程中，我们没有用到折射定律，仅仅运用图形关系图，其中这个点并不需要是点光源 B 的真实像。如果 B'是在不含像差的像点处，所有出瞳上点的 $OPD(s,y)$将等于0。然而，一般情况并不是这样的。让我们分析表达式中每一项的物理意义。

如果第1项等于0，则说明主光线满足折射定律。这种情况，点 B'位于 AB'直线上的某个点。换句话说，如果它不为0，近轴像是垂轴偏离直线 AB'。对波像差，我们已经解释过，像的垂轴偏移对应了波面绕 x 轴倾斜。

理想状况下，折射球面波的曲率中心在点 B'。这是参考波面。第2项和第3项引起折射波面的曲率相对于参考波面发生改变，或者说引起相对于近轴像，像点 B'的轴向偏移。第4项引起 y 方向的曲率变化，这是由于它加入了额外的圆柱弯曲。这个像差的名字叫作像散。

对于单个折射球面，除了特殊面形，第2、3、4项是对任何光瞳内 s，y 值，不可能全部等于0。然而，总是可能使经过光瞳某条直径的光线的这3项和等于0，如图7-13中展示的3种情况。如果直线与 y 轴成 θ 角，我们得到

$$y=s\cos\theta \tag{7-73}$$

然后，将 y 的值代入式（7-72）的第4项中，使第2、3和4项的和等于0，我们得到

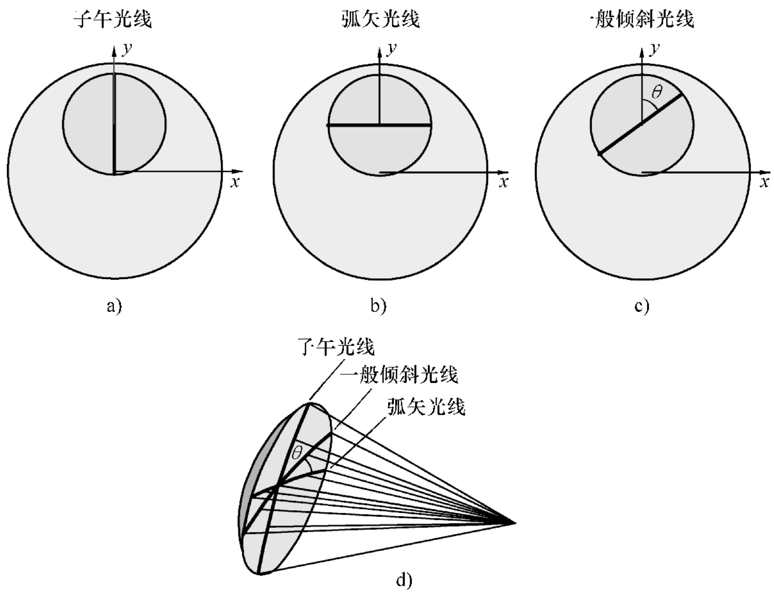


图 7-13　通过光瞳的子午、弧矢和一般倾斜光束（有彩色插图）

$$\left(\frac{n'\cos\bar{I}'-n\cos\bar{I}}{2r}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{n'}{d'}-\frac{n}{d}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{n'}{d'}\sin^2\bar{I}'-\frac{n}{d}\sin^2\bar{I}\right)\cos^2\theta=0 \tag{7-74}$$

接着，给距离 d 和 d'加上下标 θ，得到

$$\frac{n'\cos\bar{I}'-n\cos\bar{I}}{r}=\frac{n'(1-\sin^2\bar{I}'\cos^2\theta)}{d'_\theta}-\frac{n(1-\sin^2\bar{I}\cos^2\theta)}{d_\theta} \tag{7-75}$$

这个表达式，有时也称为一般 Coddington 方程，允许我们计算位置为 d_θ 的物对应的像的位置 d'_θ。然而我们要记住，这个方法仅对通过光瞳倾斜直径的光线有效，如图 7-13c 所示。在第 6 章中，适用于子午光线和弧矢光线的 Coddington 方程，可以从这个更普遍的式子中推导出来。如果倾斜角 θ 等于 0，通过光瞳的光线则为弧矢光线，如图 7-13b 所示，方程变形为弧矢光线 Coddington 方程：

$$\frac{n'\cos\bar{I}'-n\cos\bar{I}}{r}=\frac{n'}{d'_s}-\frac{n}{d_s} \tag{7-76}$$

而当倾斜角度 θ 为 90°时，我们得到子午光线的 Coddington 方程（见图 7-13a）：

$$\frac{n'\cos\bar{I}'-n\cos\bar{I}}{r}=\frac{n'\cos^2\bar{I}'}{d'_t}-\frac{n\cos^2\bar{I}}{d_t} \tag{7-77}$$

假设相比于 x 和 y，z 的值很小，我们近似 $s^2\cong x^2+y^2$；然后，第 2、3 和 4 项组合在一起写为

$$\left[-\frac{n'\cos\bar{I}'-n\cos\bar{I}}{2r}+\frac{n'}{2d'}\left(1+\frac{\sin^2\bar{I}'}{2}\right)-\frac{n}{2d}\left(1+\frac{\sin^2\bar{I}}{2}\right)\right](x^2+y^2)-\frac{1}{4}\left(\frac{n'}{d'}\sin^2\bar{I}'-\frac{n}{d}\sin^2\bar{I}\right)(3y^2+x^2) \tag{7-78}$$

在这个表达式中，如果第 1 项，即离焦项，等于 0，第 2 项则表示塞德尔像散，参考球面的曲率中心在佩兹伐面。让第 1 项等于 0，我们得到

$$\frac{n'\cos\bar{I}'-n\cos\bar{I}}{r}=\frac{n'}{d'_p}\left(1+\frac{\sin^2\bar{I}'}{2}\right)-\frac{n}{d_p}\left(1+\frac{\sin^2\bar{I}}{2}\right) \tag{7-79}$$

式中，d_p 和 d'_p是使离焦等于 0 的物和像的位置。这个表达式同样可以解释为像位于佩兹伐面时的 Coddington 方程。

式（7-72）的第 5 项，代表了单个折射面的初级彗差，由于该波面变形量在沿 y 方向 3 次变化，而沿 x 方向 2 次变化。光线的垂轴弧矢彗差通过对 x 微分得到，光线的垂轴子午彗差通过对 y 微分得到。

最后一项是指单个折射面的初级球差，对应旋转对称的波面变形。光线的垂轴球差通过对 s 微分得到，如 7.2 节中所述内容。式（7-72）中的最后一项——球差为 0 的条件为

$$\left(\frac{1}{l'}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{n'}{l'}-\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{n}{l}=0 \tag{7-80}$$

根据高斯公式［式（1-44）］，我们得到

$$\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l'}\right)n'=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{l}\right)n \tag{7-81}$$

运用这个结果到前式，得到式（6-75）中给出的齐明点存在的条件。

这些离轴像差、彗差和像散的表达式，对任意入射角和折射角的主光线，是细光束近似的。如果这些角很小，我们能进行 1 阶近似。

根据式（7-78），式（7-72）可以写为

$$OPD(s,y)=W(s,y)=\left[-\frac{n'\cos\bar{I}'-n\cos\bar{I}}{2r}+\frac{h'}{2d'}\left(1+\frac{\sin^2\bar{I}'}{2}\right)-\frac{n}{2d}\left(1+\frac{\sin^2\bar{I}}{2}\right)\right]s^2-\frac{1}{4}\left(\frac{n'}{d'}\sin^2\bar{I}'-\frac{n}{d}\sin^2\bar{I}\right)(3y^2+x^2)+\left(\left(\frac{1}{l'}-\frac{1}{r}\right)\frac{n'h'}{l'^2}-\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{r}\right)\frac{nh}{l^2}\right)\frac{ys^2}{2}-\left(\left(\frac{1}{l'}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{n'}{l'}-\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{r}\right)^2\frac{n}{l}\right)\frac{s^4}{8} \tag{7-82}$$

式中，$W(s,y)$是关于参考球面的波面变形。第 1 项是相对于佩兹伐面的离焦项，其中 d 和 d'，对任意光阑位置，分别指从物到折射面和从折射面到像的距离。如果像位于佩兹伐面，则离焦量为 0。第 2 项是像散，第 3 项是彗差，而最后一项是球差。

这个式子可以写为式（7-23）的形式，其中的系数 C、D、E 和 G 如下

$$
\begin{aligned}
C &= -\frac{n'\cos\bar{I}' - n\cos\bar{I}}{2r} + \frac{n'}{2d'}\left(1 + \frac{\sin^2\bar{I}'}{2}\right) - \frac{n}{2d}\left(1 + \frac{\sin^2\bar{I}}{2}\right) \\
D &= -\frac{1}{4}\left(\frac{n'}{d'}\sin^2\bar{I}' - \frac{n}{d}\sin^2\bar{I}\right) \\
E &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{r}\right)\frac{n'h'}{l'^2} - \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r}\right)\frac{nh}{l^2}\right) \\
G &= -\frac{1}{8}\left(\left(\frac{1}{l'} - \frac{1}{r}\right)^2\frac{n'}{l'} - \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{r}\right)^2\frac{n}{l}\right)
\end{aligned}
\tag{7-83}
$$

这些像差和 Coddington 方程是在假设光阑位于折射面顶点处推导得出的，如图7-14a的说明。然而，相当有趣的是，Coddington 方程对任意光阑位置都适用，因为它们仅仅取决于主光线的入射角和折射角，以及距离 d 和 d'。当光阑不位于折射面顶点处，我们可以想象，按照图7-14b 那样旋转折射面。如果角度 I 和 I'同距离 d 和 d'保持不变，那么方程就仍然适用。

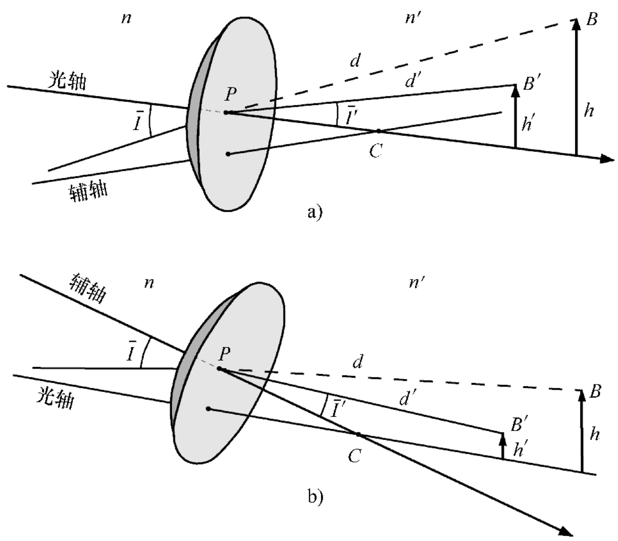


图 7-14　倾斜折射面，使主光线偏离顶点

7.8　反射面的波像差

将 $n' = -n$ 代入之前章节中的所有结论，可以用来确定单个反射面的波像差。然而，有个实际情况很有趣，按照 Gómez – Vieyra 和 Malacara（2011）的描述，如果物体位于椭球体的一个焦点上，在另一个焦点上将产生一个完善像。为了得到一个离轴反射镜，我们必须倾斜椭球体，平移坐标原点到镜面的顶点，如图 7-15 所示。为了得到这个椭球的解析表达式，我们从坐标系 x，y，z 中，长轴位于 z 轴，具有旋转对称的椭球体方程开始推导：

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1 \tag{7-84}$$

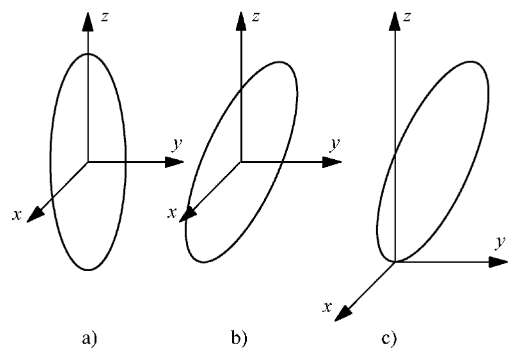


图 7-15　椭球体变换过程

现在，绕 x 轴旋转椭球体，然后在 $x-z$ 平面内平移它，使坐标原点位于椭球体的最小值点上。这个最小值点通过当 x 为 0 时，z 对 y 的一阶微分得到。图 7-16 中所示的椭球体的新方程为

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{b^2}+\cos^4\varphi+\sin^4\varphi+\\&2z\cos\varphi\sin\varphi\left(\frac{y^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{2}{\sqrt{a^2\csc^2\varphi+b^2\sec^2\varphi}}\right)+\\&\cos^2\varphi\left(\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}-\frac{2z\cot\varphi}{\sqrt{a^2\csc^2\varphi+b^2\sec^2\varphi}}+2\sin^2\varphi\right)+\\&\sin^2\varphi\left(\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}-\frac{2z\tan\varphi}{\sqrt{a^2\csc^2\varphi+b^2\sec^2\varphi}}\right)=1\end{aligned} \tag{7-85}$$

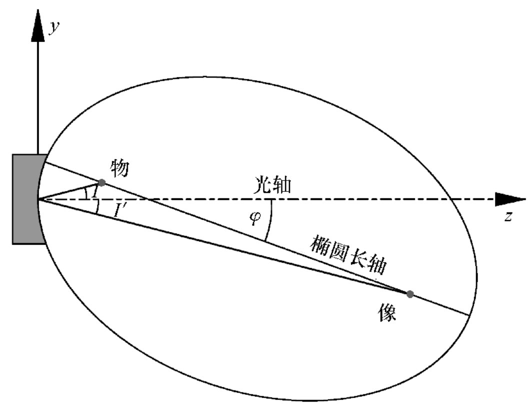


图 7-16　旋转过的椭球体

下一步就是解决 z 的表达式，在椭球体最小值点，也就是坐标原点处，将 z 展开为

4 次泰勒级数，得到一个 4 次多项式：

$$\begin{aligned} z_{\text{ellipsoid}} = & a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + \\ & a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \\ & a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3 + \\ & a_{40}x^4 + a_{31}x^3y + a_{22}x^2y^2 + a_{13}xy^3 + a_{04}x^4 \end{aligned} \tag{7-86}$$

z 的值代表到平面 $x-y$ 的距离。位于平面 $x-y$ 上，椭球体的最小值点处，椭球体具有两个垂直的曲率：一个是子午曲率 c_t，在 $z-y$ 平面，另一个是弧矢曲率 c_s，在 $z-x$ 平面，得到

$$c_t = 2a_{20}; c_s = 2a_{02} \tag{7-87}$$

这两个曲率的平均值，被作为参考球面的曲率，其表达式为

$$\begin{aligned} z_{\text{sphere}} & = \frac{(c_s + c_t)}{4}(x^2 + y^2) + \frac{(c_s + c_t)^3}{64}(x^2 + y^2)^2 \\ & = \frac{(a_{20} + a_{02})}{2}(x^2 + y^2) + \frac{(a_{20} + a_{02})^3}{8}(x^2 + y^2)^2 \end{aligned} \tag{7-88}$$

到现在为止，我们已经构造了一个倾斜椭球体反射镜，能在椭球的焦点产生完善像。如果镜面不是椭球体，而是球体，则反射波面存在像差，其波面变形为

$$W(x,y) = 2(z_{\text{sphere}} - z_{\text{ellipsoid}}) \tag{7-89}$$

运用这些结果，按照式（7-20）表示共轴系统像差的形式，写出直到 4 次项的 $W(x,y)$，我们将得到如下波像差的系数：

$$\begin{aligned} W(x,y) = & \left(\frac{a}{2b^2} - \frac{1}{a^2}\right)\varphi^2(y^2 - x^2) - \frac{(a^2-b^2)[-6b^2\varphi^2 + a^2(-3+8\varphi^2)]\varphi}{3a^2b^4}y(x^2+y^2) - \\ & \left[\frac{(a^2-b^2)^2\varphi^3}{a^2b^4}\right]y(y^2-x^2) - \\ & \frac{(a^2-b^2)[-9b^2\varphi^2 + 2a^2(-1+6\varphi^2)]}{8ab^6}(x^2+y^2)^2 - \\ & \frac{(2a^4 - 5a^2b^2 + 3b^4)\varphi^2}{4ab^6}(y^4 - x^4) \end{aligned} \tag{7-90}$$

式中，a 和 b 是椭球体的半轴长。角度 φ 是椭球体的倾斜角，而不是物体和像的离轴角。这个角度被假定很小。关于任意角度 φ，精确的系数值由 Gómez - Vieyra 和 Malacara（2011）给出。这三个量，a、b 和 φ 可以根据三个光学结构关系参数 l、l'和$\bar{I}'$表示，这三个参数分别代表了物体到镜面顶点的距离，像到镜面顶点的距离以及主光线和光轴的夹角。如图 7-16 所示，它们间的关系写为

$$\begin{aligned} a & = \frac{l + l'}{2} \\ b & = \sqrt{ll'\cos^2\bar{I}} \\ \varphi & = \arctan\left[\left(\frac{l' + l}{l' - l}\right)\tan\bar{I}\right] \end{aligned} \tag{7-91}$$

反射面 Coddington 方程，可以将 $n' = -n = -1$ 和 $\bar{I}' = -\bar{I}$ 代入而得到

$$\frac{2}{r\cos\bar{I}'} = \frac{1}{t'} + \frac{1}{t};\frac{2\cos\bar{I}'}{r} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} \tag{7-92}$$

如果参考球面中心曲率为弧矢和子午曲率的平均值，取 $l = s = t$，则距离 l' 为

$$\frac{1}{l'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{s'}\right) = \left(\frac{1+\cos^2\bar{I}}{\cos\bar{I}}\right)\frac{1}{r} - \frac{1}{l} \tag{7-93}$$

现在，将 l' 的值代入到式（7-91）中，假设角度 $\bar{I}$ 和 φ 很小，我们得到

$$\begin{aligned} a &= \frac{l^2}{2l-r} \\ b &= \left(1 - \frac{\bar{I}^2}{2}\right)l\sqrt{\frac{r}{2l-r}} \\ \varphi &= \frac{l\bar{I}}{r-l} + \frac{lr(2l-r)\bar{I}^3}{3(l-r)^3} \end{aligned} \tag{7-94}$$

最后一步是用多项式展开平方根，再将这些值代入式（7-90），得到

$$\begin{aligned} W(x,y) = &-\frac{\bar{I}^2}{2r}(y^2 - x^2) - \frac{(r-l)\bar{I}}{lr^2}y(x^2+y^2) - \\ &\left(\frac{(r-l)^2}{4l^2r^3}\right)(x^2+y^2)^2 - \frac{(2l^2-6lr+3r^2)\bar{I}^2}{4l^2r^3}(y^4 - x^4) \end{aligned} \tag{7-95}$$

第1项为参考球面波在最佳分辨率近轴像处的像散。在引入合适量的离焦后，也可以得到参考面在佩兹伐面的像散。

7.9　Aldis 理论

Welford（1964）定义了一个像差公式，计算经过光学系统折射面的一条光线的整体像差。针对整体像差，估算得出的为像差系数给出的整体像差值，而不是对单一像差的近似值。最著名的有限像差公式是来自 Aldis 理论，由 Welford（1964）详细推导，这是他重要的理论成果。而该理论也被 Cox（1964）以一种稍微不同的形式提出。Gross 等（2007）也有类似的研究。

如果我们用精确的光线追迹方程追迹通过光学系统的光线，能够得到像平面处的整体像差值，但不能如像差系数那样，得到每个面的像差贡献。每个面的像差贡献值对确认产生像差的折射面的位置很重要。

Aldis 理论需要预先追迹一条光线，而这条光线在每个面的方向角余弦值可以用在 Aldis 公式中，计算出在系统每个面的总像差贡献的准确值。公式推导的细节，读者可以查阅 Welford（1964）的书。在任意面处以第1阶或高斯离轴像为基准的总垂轴像差分量 TA_x 和 TA_y 计算公式如下

$$TA_x = \frac{-1}{n'_k u'_k M'_k}\sum_{j=1}^{k}\left[A_j z_j \Delta K_j + \frac{A_j x_j}{M'_j + M_j}\Delta(K_j^2 + L_j^2)\right] \tag{7-96}$$

$$TA_y = \frac{-1}{n'_k u'_k M'_k} \sum_{j=1}^{k} \left[A_j z_j \Delta K_j + \frac{A_j y_j - \Lambda}{M'_j + M_j} \Delta(K_j^2 + L_j^2) \right] \qquad (7\text{-}97)$$

式中，K_j、L_j和 M_j是光线在面 j 的方向角余弦。折射不变量为 $A_j = n_j i_j = n'_j i'_j$。标量 Λ 是拉格朗日不变量。符号 Δ 表示在某一面折射前后，标量的变化值。

参考文献

[1] Buchdahl, H. A., *Optical Aberration Coefficients*, Oxford University Press, New York (1954).

[2] Buchdahl. H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅰ. The Coefficient of Tertiary Spherical Aberration," *J. Opt. Soc. Am.*, **46**, 941 – 943 (1956).

[3] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅱ. The Tertiary Intrinsic Coefficients," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 563 – 567 (1958a).

[4] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅲ. The Computation of the Tertiary Coefficients," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 747 – 756 (1958b).

[5] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅳ. The Coefficient of Quaternary Spherical Aberration," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 757 – 759 (1958c).

[6] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅴ. On the Quality of Predicted Displacements," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 1113 – 1121 (1959).

[7] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅵ. On the Computations Involving Coordinates Lying Partly in Image Space ," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 534 – 539 (1960a).

[8] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅶ. The Primary, Secondary and Tertiary Deformations and Retardation of the Wavefront," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 539 – 544 (1960b).

[9] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅷ. Coefficient of Spherical Aberration of Order Eleven," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 678 – 683 (1960c).

[10] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅸ. Theory of Reversible Optical Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **51**, 608 – 616 (1961).

[11] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅹ. Theory of Concentric Optical Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 1361 – 1367 (1962a).

[12] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅺ. Theory of a Concentric Corrector," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 1367 – 1372 (1962b).

[13] Buchdahl, H. A., "Optical Aberration Coefficients: Ⅻ. Remarks Relating to Aberrations of Any Order," *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 641 – 649 (1965).

[14] Buchdahl, H. A., *Introduction to Hamiltonian Optics*, Cambridge University Press, Cambridge (1970).

[15] Conrady, A. E., *Applied Optics and Optical Design*, *Part Ⅱ*, Chap. 12, Dover Publications, New York (1960).

[16] Cox, A., *A System of Optical Design*, Focal Press, London (1964).

[17] Cruickshank, F. D. and Hills, G. A., "Use of Optical Aberration Coefficients in Optical Design," **50**, 379 – 387 (1960).

[18] Geary, J. M., *Introduction to Lens Design*, Willmann – Bell, Inc., Richmond, VA (2002).

[19] Gómez – Vieyra, A. and Malacara, D., "Geometric Theory of Wavefront Aberrations in an Off – Axis Spherical Mirror," *Appl. Opt.*, **50**, 66 – 73 (2011).

[20] Gross, H., Zügge, H., Peschka, M., and Blechinger, F., *Handbook of Optical Systems*, *Vol.* 3, Wiley – VCH, Weinheim (2007).

[21] Hopkins, H. H., *Wave Theory of Aberrations*, Clarendon Press, Oxford (1950).

[22] Kidger, M. J., *Intermediate Optical Design*, SPIE Press, Bellingham, WA (2004).

[23] Kim, C. – J. and Shannon, R., "Catalog of Zernike Polynomials," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. X, Chap. 4, R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Academic Press, New York (1987).

[24] Kingslake, R., "The Interferometer Patterns due to the Primary Aberrations," *Trans. Opt. Soc.*, **27**, 94 (1925 – 1926).

[25] Mahajan, V., "Zernike Polynomial and Wavefront Fitting," in *Optical Shop Testing*, Third Ed., D. Malacara, ed., John Wiley and Sons, Inc., New York (2007).

[26] Malacara, D., "Set of Orthgonal Primary Aberration Coefficients," *Appl. Opt.*, **22**, 1273 – 1274 (1983).

[27] Malacara, D., Carpio, J. M., and Sánchez, J. J., "Wavefront Fitting with Discrete Orthogonal Polynomials in a Unit Radius Circle," *Opt Eng.*, **29**, 672 – 675 (1990).

[28] Malacara, D., and DeVore, S. L., *Optical Shop Testing*, 2nd Ed., D. Malacara, ed., Chap. 13, John Wiley, New York (1992).

[29] Mikš, A., "Modification of the Formulas for Third – Order Aberration Coefficients," *J. Opt. Soc. Am.* A, **19**, 1867 – 1871 (2002).

[30] Miyamoto, K., "Wave Optics and Geometrical Optics in Optical Design," in *Progress in Optics*, Vol. 1, E. Wolf, ed., North Holland, Amsterdam (1964).

[31] Montoya – Hernández, M., Servin, M., Malacara – Hernández, D. and Paez, G., "Wavefront Fitting Using Gaussian Functions," *Opt. Commun.*, **163**, 259 – 269 (1999).

[32] Rayces, J. L., "Exact Relation between Wave Aberration and Ray Aberration," *Opt. Acta*, **11**, 85 – 88 (1964).

[33] Sasian, J., "Interpretation of Pupil Aberrations in Imaging Systems," *Proc. SPIE*, **6342**, 634208 – 3 (2006).

[34] Schroeder, D. J., *Astronomical Optics*, Chapter, 5, Academic Press, San Diego (1987).

[35] Steward, G. C., *The Symmetrical Optical System*, Cambridge Tracts No. 25, Chap 3 (1928).

[36] Welford, W. T., *Aberrations of Optical Systems*, Focal Press, London (1964).

[37] Wyant, J. C., and Creath, K., "Basic Wavefront Aberration Theory for Optical Metrology," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. XI, Chap. 1, R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Academic Press, Boston, MA (1992).

第 8 章　光学系统的计算机评估

8.1　横向像差多项式

在透镜设计或者光线追迹系统中，横向像差比波前像差更容易测量和分析。光路的描述通常和透镜的性能评估或者光线追迹系统联系在一起。在入瞳附近追迹物平面上沿 y 轴几个不同高度的点物的光路，并计算最终像平面（一个平面或者接近近轴像面的曲面）上的交点。

这些光线在 X 方向和 Y 方向上的交点分别用 TA_x 和 TA_y 表示。这些光线交点的典型参考点为以主波长（通常为 $\lambda = 587.56\text{nm}$）的主光线穿过像平面的点。通过对第 7 章中给出的波像差公式求偏导以及式（7-3）和式（7-4）可以得到横向像差。由式(7-23)，有 TA_x：

$$TA_x(x,y) = -\begin{bmatrix} 2(C_0 + C_h + D)x + 2(E - G)xy + 4(F_0 + F_h)x(y^2 + x^2) + \\ 2Hxy^2 - 4Jxy(y^2 - x^2) + 6Kx(y^2 + x^2)^2 \end{bmatrix}_{r_w} \quad (8\text{-}1)$$

考虑到子午面的对称性，这些 TA_x 在 x 方向上满足条件：

$$TA_x(x,y) = -TA_x(-x,y) \quad (8\text{-}2)$$

因此，上式是反对称多项式，每一项都包含 x 的奇数次幂。同理可得 TA_y：

$$TA_y(x,y) = -\begin{bmatrix} B + 2(C_0 + C_h + 3D)y + E(3y^2 + x^2) + \\ 4(F_0 + F_h)y(y^2 + x^2) + G(3y^2 - x^2) + 2Hy(2y^2 + x^2) + \\ J(y^2 - x^2)(5y^2 - x^2) + 6Ky(y^2 + x^2)^2 \end{bmatrix}_{r_w} \quad (8\text{-}3)$$

和第 7 章一样，这些常量有如下意义：

B 为图像在 y 方向上的位移，例如畸变引起的位移。

C_0为离焦量（像平面沿光轴方向的偏移）。

C_h为由场曲引起的离轴图像的离焦量。

D 为初级像散。

E 为初级彗差项或者椭圆彗差项。

F_0为初级球差。

F_h为离轴图像上的点的轴外球差。

G 为椭圆彗差的第二项。

H 为轴外球差的第二项。

J 为五级彗差。

K 为五级球差。

在下一章节，我们将会进一步学习横向像差函数。

我们之前已经讨论过，想要分析一个光学系统的设计性能，我们需要追迹它的轴向、子午面和弧矢面的轴上扇形光束，如图8-1所示。这些光线等间距地分布在入瞳的x轴和y轴上。这些光路图在现代设计中是非常重要的评估手段。任何透镜设计者都必须对其进行深入了解。

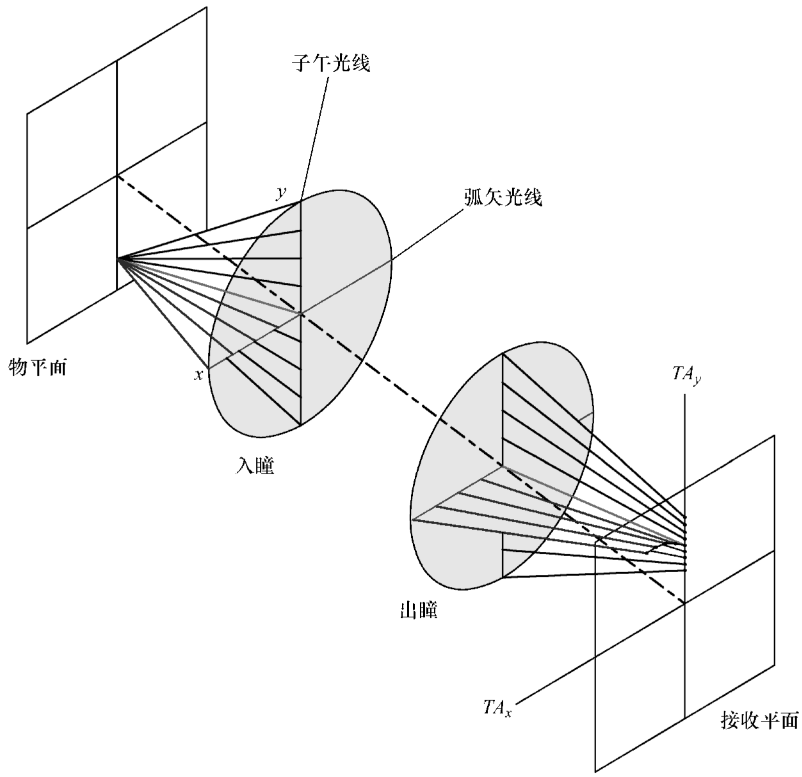


图8-1　通过一个光学系统的子午和弧矢光扇追迹（有彩色插图）

8.1.1　轴向像差曲线

从一物点发出的一组轴向的子午和弧矢扇形光线经过光学系统，其入瞳处光线的高度在y轴上等间隔选取。因为光学系统在子午面上是对称的，横向像差$TA_y(0,y)$与入瞳处光线高度y的比为反对称函数，所以只需考虑y轴正方向上的光线。对称条件如下表示：

$$TA_y(x,y) = -TA_y(-x,y) \tag{8-4}$$

因此，TA_y的表达式中只包含y的奇数次幂。式（8-3）中，带入$x=0$化简可得

$$TA_y(0,y) = -2(C_0y+2F_0y^3+3Ky^5)r_w \tag{8-5}$$

上式第一项表示像平面上的离焦量。如图8-2所示，过y轴零点对图像做一条切线，则切线斜率为$-\Delta f/r_w$，Δf为离焦量（或者焦点位移），r_w为出瞳到像的距离。

$$\left(\frac{\partial TA_y}{\partial y}\right)_{y=0} = C_0 = -\frac{\Delta f}{r_w} \tag{8-6}$$

如果考虑蓝光（F）和红光（C）两组轴向光路图，则轴向色差由下式决定：

$$AchrL = \Delta f_F = -\Delta f_C \tag{8-7}$$

式（8-5）中的第二项是 3 级或者初级像差，第三项是第 5 级像差。如图 8-2 所示，点 P 到曲线的垂直距离即为横向球差（初级和第 5 级的和）的值。初级轴向球差即为

$$SphL = -2F_0 y^2 \tag{8-8}$$

于是式（4-43）中的色球差即可表示为

$$\text{色球差} = SphL_F - SphL_C = -2(F_{0F} - F_{0C})y^2 \tag{8-9}$$

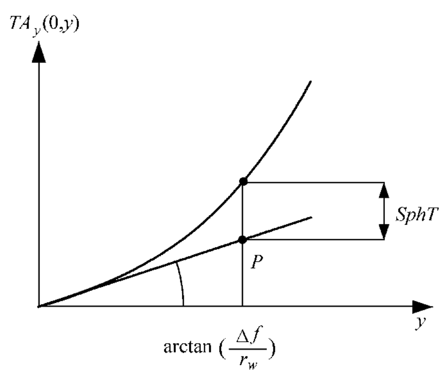


图 8-2 对于球差和离焦的轴向像差曲线

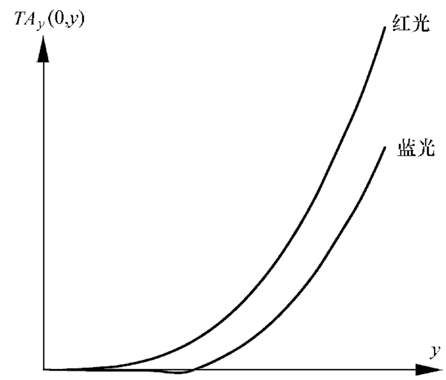


图 8-3 含轴向球差和色差透镜的轴向像差曲线

8.1.2 子午像差曲线

当物体在轴外，光线从子午面上一点发出时，我们可以得到子午像差图。因此，如果在入瞳处令 $x=0$，$TA_x(0,y)$ 即为 0，式（8-3）中，$TA_y(0,y)$ 可以写成

$$TA_y(0,y) = -\begin{bmatrix} B + 2(C_0 + C_h + 3D)y + 3(E+G)y^2 + \\ 4(F_0 + F_h + H)y^3 + 5Jy^4 + 6Ky^5 \end{bmatrix} r_w \tag{8-10}$$

由于式（8-10）中包含奇数次幂和偶数次幂，所以子午像差图通常是不对称的。上式第一项是常数，表示像的离轴偏移量。通常来说，这个常数项为一关于图像像高和波长的函数。子午像差图可以利用由高斯像或者由位于谱线宽度中间波长的主光线的位置确定的像位置的原点 $TA_y(0,0)$ 来描绘。考虑红光（C）和蓝光（F）两种光的子午像差图，倍率色差由式（8-11）给出：

$$Mchr = (TA_y(0,y))_C - (TA_y(0,y))_F \tag{8-11}$$

图像在原点处的斜率即为一次项系数。斜率可以表示为

$$\left(\frac{\partial TA_y}{\partial y}\right)_{y=0} = C_0 + C_h + 3D = -\frac{\Delta f}{r_w} - \frac{(h_k')^2}{2r_w}C_p - \frac{(h_k')^2}{2r_w}C_t \tag{8-12}$$

式中，C_p 是佩兹伐曲面的曲率，C_t 是以佩兹伐曲面为参考的子午面的曲率。

三次项的系数为 $4(F_0+F_h+H)$，F_0 为第5阶球差，可以通过轴向图计算得到。系数 F_h 和 H 为轴外球差，只出现在离轴图像中。

二次项（抛物线形）表示初级彗差和椭圆彗差的和。如果像高不是很大，那么二次项只包含初级彗差。图8-4表示出了一些像差的子午像差图。

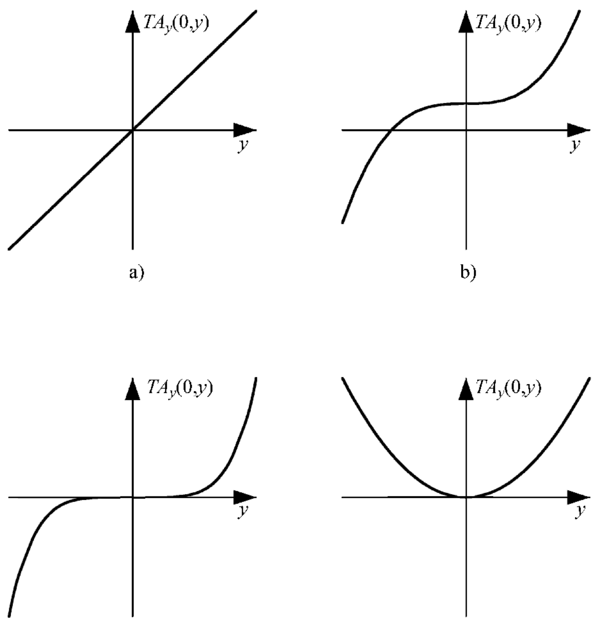


图8-4　一些像差的子午像差曲线

a）离焦　b）初级球差和畸变　c）5阶球差　d）彗差

通过对子午像差曲线图上关于原点对称的两个点做差来分离反对称项，有：

$$\frac{TA_y(0,y)-TA_y(0,-y)}{2}=-2[(C_0+C_h+3D)y+2(F_0+F_h+H)y^3+3Ky^5]r_w \tag{8-13}$$

把两个对称点的函数相加可得

$$\frac{TA_y(0,y)+TA_y(0,-y)}{2}=-[B+3(E+G)y^2+5Jy^4]r_w \tag{8-14}$$

图8-5给出了一些组合像差的子午像差曲线。

8.1.3　弧矢像差曲线

当入瞳上的 y 取0时可以得到弧矢像差图。根据式（8-1）和式（8-3）可得，横向像差表达式为

$$TA_x(x,0)=-2[(C_0+C_h+D)x+2(F_0+F_h)x^3+3Kx^5]r_w \tag{8-15}$$

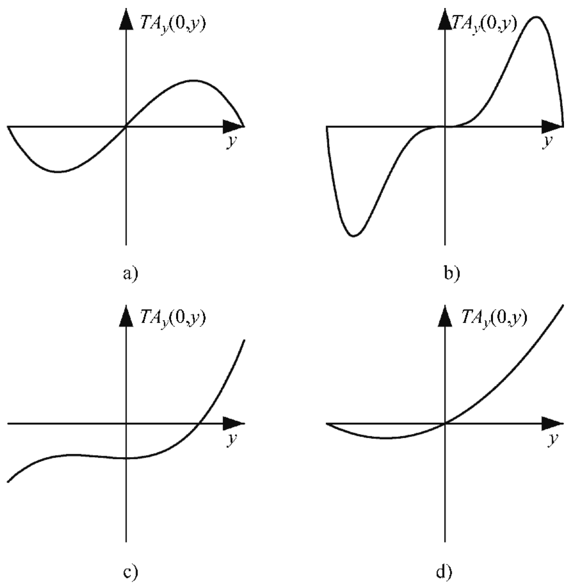


图 8-5　一些像差组合的子午像差曲线

a）离焦和初级球差　b）初级和 5 阶球差　c）初级彗差和畸变　d）离焦和彗差

同理对 TA_y，可得

$$TA_y(x,0) = -[B+(E-G)x^2+Jx^4]r_w \tag{8-16}$$

上式只包含对称的横向像差，比如彗差。

弧矢像差曲线 $TA_x(x,0)$ 在原点处的斜率为线性项系数(C_0+C_h+D)的值，有：

$$\left(\frac{\partial TA_x}{\partial x}\right)_{x=0} = C_0+C_h+D = -\frac{\Delta f}{r_w}-\frac{h'^2_k}{2}c_p-\frac{h'^2_k}{2}c_t \tag{8-17}$$

式中，c_p 是佩兹伐曲面的曲率，c_t 是以佩兹伐曲面为参考的子午面的曲率。在第二个弧矢像差图 $TA_y(x,0)$ 中，初级像差只包含彗差和畸变。因此，一般不考虑绘制 $TA_y(x,0)$ 的弧矢像差图。图 8-6 给出了一个光学系统的弧矢像差曲线，图 8-6a 为球差的弧矢像差图，图 8-6b 为彗差和畸变的弧矢像差图。

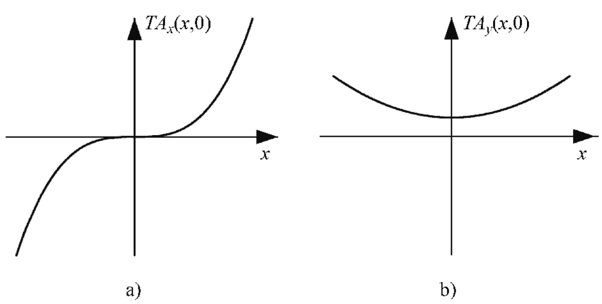


图 8-6　一些像差的弧矢像差曲线

a）球差　b）彗差和畸变

将切向函数和径向函数相减，同时令 $x=y$，可得

$$TA_y(0,y)-TA_x(x,0)=-\begin{bmatrix}B+(C_0+C_h+5D)y+3(E+G)y^2\\2(F_0+F_h+2H)y^3+5Jy^4+3Ky^5\end{bmatrix}r_w \tag{8-18}$$

由于系数 C_0 可以从轴向像差图中得到，系数 C_h 和 D 可以从子午像差图和弧矢像差图中得到。所以我们可以通过将子午函数 $TA_y(0,y)$ 和弧矢函数 $TA_x(x,0)$ 的线性项相减（斜率差）来得到像散。

综上所述，我们可以利用以上这些函数得到所有的初级像差。然而，通常的实践评估只考虑初级像差的系数。这些函数图的好处在于可以精确得到高阶像差。

8.2 横向像差的 H. H. Hopkins，Seidel 和 Buchdahl 系数

利用式（7-3）和式（7-4），将波像差多项式分别对 x 和 y 求偏导，可以得到横向像差多项式。虽然我们可以使用本书中提到的任何 $W(x,y)$、$W(S,\theta)$、$W(x,y,h)$ 或者 $W(S,\theta,h)$ 的表达式，但是通常使用的是以像高 h 为参量，包含初级和第5阶像差的表达式。为此，我们可以使用霍普金斯多项式。由式（7-17），可以得到波像差的斜率 ε_x 和 ε_y，即横向像差 TA_x 和 TA_y，沿坐标轴有：

$$\begin{aligned}\varepsilon_y(x,y,h)=&2w_{020}S\cos\theta+w_{111}h+w_{311}h^3+w_{220}h^2S\cos\theta+\\&2w_{222}h^2S\cos\theta+w_{131}(2+\cos2\theta)hS^2+4w_{040}S^3\cos\theta+\\&w_{511}h^5+2(w_{420}+w_{422})h^4S\cos\theta+\\&[(2w_{331}+3w_{333})+(w_{331}+3w_{333})\cos2\theta]h^3S^2+\\&[2(2w_{240}+w_{242})+2w_{242}\cos^2\theta]h^2S^3\cos\theta+\\&w_{151}(3+2\cos2\theta)hS^4+6w_{060}S^5\cos\theta\end{aligned} \tag{8-19}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x,y,h)=&2w_{020}S\sin\theta+2w_{220}h^2S\sin\theta+w_{131}hS^2\sin2\theta+4w_{040}S^3\sin\theta+\\&2w_{420}h^4S\sin\theta+w_{331}h^3S^2\sin2\theta+[4w_{240}h^2+2w_{242}h^2\cos^2\theta]S^3\sin\theta+\\&2w_{151}hS^4\sin2\theta+6w_{060}S^5\sin\theta\end{aligned} \tag{8-20}$$

第7章描述的横向像差多项式中各项可以单独绘制子午像差曲线和弧矢像差曲线。

8.2.1 球差

根据式（7-28）和式（7-29），初级球差和5阶球差的图形是旋转对称的。所以，沿 y 轴（$x=0$）和沿 x 轴（$y=0$）的光路图是一样的。因此，可以只取 $x=0$（$S=y$，$\theta=0°$）。此时，横向像差多项式可以表示为

$$TA_y(S,\theta,h)=\sigma_1y^3+\mu_1y^5 \tag{8-21}$$

上式与像高 h 无关，如图8-7所示。

8.2.2 彗差

初级和5阶横向彗差，有时又叫线性彗差，切面（$x=0,S=y,\theta=0°$）可以表示为

$$TA_y(0,y,h)=3\sigma_2hy^2+(\mu_2+\mu_3)hy^4 \tag{8-22}$$

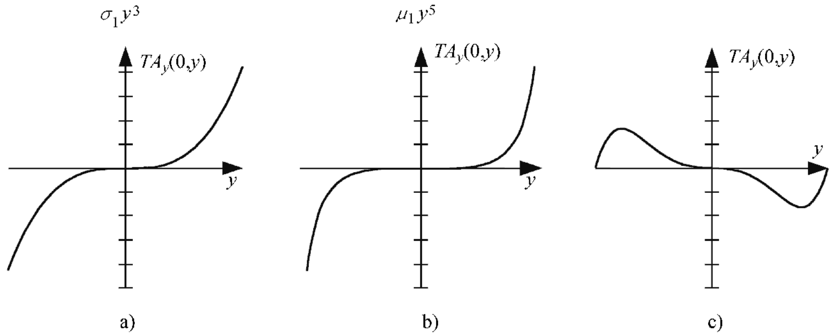


图 8-7　对于初级和 5 阶球差的子午像差曲线

a）初级球差　b）5 阶球差　c）平衡后的球差

其弧矢像差图($y=0, S=x, \theta=90°$)可以表示为

$$TA_x(x, 0, h) = 0 \tag{8-23}$$

如图 8-8 所示。

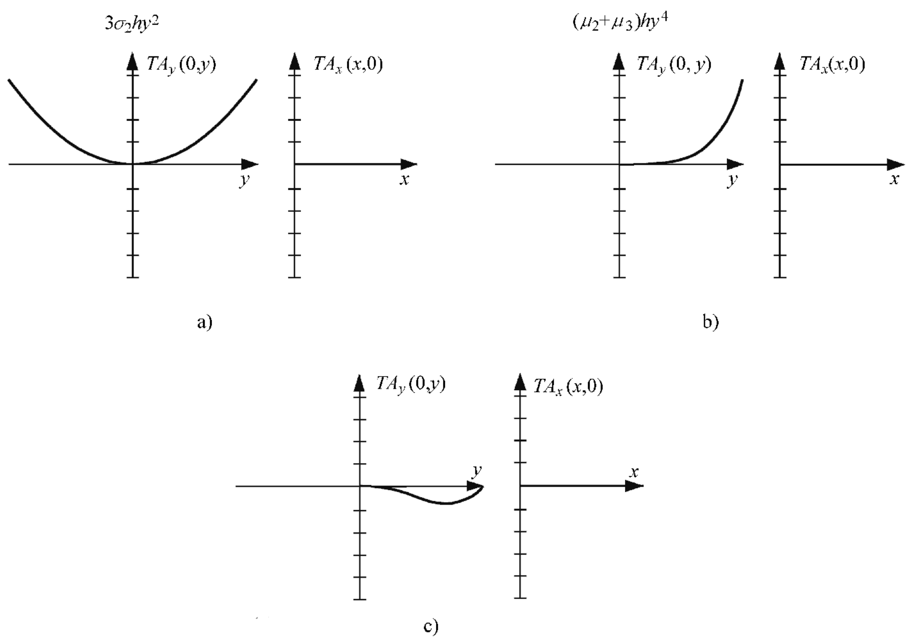


图 8-8　对于初级和 5 阶彗差的子午和弧矢像差曲线

a）初级彗差　b）5 阶彗差　c）平衡初级和 5 阶彗差

8.2.3　像散

初级像散和 5 阶像散也称作线性像散。其塞德尔系数（第一项）包括佩兹伐曲面的初级像散（σ_3）和将图像移动到高斯面上的离焦参数（σ_4）。因此切面（$x=0$，$S=$

y，$\theta=0°$）可以表示为

$$TA_y(0,y,h)=(3\sigma_3+\sigma_4)h^2y+\mu_{10}h^4y \tag{8-24}$$

弧矢面（$y=0$，$S=x$，$\theta=90°$）为

$$TA_x(x,0,h)=(\sigma_3+\sigma_4)h^2x+\mu_{11}h^4x \tag{8-25}$$

这些像差如图8-9所示。子午和弧矢面的斜率不同是因为像散的存在。

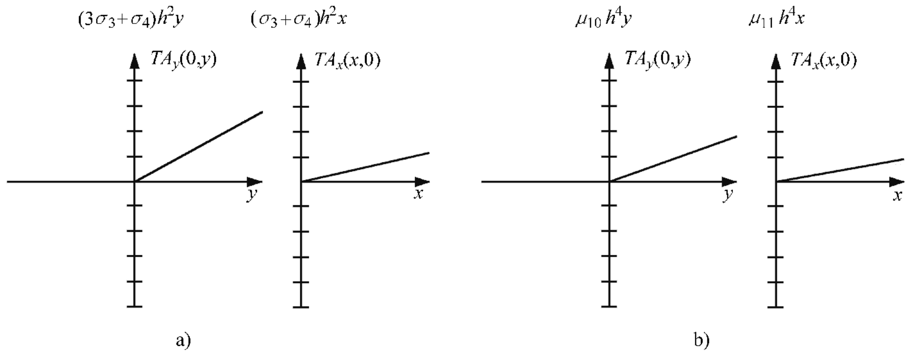


图8-9　对于初级和5阶像散的子午和弧矢像差曲线

a）初级像散　b）5阶像散

8.2.4　畸变

对初级畸变和第5阶畸变像差，切面仅在y方向上发生移动，等效于图像的离轴偏移量。

1. 轴外球差

轴外球差光路图由式（8-26）和式（8-27）得到

$$TA_y(0,y,h)=(\mu_4+\mu_6)h^2y^3 \tag{8-26}$$

以及

$$TA_x(0,y,h)=(\mu_5+\mu_6)h^2x^3 \tag{8-27}$$

图像如图8-10所示。

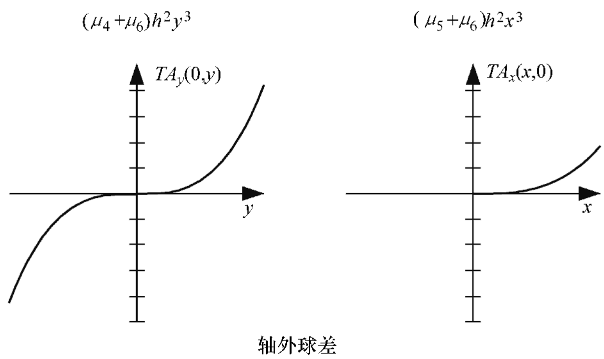


图8-10　对于轴外球差的子午和弧矢像差曲线

2. 椭圆彗差

最后，椭圆彗差的光路图可由下式得到

$$TA_y(0,y,h) = (\mu_7 + \mu_8)h^3y^2 \tag{8-28}$$

且有

$$TA_x(x,0,h) = 0 \tag{8-29}$$

如图 8-11 所示。

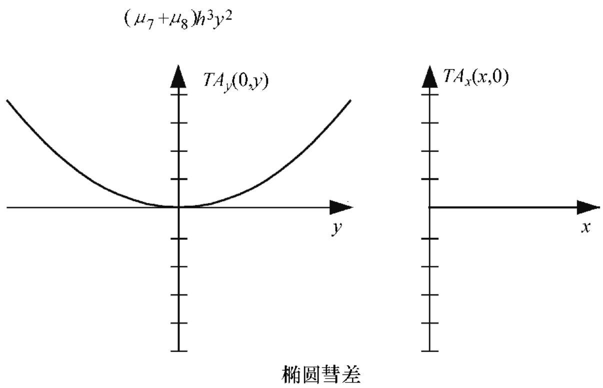


图 8-11　对于椭球彗差的子午和弧矢像差曲线

8.3　子午光线的追迹和光阑位置的分析

通常来说，为了使从离轴物点发出的光线通过透镜，一个透镜组的实际孔径要大于光阑直径，如图 8-12 所示。在轴上，有效通光孔径要小于透镜尺寸。在与透镜第一个曲面相接的位置或其他任何选取的位置放置一个扩大的光阑，所得到的透镜孔径的子午像差图如图 8-12 所示。再在最终的位置上放置合适尺寸的光阑，则可在图上得到一个被选取的小区间。这种延伸的子午像差图对于选取光阑的最佳位置是非常有用的。通过分析这种子午像差图我们可以得到如下结论：

1）TA_0 的高度为畸变引起的图像水平偏移量。

2）比较多个不同波长光线对应的图像，TA_0 的高度差即为放大率色差。

3）选取区间内的图像斜率可以表示子午面上的局部离轴离焦量，即切向场曲。

4）图像曲率可以表示切向彗差的值。

5）S 型（三次项）的曲线表示球差。

6）在最小值 M_1 和最大值 M_2 处，切向场是平坦的（斜率为 0），但是彗差是存在的（即曲线的曲率）。

7）如果图像的高度不同，则在最大值和最小值附近存在不同程度的失真。

8）在拐点 I 处，没有彗差（曲率为 0），但是存在切向场曲（斜率不为 0）。

9）如果拐点处斜率为 0，那么切向场就是平坦的，并且没有彗差。当透镜弯曲的

时候经常可以得到这个条件。

通过图8-13选取末级主光线的高度，就需要计算出光阑的最终位置。

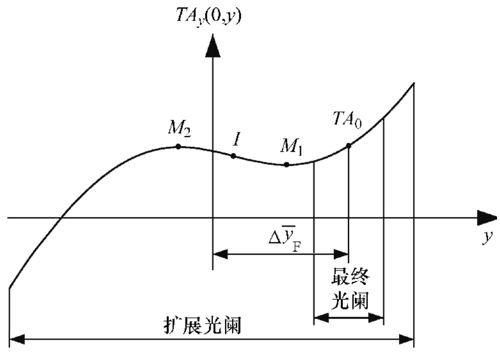


图8-12　使用一个扩展光阑的光学系统的子午和弧矢绘制

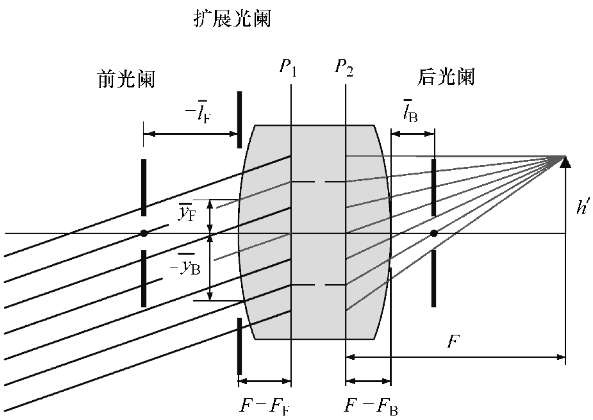


图8-13　使用扩展光阑后的光阑位置计算

一种方法是描绘带有扩大光阑的系统的子午光线和0级主光线，然后利用3.8节提到的光阑平移关系式进行计算。首先要确定扩大光阑的位置，使得通过初级扩大光阑的主光线的高度满足要求。在第3章提到的$y-\bar{y}$图表也可以用来计算光阑位置。对于一个无穷远处物点和一个单独的薄透镜或者厚透镜组成的光学系统，初级扩大光阑可以放在透镜的前表面，如图8-13所示。最终光阑的位置可以通过选择的最终主光线的高度来确定。如果这个高度是正的，则最终光阑就位于透镜的前端，到透镜前表面的距离为

$$\bar{l}_F = -F\frac{\bar{y}_F}{h'} \tag{8-30}$$

如果光线高度为负数，则光阑位于透镜的后方，距离透镜后表面距离为

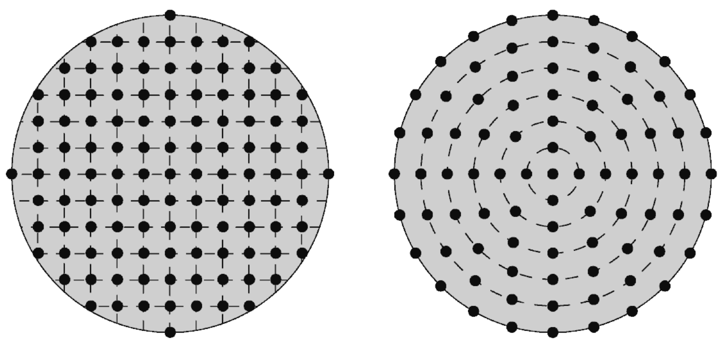
$$\bar{l}_B = F_B - \frac{2F-F_F}{[1-(\bar{y}_B/h')]} \tag{8-31}$$

式中，F 为有效焦距，F_F 为前焦距，F_B 为后焦距，h'为像高。

8.4　点列图

一个光学系统成像质量可以通过不同的方法来预测，我们将会在接下来的部分讨论。如果横向像差比艾里斑直径大得多，那就可以忽略衍射的影响，那么用几何成像就可以对透镜系统进行精确描述。其中一种方法为点列图法。如图 8-14 所示，矩阵光线束或者环形排列的光线束通过光学系统的入瞳，画出这些光束在焦平面上的交点，这种图称为点列图（Herzberger，1947，1957；Linfoot，1955；Lucy，1956；Miyamoto，1963；Stavroudis 和 Feder，1954）。点列图表示各光束的横向像差 TA_x 和 TA_y 的值。由于光学系统的对称性，点列图也是关于 y 轴对称的。

点列图给出了一种物点成像的能量分布的直观表示方法。图 8-15 给出了一些点列图。如果有不同颜色光的多张点列图，也可以评估出色差。



a)　　　　　　b)

图 8-14　计算点列图用的光线在入瞳上的矩形和环形排列
a）矩形排列　b）环形排列

8.4.1　几何光点尺寸

点列图的数据对于获得成像质量的相关信息是非常重要的，如图像的几何光点尺寸和径向能量分布。根据光束径向横向像差的定义：

$$TA_\rho^2 = TA_x^2 + TA_y^2 \tag{8-32}$$

值得注意的是，在计算这些横向像差 TA_x 和 TA_y 的时候，是以黄光（d 或者 e）的高斯像为参考的。横向像差的平均值为有像差的图像的质心高度，也要以高斯像作为参考进行计算。考虑子午面的对称性，式（8-32）可以写成

$$\overline{TA} = \frac{\sum_{i=1}^{N} TA_y}{N} \tag{8-33}$$

这个求和公式包含了点列图上所有的光线。几何光点的大小可以根据横向像差来定

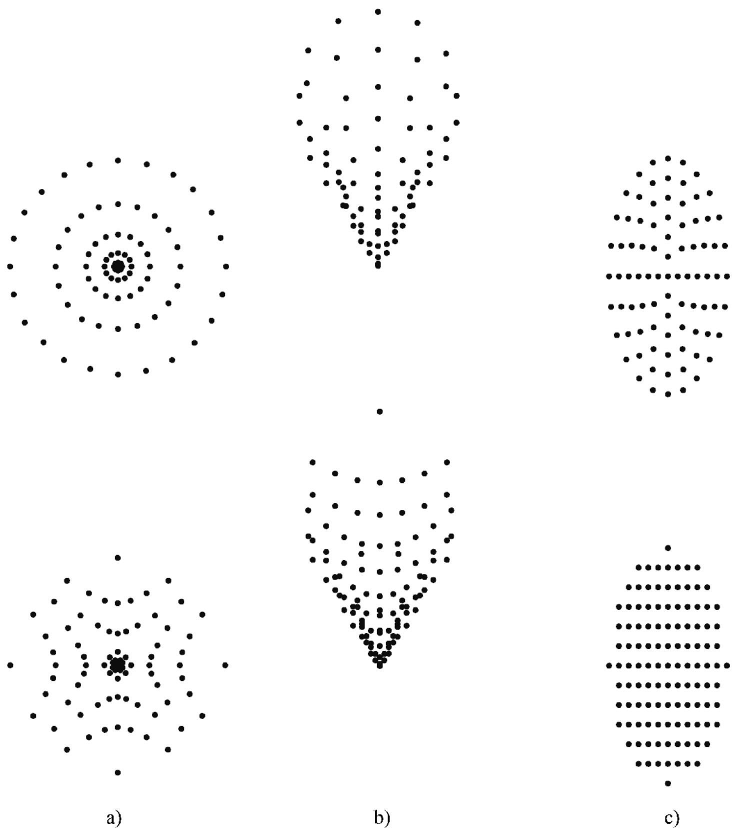


图 8-15 一些初级像差的点列图，使用环形和矩形排列
a）球差 b）彗差 c）像散

义，即横向像差的方差，它是光点大小的均方根 TA_{rms} 的二次方：

$$TA_{rms}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}[TA_x^2 + (TA_y - \overline{TA})^2]}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} TA_\rho^2}{N} - \overline{TA}^2 \tag{8-34}$$

式中，计算图像尺寸用到的质心，通常不在高斯像上。如果以高斯像为参考，则上式最后一项必须为0。式（8-33）和式（8-34）计算的准确度严重依赖于两个因素，如 Forbes（1988）提到过的。第一个因素是点列图用到的光线的类型；第二因素是光线的数量。显然，当光线数量趋近于无穷的时候得到的结果越准确。

假设光线数量趋近于无穷，则横向像差 $TA_\rho(\rho,\theta)$ 为一连续函数，式（8-33）和式（8-34）就可以写为

$$\overline{TA} = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} TA_y(\rho,\theta)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \tag{8-35}$$

和

$$TA_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}[TA_x^2 + (TA_y - \overline{TA})^2]\rho\text{d}\rho\text{d}\theta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}TA_\rho^2(\rho,\theta)\rho\text{d}\rho\text{d}\theta - \overline{TA}^2 \tag{8-36}$$

以上表达式可以用高斯积分公式求解。将相同数量的环状光线放在入瞳上，分布满足：

$$\theta_k = \frac{\pi(k-1/2)}{N_\theta} \tag{8-37}$$

式中，N_θ 是半圆上的点的数量。容易看出，横向像差函数 $TA_\rho(\rho,\theta)$ 中角度参量是平滑的。因此，以上积分公式可以精确表示为

$$TA_{\text{rms}}^2 = \frac{2}{N_\theta}\sum_{k=1}^{N_\theta}\int_0^1 TA_\rho^2(\rho,\theta_k)\rho\text{d}\rho - \overline{TA}^2 \tag{8-38}$$

另一方面，对于共轴系统，横向像差函数 $TA_\rho(\rho,\theta)$ 是关于子午面对称的，因此，用与 7.3 节中关于波像差相似的证明方法，我们可以证明这个横向像差函数只包含 ρ^2 项和 $r\cos\theta$ 项。同样的因为这种对称性，所有 $\cos\theta$ 的奇数幂项的和为 0。这说明在这个积分公式中，我们只需要考虑 ρ 的偶数幂。为了方便计算，设一个新变量 $\sigma = \rho^2$，可得

$$TA_{\text{rms}}^2 = \sum_{k=1}^{N_\theta}\int_0^1 \frac{1}{N_\theta}TA_\rho^2(\sigma^{\frac{1}{2}},\theta_k)\,\text{d}\sigma - \overline{TA}^2 \tag{8-39}$$

可以利用高斯积分公式进行精确求解，如下：

$$\int_0^l f(x)\,\text{d}x = \sum_{j=1}^{N} w_j f(x_j) \tag{8-40}$$

式中，$f(x)$ 是取 N 个样本点的多项式。当多项式次数不大于 $2N-1$ 时，引入高斯离散位置参量 x_i 和 w_i 保证积分精确。利用上式计算式（8-10）中的积分，再次用归一化半径 ρ 代替 $\sigma^{\frac{1}{2}}$，有

$$TA_{\text{rms}}^2 = \sum_{k=1}^{N_\theta}\sum_{j=1}^{N_\rho} w_j(\rho)\,TA_\rho^2(\rho_j,\theta_k) - \overline{TA}^2 \tag{8-41}$$

式中，N_ρ 是高斯样点组成的环的数量。包含 9 条光线的点列图，$N_\rho=3$，$N_\theta=3$，如图 8-16a 所示，精确到百分位。高斯样点的各参数值见表 8-1。表中 $w_j(\rho)$ 为归一化值，所以有 $N_\theta[w_1(\rho)+w_2(\rho)+w_3(\rho)]=1$。

以上描述的入瞳光线的分布并不是很理想，因为没有包含光瞳的中心光线或主光线。Forbes 提供了一种解决方法，叫拉道积分。拉道积分所需的光瞳光线的分布如图 8-16b所示。表 8-2 列出了式（8-12）用到的拉道常数，其中 $w_j(\rho)$ 已经被归一化，有 $N_\theta[w_1(\rho)+w_2(\rho)+w_3(\rho)+w_4(\rho)]=1$。有的时候也会利用光瞳边缘的光线进行计算，即洛巴托（Lobatto）积分。

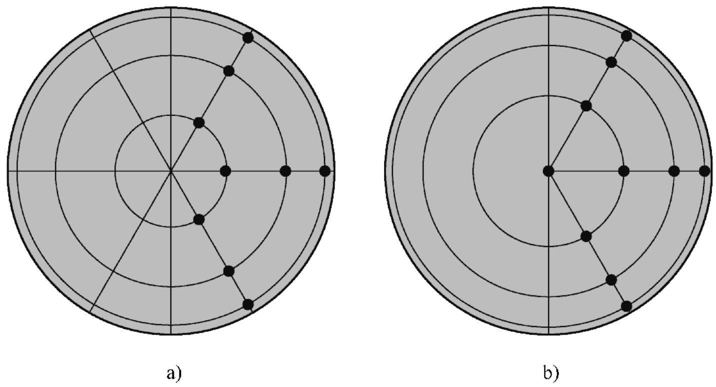


图8-16 对于拉道积分，在光瞳上光线的分布
a）高斯积分 b）拉道积分

表8-1 $N_\rho=3$ 和 $N_\theta=3$ 的高斯积分参数

j	$w_j(\rho)$	ρ_j
1	0.09259259	0.33571069
2	0.14814815	0.70710678
3	0.09259259	0.94196515

表8-2 $N_\rho=4$ 和 $N_\theta=3$ 的拉道积分参数

j	$w_j(\rho)$	ρ_j
1	0.02083333	0.00000000
2	0.10961477	0.46080423
3	0.12939782	0.76846154
4	0.73487407	0.95467902

8.4.2 径向能量分布

我们可以通过数点列图上不同直径的圆内的光点数量来获得径向能量分布图，如图8-17所示。虽然这是一维结果，但是对于评估透镜系统的光学分辨能力是非常有价值的。

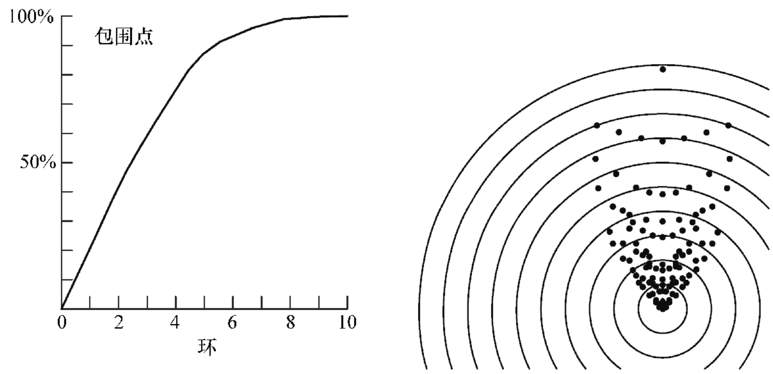


图8-17 从点列图计算环绕能量

8.5　波阵面的形变

波阵面可以用多种方法获得，我们将在接下来的部分进行讨论。

8.5.1　通过横向像差计算

可以像哈特曼实验中提到的那样，通过利用 7.2 节中提到的关系式和梯形法则，对点列图中的横向像差进行数值积分来计算波阵面的形状。

利用梯形法则的积分只有当像差只包括斜差、离焦和像散的时候才是准确的，如果存在球差、彗差和高阶像差，则结果会有很大误差。在哈特曼实验中，以理想像差位置为参考的横向像差积分很好地解决了这个问题。在透镜设计评估系统中，仿真程序包括以下几个部分：

1）像差系数可以通过点列图中包含的子午像差图和弧矢像差图数据计算得到。利用这些系数得到的波阵面的形状只包括初级像差和 5 阶球差。通过下面的步骤可以改进模拟结果。

2）对像差系数对应的点列图求导，获得横向像差。

3）用上部计算得到的点列图的横向像差减去实际点列图得到的横向像差。

4）对上步得到的横向像差的差值积分来得到高阶波阵面的形变。沿与 x 轴平行的一条直线积分，可得

$$W_{nm} = \frac{\sigma}{2r_w}\sum_{i=1}^{i=n}[TA(x_{i-1},y_m) - TA(x_i,y_m)] \tag{8-42}$$

如果沿一条与 y 轴平行的直线积分，可得到类似的表达式。

5）将这个高阶波阵面形变加上第一步得到的波阵面，就可以得到比较理想的波阵面形状。

8.5.2　通过光程直接计算

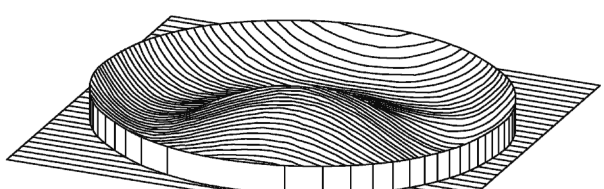


图 8-18　一个光学系统的波前

光学系统的波阵面畸变可以通过描绘光学系统的光路图来计算得到。利用这种方法，光线在光学系统中的光程可以通过光线追迹直接获得。根据费马原理，如果是理想成像系统，从点物发出的光线到达点像，其光程是常数。但是由于通常状况下为非理想成像，光线不能在理想像点会聚，折射波阵面与参考球相比不是一个理想球面，而是发生了一些形变，如图 8-18 所示。

为了计算波阵面的畸变，我们首先要定义参考球面的位置和曲率半径。一般会选择与出瞳相切，曲率中心为高斯像的球面，如图 8-19 所示。从物点（未在图上画出）发出的光线经过参考球面上点 A，可以计算出其光程。根据费马原理，从物点到波阵面上

点 B 的光程差与物点到波阵面与主光线交点 C 的光程差相等。因此，用主光线上 C 点的光程减去参考球面上 A 点的光程即可得到波阵面畸变量。

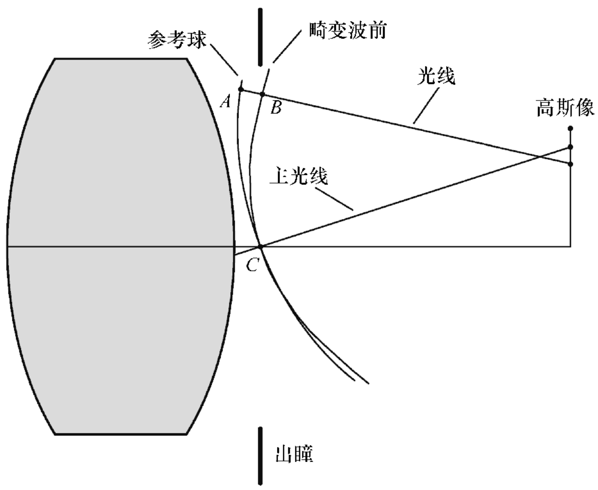


图 8-19　从光程计算波前

这种方法由 Welford 提出，Marchand 和 Phillips 验证。对于光学系统，从一离轴物点到参考波阵面的总光程 OP_{total} 为

$$OP_{\text{total}} = \sum_{j=0}^{k} OP_j \tag{8-43}$$

式中，第一个波阵面是 OP_0，参考波阵面是 OP_k。利用式（D-6），从第 j 个曲面到 $j+1$ 个曲面之间的光程 OP_j（见图 8-20）为

$$OP_j = n_j^2 \frac{Z_{j+1} - Z_j + t_j}{M_j} \tag{8-44}$$

式中，如 D.1.1 节中的定义，M_j 是第三项余弦系数乘以折射率，Z_j 和 Z_{j+1} 是前表面和后表面的矢高。

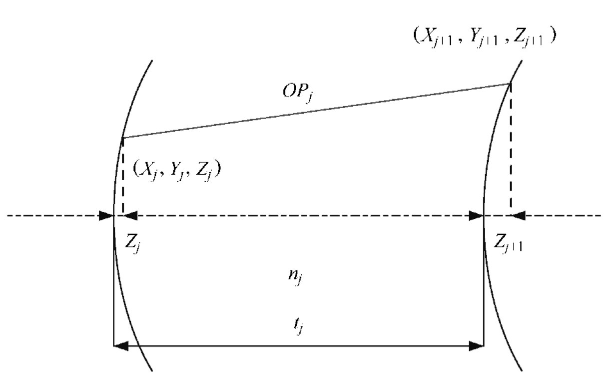


图 8-20　光程计算

用上述光程减去沿主光线的光程，即可得波阵面的形状，如下：

$$\begin{aligned} W(x,y) &= OP_{\text{total}}(x,y) - \overline{OP}_{\text{total}}(x,y) \\ &= \sum_{j=0}^{k} n_j^2 \left[\frac{Z_{j+1} - Z_j + t_j}{M_j} - \frac{\overline{Z}_{j+1} - \overline{Z}_j + t_j}{\overline{M}_j} \right] \end{aligned} \qquad (8\text{-}45)$$

通常，用加顶线的方式来表示与主光线相关的参量。

一般来说，上式两个被减数的量级要和 t_j 一样大，要用精确度很高的波长来计算。这就是说，至少要用精确到八到九位数值来计算，这是非常困难的。为了解决这个问题，Welford 提出：

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} - \frac{1}{\overline{M}} &= \frac{\overline{M} - M}{\overline{M}M} = \frac{\overline{M}^2 - M^2}{\overline{M}M(\overline{M} + M)} \\ &= \frac{K^2 + L^2 - \overline{K}^2 - \overline{L}^2}{\overline{M}M(\overline{M} + M)} \end{aligned} \qquad (8\text{-}46)$$

利用关系式 $K^2 + L^2 + M^2 = n^2$，带入式（8-45），可以得到

$$W(x,y) = \sum_{j=0}^{k} n_j^2 \left[t_j \frac{K_j^2 + L_j^2 - \overline{K}_j^2 - \overline{L}_j^2}{\overline{M}_j M_j(\overline{M}_j + M_j)} + \frac{Z_{j+1} - Z_j}{M_j} - \frac{\overline{Z}_{j+1} - \overline{Z}_j}{\overline{M}_j} \right] \qquad (8\text{-}47)$$

利用式（8-47），因为没有相差很大的两数做差，在可以接受的量级内，就能得到较高的精度。但是，计算要涉及相对较小的数。

8.5.3　Conrady 方法计算波阵面的形变

根据轴上光束的光线追迹结果，Conrady 提出了另外一种计算波阵面变形的方法。这种方法精度很高，但是存在两个问题，即只能用于共轴的旋转对称系统的轴上点，以及需要大量的计算。

为了描述这种方法，考虑图 8-21，一条子午面光线在球面点 P 发生折射，球面顶点为 A。假设入射波阵面是理想球面，曲率中心为 B。点 O 位于入射光线和波阵面的交点处。因此，入射面的光程差（OPD）为

$$OPD = n'AB' - nOP - n'PB' \qquad (8\text{-}48)$$

以 B' 为圆心，过点 P 和一点 E 作圆，此圆为没有光程差时折射波的波阵面。则光程差也可表示为

$$OPD = n'AE - nOP \qquad (8\text{-}49)$$

然后，以 B 为圆心，过 P 和一点 P' 作圆。由于 OP 等于 AP'，从图 8-21 可以看出

$$AE = AQ - EQ;\ OP = AQ - P'Q \qquad (8\text{-}50)$$

同理，可以看出 AQ 长为

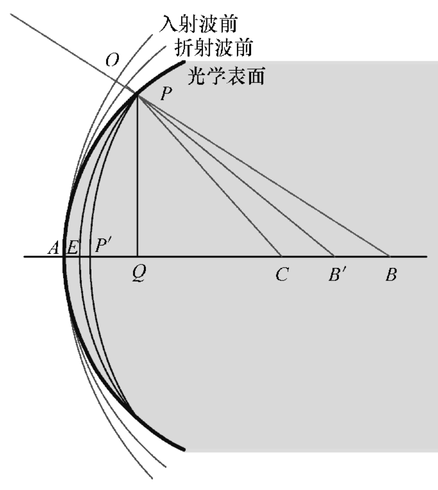


图 8-21　对于一个会聚光学系统，光轴上波前的 Conrady 方法计算

$$Z=AQ=Y\tan\frac{U+I}{2}=Y\tan\frac{U'+I'}{2} \tag{8-51}$$

EQ 长为

$$EQ=Y\tan\frac{U}{2} \tag{8-52}$$

然后利用这些表达式和 $P'Q$ 与之相似的表达式可得，OPD 为

$$OPD=n'Y\left(\tan\frac{U'+I'}{2}-\tan\frac{U'}{2}\right)-nY\left(\tan\frac{U+I}{2}-\tan\frac{U}{2}\right) \tag{8-53}$$

利用三角函数公式，可得

$$OPD=n'Y\frac{\sin(I'/2)}{\cos[(U'+I')/2]\cos(U'/2)}-nY\frac{\sin(I/2)}{\cos[(U+I)/2]\cos(U/2)} \tag{8-54}$$

然后用第一项的分子分母同乘以 $2\cos I'/2$，同样的，第二项分子分母同乘以 $2\cos I/2$，利用正弦定律，可得

$$OPD=\frac{n'Y\sin I'}{2\cos(U+I/2)}\left[\frac{1}{\cos(I'/2)\cos(U'/2)}-\frac{1}{\cos(I/2)\cos(U/2)}\right] \tag{8-55}$$

再经过一些代数计算，最终可得 OPD 的表达式：

$$OPD=\frac{n'Y\sin[(U-U')/2]\times\sin[(I-U')/2]}{2\cos(U/2)\cos(I/2)\cos(U'/2)\cos(I'/2)\cos(U+I/2)} \tag{8-56}$$

式（8-56）为单个表面的 OPD，如果想计算整个系统的光程差，只要把所有表面的光程差相加即可。

8.6　点扩散函数和线扩散函数

点扩散函数和线扩散函数是两种不同的评估光学系统成像质量的计算函数（Barakat 和 Houston，1964；Jones，1958；Malacara，1990；Marchand，1964）。点扩散函数即光学系统中一个点光源在像平面上产生的辐照度。它可以通过多种方法计算得到。一种方法是通过瞳孔函数的傅里叶变换得到，这将会在第9章中提到。像上一点的幅度由下式给出：

$$A(x_F,y_F)=\iint_\sigma T(x,y)\,e^{ik(xx_F+yy_F)/F}\,dxdy \tag{8-57}$$

式中，(x_F，y_F）是焦平面上的坐标，对入瞳的一小块面积 σ 上积分。入瞳上的振幅 $T(x,y)$，或者叫入瞳函数，由下式给出：

$$T(x,y)=E(x,y)\,e^{ikW(x,y)} \tag{8-58}$$

式中，$E(x,y)$是出瞳上的幅值分布，$W(x,y)$是出瞳上的波前畸变。点扩散函数由像振幅的复平方给出：

$$S(x_F,y_F)=A(x_F,y_F)A^*(x_F,y_F) \tag{8-59}$$

如果入瞳上的照度不变（$E(x,y)$ 为常数），则式（8-27）可以写为

$$A(x_F, y_F) = \iint_{\sigma} e^{ik[(xx_F + yy_F)/F + W(x,y)]} dxdy \tag{8-60}$$

现在上式可以通过将积分面分成小的正方形来计算，如图 8-22 所示。如果每个小正方形的中心坐标为（x_0，y_0），这个小正方形的波阵面就可以写为

$$W(x,y) = W_0 + \frac{TA_x}{F}(x - x_0) + \frac{TA_y}{F}(y - y_0) \tag{8-61}$$

式中，W_0 是正方形中心的波前畸变，如在 8.5 节中提到的。积分可得

$$A(x_F, y_F) = \sum \text{sinc}\left[\frac{kA}{2F}(TA_{xj} + x_F)\right]\text{sinc}\left[\frac{kA}{2F}(TA_{yj} + y_F)\right] \times \exp ik\left(W_{0j} + \frac{x_F x_{0j} + y_F y_{0j}}{F}\right) \tag{8-62}$$

式中，A 为小正方形的边长，sincφ 等于 sincφ/φ。上式为所有入瞳上的小正方形夫琅禾费衍射图的叠加。这些衍射图要加上一个相位因子，取决于小正方形在入瞳上的相对位置。这些衍射图的中心与光线在焦平面上的交点（点列图上的点）是一致的。这些衍射图一定是部分重叠的，才能得到连续的扩散函数。它们不能像图 8-23 那样是分散的。保证这种情况的一个条件是，横向像差的最大值小于衍射图尺寸。我们可以把这个条件表示为

$$TA_{x\max} = \frac{\lambda F}{A} \tag{8-63}$$

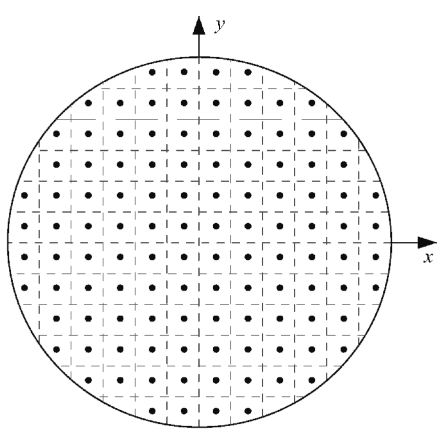
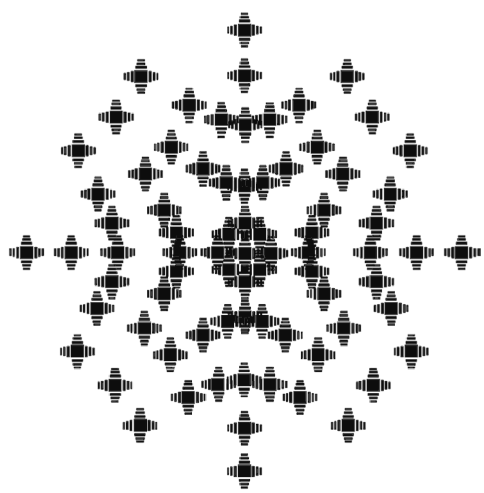


图 8-22　在入瞳上的光线分布计算的衍射图像


图 8-23　图 8-22 中的每一方格的非重叠衍射图像

如果像差很大，可以先估算出点列图上点的密度，再计算点扩散函数。为了得到良好的精度，点的数量需要尽可能地多。

物体为一条线所成的像称为线扩散函数，经常被拿来与点扩散函数对比。为了得到不同方向上的信息，线扩散函数需要从物体的多个方向计算。

8.7　光学传递函数

一个光学系统的传递函数可以通过多种方法计算，我们将会在第9章中具体学习。在此，我们只提出一些根据透镜数据计算传递函数的实用方法。

Hopkins提出了一种利用式（8-57）的积分计算调制传递函数的方法。横向切孔被分割成如图8-22所示的小正方形，每个小正方形的波阵面可以用式（8-61）表示。关于横向切孔我们将在9.6节具体介绍。于是，我们可以得到衍射的光学传递函数表达式，如下：

$$F(\omega_x,\omega_y) = \sum \mathrm{sinc}\left[\frac{kA}{2F}(TA_{xj} - TA_{xjs})\right]\mathrm{sinc}\left[\frac{kA}{2F}(TA_{yj} - TA_{yjs})\right] \times \exp ik(W_{0j} - W_{0js}) \tag{8-64}$$

式中，角标 s 表示出瞳的剪切量是（$F\omega_x/k$，$F\omega_y/k$）。

如果波像差与波长相比非常大，我们可以将第9章中式（9-46）表示的光学传递函数近似为

$$F(\omega_x,\omega_y) = \iint \exp iF\left(\frac{\partial W(x,y)}{\partial x}\omega_x + \frac{\partial W(x,y)}{\partial y}\omega_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8-65}$$

或者利用式（7-3）和式（7-4）：

$$F(\omega_x,\omega_y) = \iint \exp i[TA_x(x,y)\omega_x + TA_y(x,y)\omega_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8-66}$$

积分域为两个横向切孔的重叠区域，如第9章中图9-14所示。但是由于像差很大，切向量达到边界之前，就会达到截止空间频率。因此，会把整个孔径环当作积分域。

如果 OTF 是通过把孔径分成小正方形的光束点列图来计算的话，那么其几何传递函数可以写成

$$F(\omega_x,\omega_y) = \sum_{i=1}^{N}\cos(TA_x\omega_x + TA_y\omega_y) + i\sum_{i=1}^{N}\sin(TA_x\omega_x + TA_y\omega_y) \tag{8-67}$$

式中，其求和为点阵图上的所有光线。这个几何近似出乎意料地精确。几个波长的像差已足够大，足以形成与几何近似下准确 OTF 相同的结果。

对于空间频率非常低的情况，假设横向像差远远小于波长，可以近似写出：

$$F(\omega_x,\omega_y) = \sum_{i=1}^{N}\left[1 - \frac{(TA_x\omega_x + TA_y\omega_y)^2}{2}\right] + i\sum_{i=1}^{N}[(TA_x\omega_x + TA_y\omega_y)] \tag{8-68}$$

上式为低空间频率的光学传递函数，它的平方为调制传递函数：

$$F(\omega_x,\omega_y)F^*(\omega_x,\omega_y) = N - \sum_{i=1}^{N}(TA_x\omega_x + TA_y\omega_y)^2 + \left[\sum_{i=1}^{N}(TA_x\omega_x + TA_y\omega_y)\right]^2 \tag{8-69}$$

由式（8-34），可以看出，对于一个波阵面的 ω 在所有方向上的值相同且旋转对称的光学系统，可以得到

$$F(\omega_x,\omega_y)F^*(\omega_x,\omega_y) = 1 - \omega^2 TA_{\mathrm{rms}}^2 \tag{8-70}$$

这说明，空间频率比较低的调制传递函数取决于图像几何尺寸的均方根。相反地，如果一个系统优化至几何像点尺寸最小，那么光学传递函数的优化目标是较低范围的空间频率。

8.8　像差的容限

只计算像差对于评价光学系统是远远不够的。你永远也不可能精确地计算像差，所以我们要知道精确到什么程度为止。一个光学系统允许的最大像差取决于这个系统的用途。现在我们来认识一些不同的情况。

1）干涉仪精度——一些特殊用途的干涉仪中用到的透镜或者光学系统，可能需要尽可能好的波阵面。于是，高阶像差和初级像差一样需要精确计算。对于最理想的透镜，波阵面的偏差可以达到最小，包括偏差值和离焦量。有时候需要波阵面畸变小于 $\lambda/100$。

2）衍射极限——成像透镜有很小的像差，所以其理论上最高分辨率为衍射极限。图像尺寸为艾里衍射图像。根据瑞利判据，如果波面的变形有一个绝对极大值小于四分之一的波长，则这种光学系统能产生极限衍射图像。然而，必须指出，这个原理只适用于只存在初级球差的情况。如果在一个只存在初级球差的透镜中，波阵面足够平滑，那么光线的横向像差就比艾里半径小。

3）光学质量——用于光学观测的透镜有时候需要考虑衍射极限分辨率，这就需要放大率高的透镜，例如显微镜的物镜。在其他低放大率系统中，例如目镜或者低倍率的望远镜，限制因素是人眼的分辨率。在这种情况下，几何图像的横向像差必须小于人眼的角分辨率，近似为 1′。计算视觉系统的时候必须考虑人眼的自动调焦能力。

4）大气视宁度极限——这种情况适用于陆地上的天文望远镜，角分辨率受到大气干扰的限制。于是，其横向像差必须小于视宁像的尺寸。图像尺寸取决于大气状况和望远镜的质量，为 0.1″~1″。

一个透镜的实际曲率和厚度和其理想设计值之间的偏差取决于许多因素。其中一个因素是系统性能的容许偏差，如前面章节中提到的。偏差需要被考虑到制作成本中，并且成本并不是随偏差值线性变化的。制作成本是随偏差值的缩小成指数增长的。因此，偏差值要在成本允许的范围内尽量靠近预先设置的容许值。另外一个重要的因素是制作工厂的技术水平。规定一个光学系统，不同的光学表面对曲率偏差的敏感度是不同的。设计者需要在确定偏差之前，计算每个设计参量的灵敏度。

Shannon 给出了一个不同精度要求的光学器材偏差值的规范，见表 8-3。

我们需要随时谨记，不仅每个参量的偏差值对成像质量下降有所影响，而且所有偏差的组合也会产生影响。总误差可以用所有偏差的均方根来评估，因此，如果有 N 个参量，参量 i 产生的误差为 W_i，则所有偏差的均方根 W_{rms}：

$$W_{rms} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N} W_i^2} \tag{8-71}$$

表 8-3 光学系统的典型制造公差

参数	商业镜头	精密镜头	高精密镜头
波前畸变	0.25（均方根）	0.1（均方根）	0.05（均方根）
曲率半径偏差	1.0%	0.1%	0.01%
厚度偏差	±0.2mm	±0.05mm	±0.01mm
偏心	0.1mm	0.01mm	0.001mm
倾斜	1′	10″	1″

来源：Shannon, R. E., Handbook of Optics, Vol. I, McGraw-Hill, New York, 1995.

参考文献

[1] Abramowitz, M. and Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York (1965).

[2] Barakat, R. and Houston, A., "Line Spread Function and Cumulative Line Spread Function for Systems with Rotational Symmetry," *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 768-773 (1964).

[3] Barakat, R. and Morello, M. V., "Computation of the Transfer Function of an Optical System from the Design Data for Rotationally Symmetric Aberrations: Ⅱ. Programming and Numerical Results," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 992-997 (1962).

[4] Barakat, R. and Morello, M. V., "Computation of the Total Illuminance (Encircled Energy) of an Optical System from the Design Data for Rotationally Symmetric Aberrations," *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 235-240 (1964).

[5] Conrady, A. E., *Applied Optics and Optical Design*, *Part Two*, Dover Publications, New York (1960).

[6] Forbes, G. W., "Optical System Assessment for Design: Numerical Ray Tracing in the Gaussian Pupil," *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**, 1943-1956 (1988).

[7] Ghozeil, I., "Hartmann and Other Screnn Tests," in *Optical Shop Testing*, D. Malacara, ed., John Wiley, New York (1992).

[8] Herzberger, M., "Light Distribution in the Optical Image," *J. Opt. Soc. Am.*, **37**, 485-493 (1947).

[9] Herzberger, M., "Analysis of Spot Diagrams," *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 584-594 (1957).

[10] Heshmaty-Manesh, D. and Tam, S. C., "Optical Transfer Function Calculation by Winograd's Fast Fourier Transform," *Appl. Opt.*, **21**, 3273-3277 (1982).

[11] Hopkins, H. H., "Geometrical-Optical Treatment of Frequency Response," *Proc. Phys. Soc. B*, **70**, 1162-1172 (1957).

[12] Jones, R. C., "On the Point and Line Spread Functions of Photographic Images," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 934-937 (1958).

[13] Kidger, M. J., "The Calculation of the Optical Transfer Function Using Gaussian Quadrature," *Opt. Acta*, **25**, 665-680 (1978).

[14] Linfoot, E. H., "Plate Diagram Analysis", in *Recent Advances in Optics*, Chapter 4, Clarendon Press, Oxford (1955).

[15] Lucy, F. A., "Image Quality Criteria Derived from Skew Traces," *J. Opt. Soc. Am.*, **46**, 699 – 706 (1956).

[16] Malacara, D., "Diffraction Performance Calculations in Lens Design," *Proceedings of the International Lens Design Conference*, Monterey, CA (June 1990).

[17] Marchand, E. W., "Derivation of the Point Spread Function from the Line Spread Function," *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 915 – 919 (1964).

[18] Marchand, E. W. and Phillips, R., "Calculation of the Optical Transfer Function from Lens – Design Data," *Appl. Opt.*, **2**, 359 – 364 (1963).

[19] Miyamoto, K., "Image Evaluation by Spot Diagram Using a Computer," *Appl. Opt.*, **2**, 1247 – 1250 (1963).

[20] Plight, A. M., "The Rapid Calculation of the Optical Transfer Function for On – Axis Systems Using the Orthogonal Properties of Tchebycheff Polynomials," *Opt. Acta*, **25**, 849 – 860 (1978).

[21] Plight, A. M., "The Calculation of the Wavefront Aberration Polynomial," *Opt. Acta*, **27**, 717 – 721 (1980).

[22] Shannon, R. E., "Tolerancing Techniques," in *Handbook of Optics*, Vol. Ⅰ, M. Bass, ed., McGraw – Hill, New York (1995).

[23] Stavroudis, O. and Feder, D. P., "Automatic Computation of Spot Diagrams," *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 163 – 170 (1954).

[24] Welford, W. T., *Aberrations of Optical Systems*, Adam Hilger, Bristol (1986).

[25] Wetherell, W. B., "The Calculation of Image Quality," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. Ⅷ, Chap. 6, R. R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Academic Press, San Diego, CA (1980).

第 9 章　光学系统中的衍射

9.1　惠更斯 – 菲涅耳原理

正如我们在第 7 章中所指出的那样，在一级近似的情况下，光可以被看作一束光线，但是它的本质是一个波。几何光学的近似往往不能够准确描述和解释一些现象和图像结构。于是，就有必要学习和使用衍射理论。在这一章中，我们将简要地介绍这一理论，并着重关注它在成像研究中的应用。此主题已见之于许多的书籍和期刊出版物，例如 Born 和 Wolf（1964），Malacara（1988）。

解释衍射现象的理论很多，但最简单的是惠更斯 – 菲涅耳原理，并且在大多数情况下，它是非常准确的。该理论假设当光通过一个孔径时，波前会发散次级波，如图 9-1 所示。1678 年惠更斯在荷兰推测出了这些次级波，但是当时这个理论并不能定量解释衍射现象。许多年以后的 1815 年，在法国，奥古斯丁 · 让 · 菲涅耳认为惠更斯所提出的次波在到达观察屏时必定与它们相应的相位发生干涉。此理论足以解释光学系统中产生的所有衍射现象。其计算出的点光源（平面波前）的辐照度值是非常准确的。许多其他的理论在一些特定的情况下能够改善惠更斯 – 菲涅耳模型的计算结果，但是在此我们并不需要了解它们。

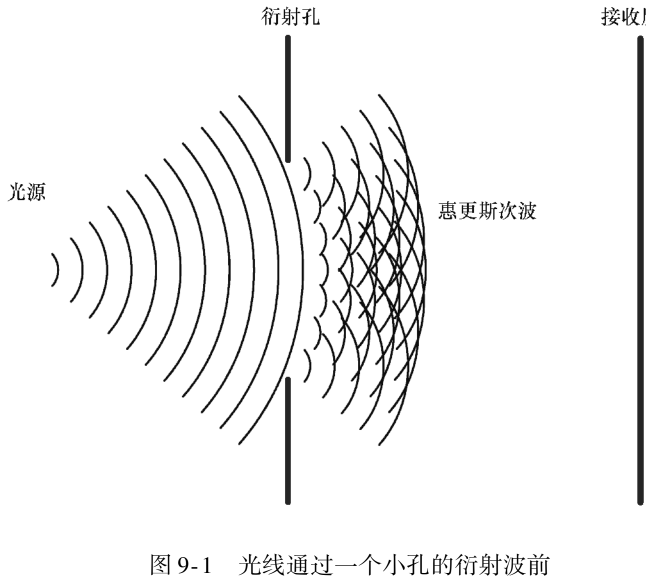


图 9-1　光线通过一个小孔的衍射波前

在任何衍射实验中，最重要的几个元素就是光源、衍射孔和观察屏幕。如果光源与衍射孔的距离或衍射孔与观察屏的距离中的任何一个或两者均是有限的，我们就在进行所谓的菲涅耳衍射原理实验。如果这两个距离是无限的，那么我们就是开展夫琅禾费的衍射实验。现在让我们一起研究以下各节中的菲涅耳衍射与夫琅禾费衍射的一些现象。

9.2　菲涅耳衍射

菲涅耳衍射中一个很有意思的例子就是圆孔的衍射，其几何形状如图 9-2 所示。为了研究惠更斯所提出的次波与它们相应的相位在观察屏上的干涉，我们只简单考虑光轴上的观察点 P，这是因为衍射孔是圆对称的。正如我们所看到的那样，以衍射孔中心为圆心的虚拟薄圆环上所有点发出的惠更斯次波在观察点 P 上拥有相同的相位。因此，通过衍射孔中心（光轴）的光与通过半径为 S 的圆环的光，它们之间的相位差可以表达为

$$\delta = KS^2 \tag{9-1}$$

$$K = \frac{\pi(a+b)}{ab\lambda} \tag{9-2}$$

式中，a 和 b 分别是点光源到衍射孔中心的距离和衍射孔到观察点的距离。来自于衍射孔圆环上的光对观察点所贡献的照度 $\mathrm{d}I$ 与它的面积成正比。这个区域的面积与环的宽度 $\mathrm{d}S$ 和环的半径 S 成正比。如果采用矢量的方法，在计算它们对照度的贡献时引入一个角度，该角度等于它们的相位差，我们就能得到如图 9-3 所示的曲线，其表达式为

$$\mathrm{d}x = AS\mathrm{d}S\cos\delta \tag{9-3}$$

$$\mathrm{d}y = AS\mathrm{d}S\sin\delta \tag{9-4}$$

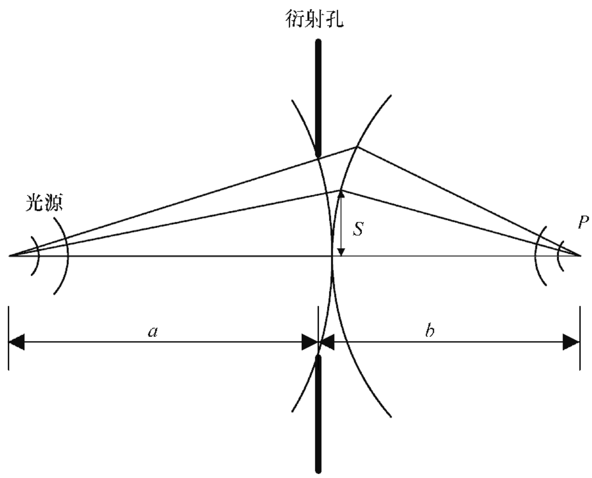


图 9-2　光线通过圆形光孔时，对于在光轴上的球面波前衍射的几何结构

然后，运用等式（9-1），再进行积分，则

$$x^2+\left(y-\frac{a}{2K}\right)^2=\left(\frac{A}{2K}\right)^2 \qquad (9\text{-}5)$$

该表达式表示一个圆，其圆心在 y 轴上并且与 x 轴相切。这意味着如果孔的直径不断增加，光轴上观察点的照度值会持续在最大振幅值与零幅值之间振荡。显然，对于一个非常大的衍射孔径而言是很难在实验中观察到光强的这些振荡，这是因为随着衍射孔直径逐渐变大，振荡会逐渐加快和减弱，如图9-4所示。而式（9-5）中的曲线并不是一个圆，而是一个螺旋线，如图9-5所示。

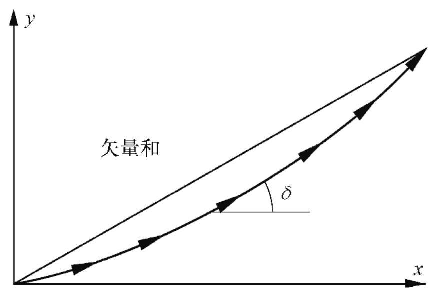


图9-3　矢量附加振幅对于衍射的贡献

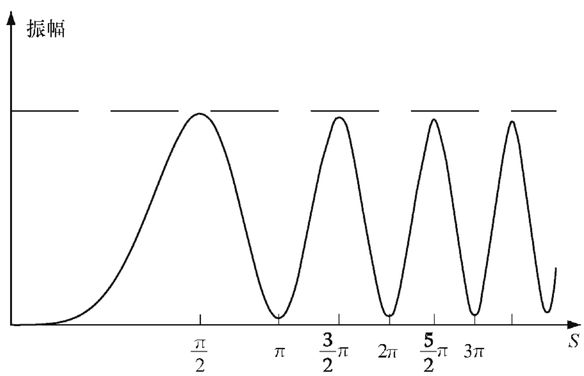


图9-4　用球形波前照明时，沿着圆孔径向的振幅变化

作为这个理论的一个应用，我们设计一个针孔摄像头来对太阳成像。针孔的最佳尺寸是在观察点处产生最大照度时的最小直径。从图9-5中我们可以看到该直径会使得沿光轴行进的光线与在孔径边缘发生衍射的光线之间的相位差等于 $\pi/2$。因此，该孔的半径 S_0 由下式给出

$$S_0=\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}} \qquad (9\text{-}6)$$

由于太阳到孔的距离 a 为无穷大，上式变为

$$S_0=\sqrt{\frac{b\lambda}{2}} \qquad (9\text{-}7)$$

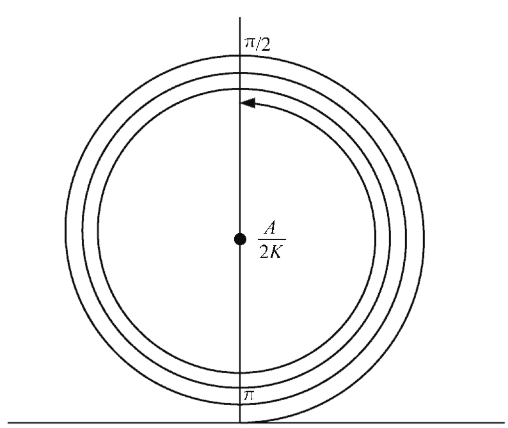


图9-5　用球形波前照明圆孔，振幅总和对于观察点的贡献表现为螺旋状

针孔到观察面的距离 b 决定了太阳图像的尺寸和照度。图像的尺寸 d 会随着 b 的增

加而线性增加，而照度会随着 b 的增加而减小。因此，给定一个特定的 b，如果太阳的角直径是 θ（弧度），则图像的直径 d 等于

$$d=\theta b \tag{9-8}$$

9.3　夫琅禾费衍射

从透镜设计者的角度来看，最有意思的衍射类型是光源到衍射孔的距离以及衍射孔到观察面的距离均为无穷大。这种衍射类型被称为夫琅禾费衍射。

至于透镜所构成的光学系统，衍射孔径由透镜的有限尺寸决定，或者更确切地说，由入瞳的直径决定。光源至衍射孔的距离也许并非是无限的，但总体来说，该距离被认为是足够长的。衍射孔到像面的距离并不是物理上的无限远，而是光学上的无限远，因为透镜会将平行光线中的所有光线都聚焦在一个共同的点上，如图 9-6 所示，则观察面可被视为放置在衍射孔的光学无限远处。在此列举一个典型的夫琅禾费衍射的例子，让我们一起研究一个衍射狭缝。该狭缝位于 $x-y$ 平面上，其中心在 y 轴上，宽度等于 $2a$，如图 9-7 所示。

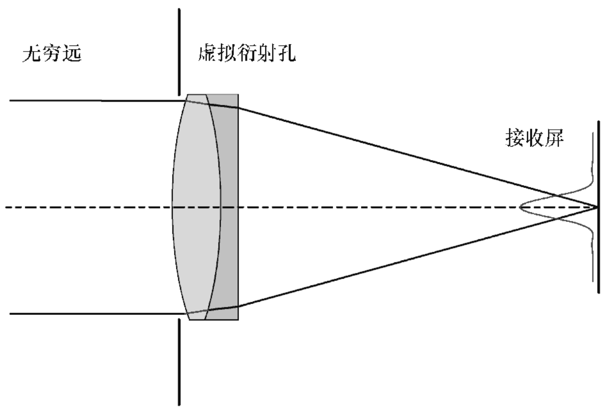


图 9-6　一个点物衍射成像

如图 9-7 所示，直接应用惠更斯－菲涅耳衍射模型可知，观察屏上某一点处电磁场的振幅 $U(\theta)$ 由下式给出

$$U(\theta)=A\int_{-a}^{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky\sin\theta}\mathrm{d}y \tag{9-9}$$

式中，A 是一个常数，积分区域从 $-a$ 到 a，而 k 由下式给出

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \tag{9-10}$$

指数项代表观察点处通过 y 点的光线与通过原点的光线的相位差。积分之后有

$$U(\theta)=Aa\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky\sin\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ky\sin\theta}}{2\mathrm{i}ka\sin\theta}\right)=U_0\left[\frac{\sin(ka\sin\theta)}{ka\sin\theta}\right]=U_0\operatorname{sinc}(ka\sin\theta) \tag{9-11}$$

式中，U_0 是常数。观察面上的光强分布 $I(\theta)$ 等于 $U(\theta)$ 再乘上它的复共轭。既然振幅分布函数是实数，那么光强分布为

$$I(\theta)=I_0\operatorname{sinc}^2(ka\sin\theta) \tag{9-12}$$

振幅函数 $U(\theta)$ 与它对应的光强分布 $I(\theta)$ 如图 9-8 所示。我们可以看到光强的第一个最小值（零值）位于

$$\sin(\theta)=\frac{\lambda}{2a} \tag{9-13}$$

正如所料，θ 会随着狭缝的增大而减小。

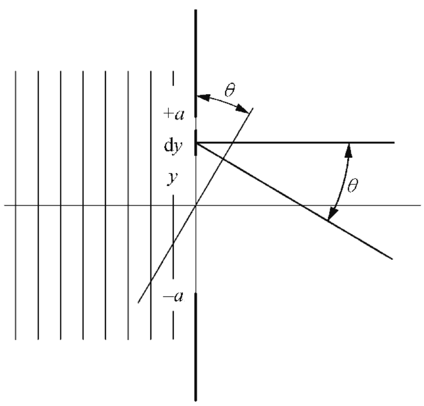


图 9-7　夫琅禾费衍射图形的几何计算

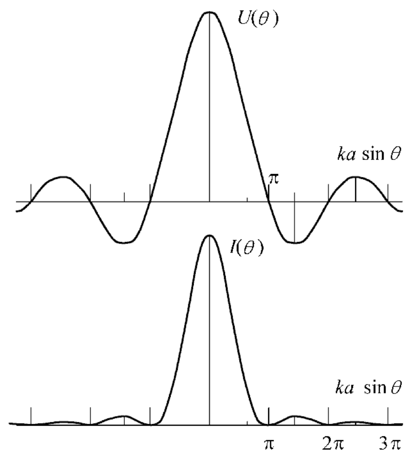


图 9-8　对于狭缝的夫琅禾费衍射的振幅和辐照图

9.3.1　圆形孔径

在夫琅禾费衍射中最重要的例子就是圆孔衍射，因为大部分透镜都拥有这样的外形。与计算狭缝衍射的方法类似，等式（9-9）推广至二维方向上，圆孔的夫琅禾费衍射分布为

$$U(\theta_x,\theta_y)=\frac{A}{\pi}\iint_{\sigma}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x\sin\theta_x+y\sin\theta_y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9-14}$$

式中，因子 $1/\pi$ 位于积分号前，当入射光束的幅值 A 与出瞳半径均为单位值时，像面中心处的振幅 $U(0,0)$ 等于 1。与图 7-2 以及式（7-8）、式（7-9）类似，如果在极坐标系下，衍射光线的表达式为

$$\sin\theta_x=\sin\theta_\rho\cos\phi \tag{9-15}$$

$$\sin\theta_y=\sin\theta_\rho\sin\phi \tag{9-16}$$

式中，$\sin\theta_\rho$ 是径向角距离，ϕ 是角坐标。式（9-14）便可以表示为

$$U(\theta_\rho,\phi) = \frac{A}{\pi}\int_0^a\int_0^{2\pi} e^{ikS\sin\theta_\rho\cos(\theta-\phi)} S\mathrm{d}S\mathrm{d}\theta \quad (9\text{-}17)$$

将该等式应用于圆孔衍射，则

$$U(\theta_\rho) = 2U_0\left[\frac{J_1(ka\sin\theta_\rho)}{ka\sin\theta_\rho}\right] \quad (9\text{-}18)$$

式中，a 是圆孔的半径，$J_1(x)$ 是一阶贝塞尔函数。该光强分布被称为艾里函数，如图 9-9 所示，其表达式为

$$I(\theta_\rho) = 4I_0\left[\frac{J_1(ka\sin\theta_\rho)}{ka\sin\theta_\rho}\right]^2 \quad (9\text{-}19)$$

第一级暗环（艾里斑）的角半径 θ_ρ 为

$$\sin\theta_\rho = 1.22\frac{\lambda}{2a} = 1.22\frac{\lambda}{D} \quad (9\text{-}20)$$

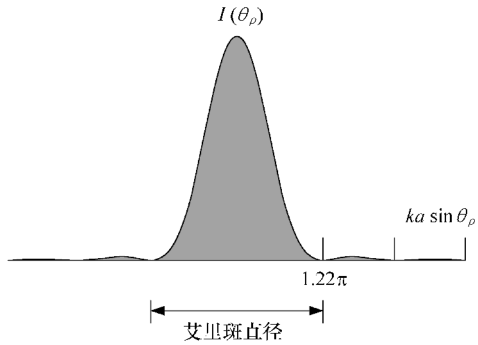


图 9-9　由圆孔产生的夫琅禾费衍射图形

由上式可知理想透镜的角分辨率只和该透镜的直径有关。艾里斑的半径 $d/2$ 为

$$\frac{d}{2} = 1.22\frac{F\lambda}{D} \quad (9\text{-}21)$$

式中，D 是圆孔的直径，F 是有效焦距。如果假设光的波长 λ 为 500nm，则艾里斑直径变为

$$d = 1.22\frac{F}{D} = 1.22FN\mu\mathrm{m} \quad (9\text{-}22)$$

因此，我们可以近似地认为艾里斑的线直径等于 FN，其单位是 μm。Stoltzmann（1980）和 Taylor、Thompson（1958）已经细致地研究过衍射像的结构与性质。大部分的光能（大约 84%）集中在中央核（艾里斑）中，如图 9-10 所示光能的径向分布图。

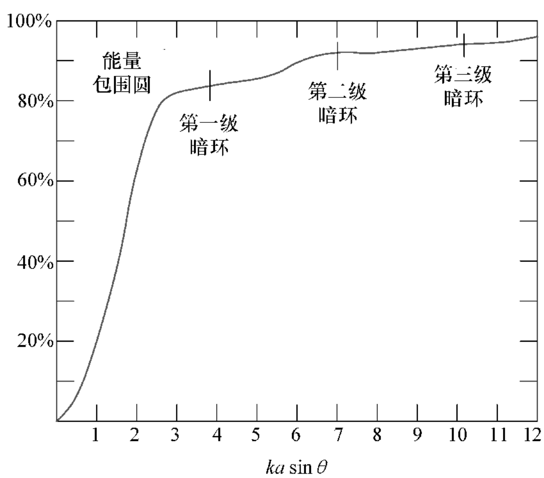


图 9-10　在圆孔的夫琅禾费衍射图形中的环绕能量

9.3.2　环形孔径

许多仪器，例如卡塞格林望远镜，在入射光瞳中心位置有一个中央不透明圆盘。因此其有效光瞳不是一个单纯的圆孔而是一个环形孔径。在这个例子中，像面上的振幅可以表示为

$$U(\theta_\rho) = 2U_0a_1^2\left[\frac{J_1(ka_1\sin\theta_\rho)}{ka_1\sin\theta_\rho}\right] - 2U_0a_2^2\left[\frac{J_1(ka_2\sin\theta_\rho)}{ka_2\sin\theta_\rho}\right] \quad (9\text{-}23)$$

式中，a_1 和 a_2 分别是圆孔的半径和中央不透明圆盘的半径。遮挡比例被定义为 $\eta = a_2/a_1$。随着遮挡比例的增加，衍射斑的尺寸也会增加。图9-11展示了不同遮挡比例下光能的径向分布情况。Taylor、Thompson（1958）和Welford（1960）做了关于环形孔径的研究。

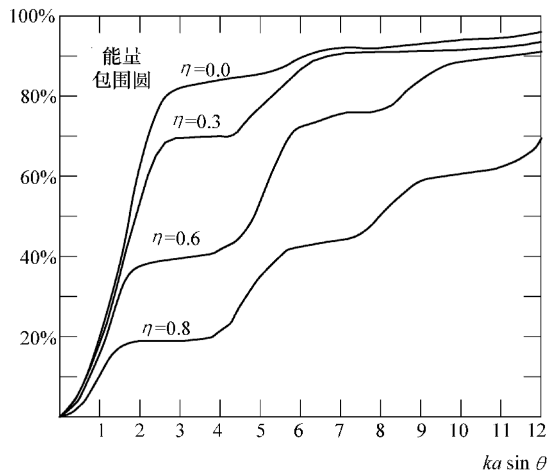


图9-11　在环形孔的夫琅禾费衍射中的环绕能量

由于孔径的形状和尺寸对像的结构存在影响，许多作者研究了很多不同的方法，这些方法是通过修改入瞳以达到改善像质的目的。这被称为切趾法（Barakat，1962a；Barakat和Levin，1963a）。

9.4　存在像差的衍射像

在存在像差的情况下，点源的像不是艾里函数。在这种情况下，通过二维衍射积分公式（9-17）能够计算像的分布。然而，出射光瞳的振幅 A 不是一个常数，并且它必须位于积分号内。

$$A(S,\theta) = E(S,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kW(S,\theta)} \tag{9-24}$$

式中，$E(S,\theta)$ 是入瞳处的振幅分布，它通常为常数，但也有例外。$W(S,\theta)$ 是当光学系统存在像差时波面的形状。存在像差时的衍射像可以表示为

$$U(\theta_x,\theta_y) = \frac{1}{\pi}\iint_{\sigma} E(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k[x\sin\theta_x + y\sin\theta_y + W(x,y)]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9-25}$$

在极坐标系下可表示为

$$U(\theta_\rho,\phi) = \frac{1}{\pi}\int_0^a\int_0^{2\pi} E(S,\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k[S\sin\theta_\rho\cos(\theta-\phi) + W(S,\theta)]}S\mathrm{d}S\mathrm{d}\theta \tag{9-26}$$

在存在像差的情况下，一个点源的像拥有典型的特征结构。许多漂亮的图片能够在Cagnet等人（1962）的书中找到。在考虑了衍射现象的情况下，已经有许多人研究了像

差对成像的影响（Barakat，1961；Barakat 和 Houston，1964；Maréchal，1947）。图 9-12 就展示了一些初级像差存在时点源的衍射像。

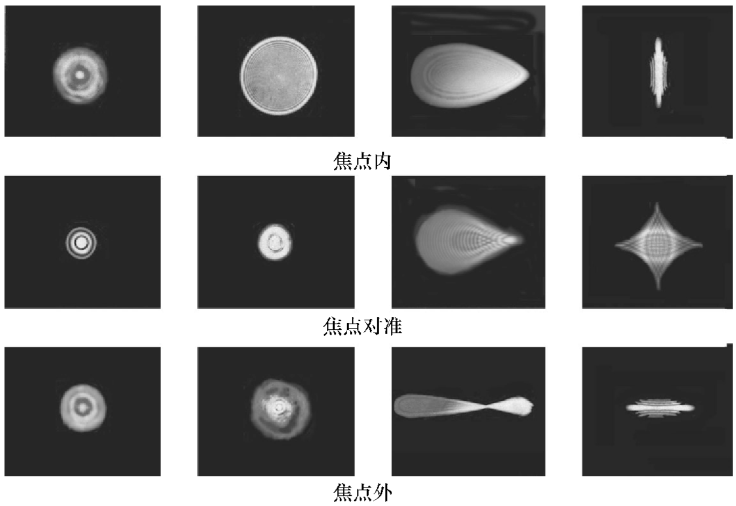


图 9-12　在存在像差时的夫琅禾费衍射图像

9.5　斯特列尔比

当像差比较大时，点源的像的尺寸肯定比艾里斑大。无论像差是否存在，产生图像的光能总是一定的，故随着像斑尺寸的增加像面中心的光强会随之减弱。在等式(9-26)中，假设光学系统入瞳处光的振幅为一个常数，那么像面中心的振幅可以表示为

$$U(\theta_\rho,\phi)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kW(\rho,\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \tag{9-27}$$

式中，如前所述，位于积分号之前的 $1/\pi$ 是该积分式的归一化因子。当没有像差存在以及入瞳半径等于 1 时，振幅值就等于 1。

斯特列尔比被定义为有像差存在时衍射像斑中心处的光强值与理想的衍射像斑中心处的光强值的比值，其表达式为

$$\begin{aligned}\text{斯特列尔比}&=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kW(\rho,\theta)}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\right|^2\\&=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\cos kW(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta+\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\sin kW(\rho,\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\right|^2\end{aligned} \tag{9-28}$$

若设 $W(\rho,\theta)$ 比波长小，斯特列尔比能够表示为

$$\text{斯特列尔比}=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}\left[1-\frac{1}{2}(kW)^2+\mathrm{i}kW\right]\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\right|^2 \tag{9-29}$$

分离每一项，再转化为不同的积分式，有

$$
\begin{aligned}
\text{斯特列尔比} &= \left|1-\frac{k^2}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} W^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta+\frac{\mathrm{i}k}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} W\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\right|^2 \\
&\cong \left|1-\frac{k^2}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} W^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\right|^2+\frac{\mathrm{i}k}{\pi}\left|\int_0^1\int_0^{2\pi} W\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\right|^2 \\
&\cong 1-\frac{k^2}{\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} W^2\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta+k^2W_{av}^2
\end{aligned}
\tag{9-30}
$$

而由式（7-55）关于波前方差的定义，可得

$$\text{斯特列尔比}\cong 1-k^2\sigma_w^2 \tag{9-31}$$

从上面的推导中可以看出斯特列尔比仅仅是波前方差的函数。当斯特列尔比低至0.5时，这个表达式都是有效的。

9.6　光学传递函数

另一种评价光学成像系统分辨能力的方法是通过光学传递函数（OTF）实现的。已经有许多的研究者对其进行过研究（Baker，1992；Barakat，1962b，1964；Barakat 和 Houston，1963a，1963b，1965；Barakat 和 Levin，1963a，1963b；Barnes，1971；Hopkins，1957；Linfoot，1955，1956，1964；Smith，1963；Wolf，1952）。该函数被定义为一个给定空间频率的正弦光栅的像的对比度，空间频率可表示为

$$\omega=\frac{2\pi}{L} \tag{9-32}$$

式中，ω 是角谱，L 是光栅周期。假设我们接收到了一个包含广泛空间频率的物所成的像，然后再分析这个像的频率成分。然后，OTF 是图像中一个给定的空间频率的振幅与物中具有相同的空间频率的振幅的比值。如果物包含了所有的空间频率且振幅为一个常数，那么 OTF 就变成了像的傅里叶变换。这样的物是一个点物，它的像便是点扩散函数（PSF）。因此，OTF 是 PSF 的简单傅里叶变换。如果 $T(x,y)$ 是光学系统出瞳处的振幅（和相位）分布，则它被称为光瞳函数（PF）。由式（9-14），一个点物在像面上的振幅分布（振幅点扩散函数）可以表示为

$$A(x_F,y_F)=\frac{1}{\pi}\iint_\sigma T(x,y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(xx_F+yy_F)/r_W}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9-33}$$

式中，（x_F，y_F）是焦平面上的坐标，r_W 是出瞳处波面的曲率半径。积分区域是出瞳的区域 σ。光瞳函数 $T(x,y)$ 可以表示为

$$T(x,y)=E(x,y)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kW(x,y)} \tag{9-34}$$

式中，$E(x,y)$ 是出瞳处的振幅分布（不携带任何相位信息），$W(x,y)$ 是出瞳处的波前畸变。PSF 可表达为像面上复振幅的二次方。

$$S(x_F,y_F)=A(x_F,y_F)A^*(x_F,y_F) \tag{9-35}$$

将等式（9-33）代入等式（9-35），则

$$S(x_F, y_F) = \frac{1}{\pi^2}\iint T(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(xx_F+yy_F)/r_W}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \times \iint T^*(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(xx_F+yy_F)/r_W}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9-36}$$

为了在四个积分号下计算所有位置，变量 x 和 y 在第二次积分中被替换为 x' 和 y'

$$S(x_F, y_F) = \frac{1}{\pi^2}\iint\iint T(x,y) \times T^*(x,y)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k[x_F(x-x')+y_F(y-y')]/r_W}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \tag{9-37}$$

一旦 PSF 由这个等式或者其他任何等式计算，光学传递函数 $F(\omega_x, \omega_y)$ 可以从如下所示的点扩散函数 $S(x_F, y_F)$ 的傅里叶变换得到

$$F(\omega_x, \omega_y) = \iint_\sigma S(x_F, y_F)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_x x_F+\omega_y y_F)}\mathrm{d}x_F\mathrm{d}y_F \tag{9-38}$$

总而言之，OTF 是很复杂的，它包括实部与虚部。OTF 的模被称为调制传递函数（MTF），它代表图像中一个正弦周期结构的对比度。虚部被称为相位传递函数，并给出了有关空间相移或对比度反转（当相移为 180°时）的信息。若 OTF 是一个实函数的傅里叶变换，它是厄密的。这就意味着实部是对称的而虚部是反对称的。换句话说

$$F(\omega_x, \omega_y) = F^*(-\omega_x, \omega_y); F(\omega_x, \omega_y) = F^*(\omega_x, -\omega_y) \tag{9-39}$$

因为光学系统关于子午面是对称的，所以 PSF 满足条件

$$S(x_F, y_F) = S(-x_F, y_F) \tag{9-40}$$

因此，我们可能会证明 $F(\omega_x, 0)$ 是实数。PSF 如果有额外的属性，那便是

$$S(x_F, y_F) = S(x_F, -y_F) \tag{9-41}$$

对于任何具有旋转对称的像差中，如离焦、球差或像散，光学传递函数 $F(\omega_x, \omega_y)$ 都是实数。

如果光瞳函数 $T(x, y)$ 已知，存在一种替代方法来计算光学传递函数。为了说明这种方法，首先让我们假设光学传递函数 $F(\omega_x, \omega_y)$ 是已知的；然后，点扩散函数是光学传递函数的傅里叶逆变换，可表示为

$$S(x_F, y_F) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_\sigma F(\omega_x, \omega_y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega_x x_F+\omega_y y_F)}\mathrm{d}\omega_x\mathrm{d}\omega_y \tag{9-42}$$

现在，除了一个常数，式（9-37）和式（9-42）是相同的，如果我们设定

$$\omega_x = \frac{k}{r_W}(x - x') \tag{9-43}$$

$$\omega_y = \frac{k}{r_W}(y - y') \tag{9-44}$$

$$F(\omega_x, \omega_y) = \frac{4r_W^2}{k^2}\iint_\sigma T(x,y)T^*\left(x - \frac{r_W}{k}\omega_x, y - \frac{r_W}{k}\omega_y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9-45}$$

我们现在可以用这个等式与光瞳函数作卷积来计算光学传递函数。如果入瞳处光的振幅为一个常数，设 $E(x, y) = 1$，则

$$F(\omega_x, \omega_y) = \frac{4r_W^2}{k^2}\iint_\sigma \mathrm{e}^{\mathrm{i}k[W(x,y) - W(x-\frac{r_W}{k}w_x, y-\frac{r_W}{k}w_y)]}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{9-46}$$

图 9-13 展示了这节中的主要函数之间的相互关系。式（9-45）和式（9-46）前的常数被忽略了，并且被另一个常数取代了，它使得光学传递函数在点 $\omega_x = \omega_y = 0$ 处是实

数并且等于1。这相当于设置点扩散函数中的总能量等于1。这是归一化的光学传递函数。

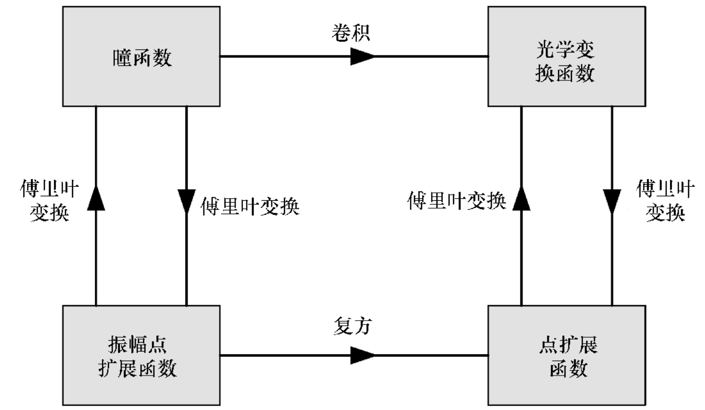


图9-13　函数之间的数学运算的变换关系

一个有趣的案例是研究不存在像差的光学系统。那么在出瞳清晰的部分内，$W(x, y)=0$，且光学传递函数在两个出瞳相对于彼此横向移动的公共区域内，如图9-14所示。从图中可以看到这个函数的最大空间频率为

$$\omega_x = \frac{kD}{r_W} \tag{9-47}$$

但是根据式（9-32）对空间频率的定义，可见线分辨率为

$$L \geqslant \frac{\lambda r_W}{D} \tag{9-48}$$

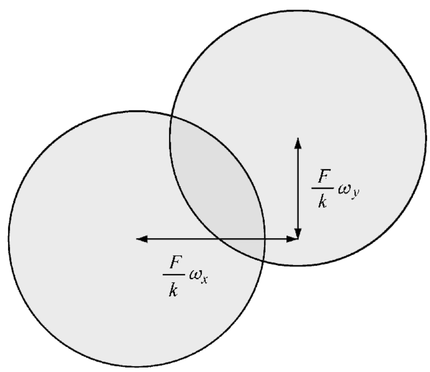


图9-14　两个相同的、相互错位光瞳的OTF的计算

式中，D是出瞳的直径。式（9-48）几乎与式（9-21）相同。

图9-15展示了一个离焦的理想镜头的归一化调制传递函数。O'Neill（1956）研究了环形孔径的光学传递函数。

离轴的调制传递函数并不具有旋转对称的形式，所以归一化的调制传递函数不得不通过一个曲面来表示，如图9-16所示。

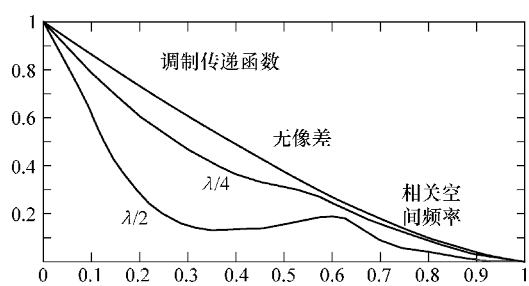


图9-15　对于完美系统和有小的球差的系统的MTF

由式（9-42）可知，斯特列尔比可表示为

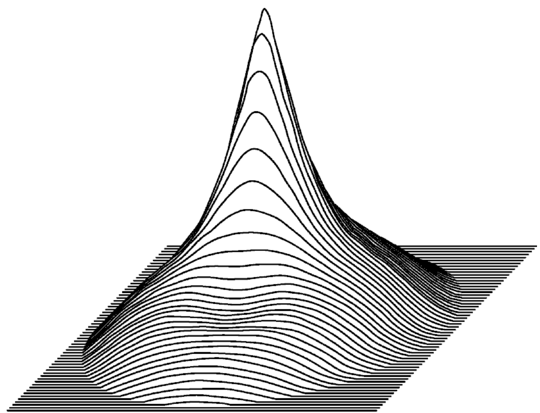


图 9-16　对于离轴图像 MTF 的等体积表示

$$\text{斯特列尔比} = S(0,0) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\sigma} F(\omega_x, \omega_y)\, \mathrm{d}\omega_x \mathrm{d}\omega_y \tag{9-49}$$

利用光学传递函数的厄密性质，它的实部是对称的，虚部是反对称的。可以证明

$$\text{斯特列尔比} = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\sigma} R[F(\omega_x, \omega_y)]\, \mathrm{d}\omega_x \mathrm{d}\omega_y \tag{9-50}$$

式中，符号 R 表示的是取该函数的实部。

由式（9-31）可见斯特列尔比与波前方差之间有直接的联系。因此，我们可以得出这样的结论，波前方差决定了曲面下的积分区域，它代表的是光学传递函数的实部。另一方面，由于高频的调制传递函数会随积分区域增加而增加，系统对该频率的响应仅由波前方差决定。

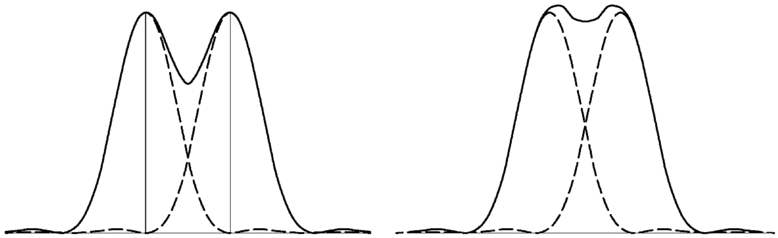
9.7　分辨率标准

有很多分辨率的标准可用于指定的光学系统的质量或指定的结构公差。下一步我们将来描述一些标准。在定义光学系统的分辨率时，一个重要的变量是所使用的图像探测器。你不要指望用感光片测得的图像与用眼看到的图像相同。

如果存在两个靠得非常近的点物，它们的像也会靠得很近，并且它们的衍射图像可能重叠。重叠之后可能导致只有一个图像能够被观察到。所以问题的关键是如何确定这两个像的距离，使得它们仍能够被单独检测到。这里有几种不同的标准，它们适用于不同的条件。例如用望远镜看两颗恒星时，两个像是完全非相干的，那么两个像的光强将增加。另一个极端情况是，如果使用相干光（激光）照射一个物体，像面上的振幅依据相位叠加，得到一个不同的结果。也可能会存在中间情况，例如在显微镜中对物体进行照明的是部分相干光。另外一个应该考虑的变量是两幅图像强度的比值。

这些分辨率的标准之一是瑞利判据（Barakat，1965；Murty，1945），它适用于具有相等照度的非相干图像。它认为两个图像分开的距离等于艾里斑的半径时，这两个图像

刚好能够被分辨，如图9-17所示。应当指出，严格来说该标准假设在图像中的两个相邻的点彼此是不相干的，从而使得它们是强度的叠加而不是振幅的叠加。这就意味着发光光源是空间非相干的，或者如果物是不透明的，那么它必须是被空间非相干光照射。这一假说对于望远镜和照相机显然是适用的，但是不能完全适用于显微镜。



a)　　b)

图9-17　两种分辨率标准（有彩色插图）
a）瑞利　b）斯派罗

另一个天文学家们经常使用的分辨率标准称为斯派罗准则（1916）。根据天文学家Dawes的说法，当使用望远镜用肉眼观察两颗具有相同强度的恒星时，它们像的距离比瑞利判据给出的建议更小，但它们的像仍可能会被分辨。这个距离大约是艾里斑半径的0.84倍。

在理想情况下能够在像面上形成一个点像的波面是球面。即使波面是球面，形成的像也不是一个点而是在像点周围存在一些圆环的衍射图，这正是我们前面的研究内容，即艾里斑。该衍射像点的有限尺寸限制了理想光学系统的分辨率。1878年，瑞利勋爵指出，会聚的波面由一个理想的球面到波面偏离量小于1/4个波长，衍射图像会几乎保存不变。这就是瑞利极限，这和瑞利判据的定义不完全一样。这个参数被透镜的设计者广泛应用，作为设置光学公差的一种辅助手段。

人们已经发现，若衍射图中的中央光斑有高达两倍瑞利极限的波面偏差也不会大幅增加像的直径。然而，由于围绕该中心存在光晕，这可能会使图像的对比度降低。

波面变形可能小于1/4波长，但是横向像差（波前倾斜）可能会很高。这就是光晕产生的原因。1/4波长的标准是非常有用的，但是对于非常复杂的波前变形，有必要进行更好的图像分析。Maréchal和Francon（1960）已经研究了这些影响。Maréchal判据（1947）确定当斯特列尔比大于0.8时，由像差导致的图像退化并不明显（见图9-18）。该斯特列尔比值对应的rms波前畸变大约为$\lambda/14$。Maréchal判据在球差的情况下恰好就是瑞利判据。

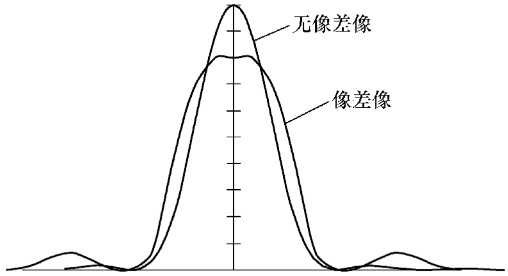


图9-18　斯特列尔分辨率准则

当横向像差远大于艾里斑时，衍射的影响可以忽略不计。在这种情况下，公差通常都基于光学传递函数 OTF。

9.8　高斯光束

高斯光束的振幅与照度的分布是旋转对称的，从光轴到边缘强度逐渐减小且具有高斯形状，如图 9-19 所示。高斯光束的振幅可以表示为

$$A(\rho)=E_0\mathrm{e}^{-\rho^2/\omega^2} \tag{9-51}$$

它的强度可以表示为

$$I(\rho)=I_0\mathrm{e}^{-2\rho^2/\omega^2} \tag{9-52}$$

式中，ρ 是空间中某点到光轴的距离，ω 为当强度等于 $1/\mathrm{e}^2$ 时的 ρ 值。这些光束由气体激光器发出，并且它们具有很重要的性质，这些性质已被 Kogelnik（1959，1979）研究过。一个球形收敛的高斯波前在焦点处会变得平坦，而强度仍满足高斯分布。如果还记得一个高斯分布的傅里叶变换仍然是高斯分布，那么就很容易理解这种现象。通过该焦点后，波面再次发散为球面波，且振幅仍然是高斯分布。如图 9-20 所示，光束是完全对称的，其对称中心位于焦点处。此焦点处最小的光束直径称为束腰。束腰的半径 ω_0 与会聚角 θ 之间的关系可以表示为

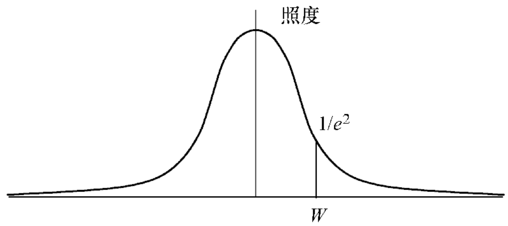


图 9-19　通过一个高斯光束的高斯照度分布

$$\theta=\frac{\lambda}{\pi\omega_0} \tag{9-53}$$

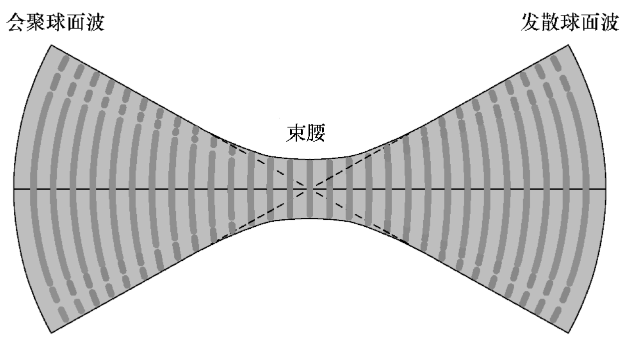


图 9-20　高斯光束的传播

当波面远离焦点时，波面的曲率中心位于束腰的中心处；而当波面靠近焦点时，它会变得平坦。在束腰处，波面是完全平坦的。瑞利长度的定义可表示为

$$z_R=\frac{\omega_0}{\theta} \tag{9-54}$$

当波面到束腰的距离为 z 时，它的曲率半径可以表示为

$$R = z + \frac{\pi^2 \omega_0^4}{\lambda^2 z} = z + \frac{z_R^2}{z} \tag{9-55}$$

可见波面的曲率半径与波面到束腰的距离之差由式（9-55）的最后一项给出。曲率的中心将位于束腰处，只有当

$$z >> z_R = \frac{\omega_0}{\theta} \tag{9-56}$$

当波面到束腰的距离为 z 时，光束的半径 ω 等于

$$\omega = \left(\omega_0^2 + \frac{\lambda^2 z^2}{\pi^2 \omega_0^2}\right)^{1/2} = \omega_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)^{1/2} \tag{9-57}$$

具有大会聚角的高斯光束会被会聚为一个小点，而具有小会聚角的高斯光束会被会聚为一个较大的点。最小光斑位于束腰处，而不是镜头的焦距处。镜头的焦距位于波面曲率的中心位置，它们之间的距离为 R。

由于衍射效应，一个有限扩张的平面波沿着其传播路径不可能一直保持它的平整度。一个拥有恒定振幅的球形波面将会发生衍射，产生一个发散的波前与复杂的形状。平坦的高斯光束也会受到衍射的影响，从而产生发散的光束。在这种情况下，波面总是一个球面，在传播中它的曲率中心更靠近初始的平坦波面的中心。

距离束腰很远处的发散角也将接近式（9-53）所给出的值。因此，发散角越大，波面的半径越小。如果高斯光束被一个透镜准直，将会产生另一个高斯光束，该高斯光束的束腰将位于透镜的出瞳处。入射波面的曲率中心必须在透镜的焦点处，而不是在束腰处，如图9-21所示。为了减小发散角，可通过一个倒置的望远镜来增加束腰的直径。

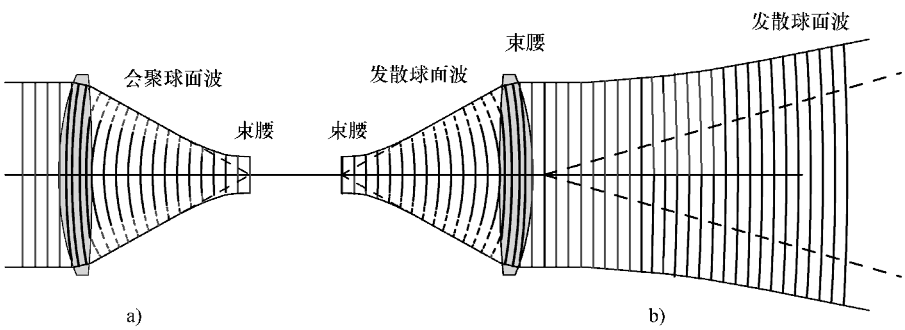


图9-21　高斯光束

a）聚焦　b）准直

参考文献

[1] Baker, L., ed., *Selected Papers on Optical Transfer Function: Foundation and Theory*, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, WA (1992).

[2] Barakat, R., "Total Illumination in a Diffraction Image Containing Spherical Aberration," *J. Opt.*

Soc. Am., **51**, 152 – 157 (1961).

[3] Barakat, R., "Application of Apodization to Increase Two – Point Resolution by the Sparrow Criterion: I. Coherent Illumination," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 276 – 283 (1962a).

[4] Barakat, R., "Computation of the Transfer Function of an Optical System from the Design Data for Rotationally Symmetric Aberrations: I. Theory," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 985 – 991 (1962b).

[5] Barakat, R., "Numerical Results Concerning the Transfer Functions and Total Illuminance for Optimum Balanced Fifth – Order Spherical Aberration," *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 38 – 114 (1964).

[6] Barakat, R., "Rayleigh Wavefront Criterion," *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 641 – 649 (1965).

[7] Barakat, R. and Houston, A., "Reciprocity Relations Between the Transfer Function and Total Illuminance 1," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 1244 – 1249 (1963a).

[8] Barakat, R. and Houston, A., "Modulation of Square Wave Objects in Incoherent Light," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 1371 – 1376 (1963b).

[9] Barakat, R. and Houston, A., "Diffraction Effects of Coma," *J. Opt. Soc. Am.*, **54**, 1084 – 1088 (1964).

[10] Barakat, R. and Houston, A., "Transfer Function of an Annular Aperture in the Presence of Spherical Aberration," *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 538 – 541 (1965).

[11] Barakat, R. and Levin, E., "Application of Apodization to Increase Two – Point Resolution by the Sparrow Criterion: Ⅱ. Incoherent Illumination," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 274 – 282 (1963a).

[12] Barakat, R. and Levin, E., "Transfer Functions and Total Illuminance of High Numerical Aperture Systems Obeying the Sine Condition," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 324 – 332 (1963b).

[13] Barnes, K. R., *The Optical Transfer Function*, American Elsevier, New York (1971).

[14] Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics*, Pergamon Press, New York (1964).

[15] Cagnet, M., Françon, M., and Thrierr, J., *Atlas of Optical Phenomena*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (1962).

[16] Hopkins, H. H., "The Numerical Evaluation of the Frequency Response of Optical Systems," *Proc. Phys. Soc.* (*London*), **B70**, 1002 – 1005 (1957).

[17] Kogelnik, H. W., "On the Propagation of Gaussian Beams of Light Through Lenslike Media Including Those with a Loss or Gain Variation," *Appl. Opt.*, **4**, 1562 – 1569 (1959).

[18] Kogelnik, H. W., "Propagation of Laser Beams," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. VII, Chap. 6, R. R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Academic Press, San Diego, CA (1979).

[19] Linfoot, E. H., "Information Theory and Optical Images," *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 808 – 819 (1955).

[20] Linfoot, E. H., "Transmission Factors and Optical Design," *J. Opt. Soc. Am.*, **46**, 740 – 752 (1956).

[21] Linfoot, E. H., *Fourier Methods in Optical Design*, Focal, New York (1964).

[22] Malacara, D., "Diffraction and Scattering," in *Methods of Experimental Physics*, *Physical Optics and Light Measurements*, Vol. 26, Chap. Ⅳ, D. Malacara, ed., Academic Press, San Diego,

CA (1988).

[23] Maréchal, A., "Etude des Effets Combine de la Diffraction et des Aberration Geometriques sur l'Image d'un Point Lumineux," *Rev. Opt.*, **9**, 257–297 (1947).

[24] Maréchal, A. and Françon, M., *Diffraction. Structure Des Images*, Editions de la Revue D'Optique Theorique et Instrumentale, Paris (1960).

[25] Murty, M. V. R. K., "On the Theoretical Limit of Resolution," *J. Opt. Soc. Am.* **47**, 667–668 (1945).

[26] O'Neill, E. L., "Transfer Function for an Annular Aperture," *J. Opt. Soc. Am.*, **46**, 258–288 (1956).

[27] Smith, W. F., "Optical Image Evaluation and the Transfer Function," *Appl. Opt.*, **2**, 335–350 (1963).

[28] Sparrow, C. M. "On Spectroscopy Resolving Power," *Astrophys. J.*, **44**, 76–86 (1916).

[29] Stoltzmann, D. E., "The Perfect Point Spread Function," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. Ⅸ, R. R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Academic Press, San Diego, CA (1980).

[30] Taylor, C. A. and Thompson, B. J., "Attempt to Investigate Experimentally the Intensity Distribution near the Focus in the Error–Free Diffraction Pattern of Circular and Annular Apertures," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 844–850 (1958).

[31] Welford, W. T., "Use of Annular Apertures to Increase Focal Depth," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 749–753 (1960).

[32] Wolf, E., "On a New Aberration Function of Optical Instruments," *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, 547–552 (1952).

第 10 章　棱　　镜

10.1　展开图

棱镜系统和反射镜系统是光学系统中的重要部分，Hopkins（1962，1965）等诸多学者都曾对此进行过研究。棱镜的存在会对光学系统造成很大的影响，因此我们在设计光学系统时必须予以考虑。光学系统中棱镜的影响主要有以下几个方面：

1）改变光线传播方向。

2）变换图像的方向。

3）使图像产生轴向位移。

4）限制光束的横向尺寸。

5）引入像差，主要是球差和轴向色差。

容易证明，由厚度 L 玻璃平板引起的图像轴向位移 d 可表示为

$$d=\frac{(n-1)}{n}L \tag{10-1}$$

棱镜引入的初级球差在 5.2.3 节中有介绍。

在设计光学系统时，采用展开棱镜的每一个反射面、找出等效平行平板的方法，所有这些影响都容易考虑到。进而，我们提出棱镜展开图的概念，如图 10-1 所示。

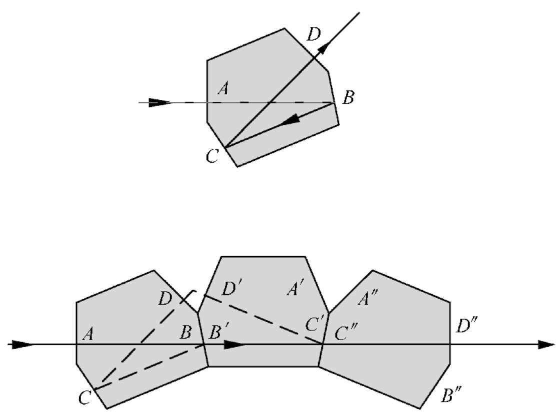


图 10-1　棱镜展开图

10.2　偏转光束

我们现在考虑一个双平面镜系统的成像情况，其中两反射面之间的夹角为 θ，如图 10-2 所示。下面我们将证明，当入射光与两个反射面的法线在同一平面内时，任意改变入射方向，光束的传输方向都将转过 2θ。

在三角形 ABC 中，有

$$\phi=2\alpha+2\beta \tag{10-2}$$

在三角形 ABD 中，有

$$\theta = \alpha + \beta \tag{10-3}$$

由此可得

$$\phi = 2\theta \tag{10-4}$$

综上所述，如果两反射面之间夹角为 θ，出射光束将转过 ϕ 角，ϕ 的大小与入射光的方向无关。有几种棱镜就是利用的这种性质。

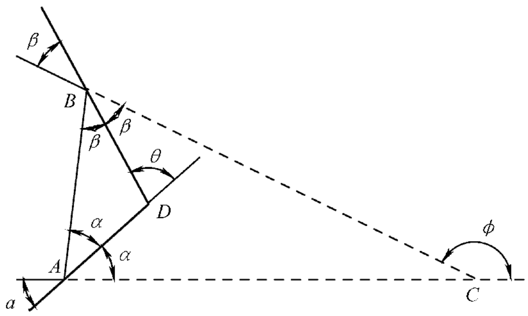


图 10-2　双平面镜反射系统

比如三面直角棱镜，从底面以任意方向入射于棱镜的光束，经过三个反射面以后，出射光束相对于入射光束旋转了 180°，即沿着与入射光束平行的方向反射回去。我们用反射定律的矢量形式来证明，可以从矢量反射定律公式（1-16）和式（1-17）得到，设 $n' = -n$，有

$$\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S} + (2\cos I)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{S} + 2(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{p})\boldsymbol{p} \tag{10-5}$$

式中，$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{S}'$分别是沿入射光和反射光的矢量。如果我们有三个反射面，其三条法线不共面，则在第一个反射面内，有

$$\boldsymbol{S}'_1 = \boldsymbol{S}_1 + 2(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1 \tag{10-6}$$

在第二个反射面内，有

$$\boldsymbol{S}'_2 = \boldsymbol{S}_2 + 2(\boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2 \tag{10-7}$$

在第三个反射面内，有

$$\boldsymbol{S}'_3 = \boldsymbol{S}_3 + 2(\boldsymbol{S}_3 \cdot \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3 \tag{10-8}$$

我们假设光线在第一个面第一次反射，在第三个面最后反射，则有

$$\boldsymbol{S}_2 = \boldsymbol{S}'_1 \tag{10-9}$$

$$\boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{S}'_2 \tag{10-10}$$

因此，最终的反射光束方向由式（10-11）给出。

$$\boldsymbol{S}'_3 = \boldsymbol{S}_1 + 2(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{p}_1)\boldsymbol{p}_1 + 2(\boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2 + 2(\boldsymbol{S}_3 \cdot \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3 \tag{10-11}$$

因为三个反射面相互垂直，我们有 $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_3$。通过这些关系式，我们得到

$$\boldsymbol{S}'_3 = \boldsymbol{S}_1 + 2(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{p})\boldsymbol{p}_1 + 2(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2)\boldsymbol{p}_2 + (\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{p}_3)\boldsymbol{p}_3 \tag{10-12}$$

因为矢量 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$ 和 $\boldsymbol{p}_3$ 形成一个正交基，我们有

$$\boldsymbol{S}'_3 = \boldsymbol{S}_1 - 2\boldsymbol{S}_1 = -\boldsymbol{S}_1 \tag{10-13}$$

这就证明了拥有三个相互垂直的反射面的系统构成了反射系统。这些结果有很多应用，下文中将会提到。

10.3　图像变换

本节中，我们将介绍由各向同性材料制作的平面棱镜，例如玻璃。我们将考虑在没

有任何色散的情况下棱镜对光线传播方向的改变。因此，如果内部入射角大于临界角光线产生全反射，或者将表面镀反射膜层。在改变光线方向的同时，这些棱镜也会引起像的方向变化，如图 10-3 所示，我们将一些基本的图像变换定义如下：

1）对水平轴的几何反射一次，上下镜像一次。

2）对垂直轴的几何反射一次，左右镜像一次。

3）沿着倾斜 θ 角的轴反射。

4）旋转 θ 角。

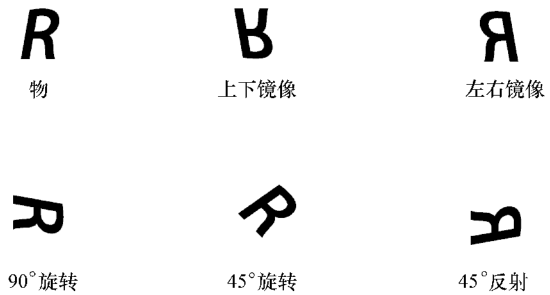


图 10-3　图像变换

任何镜面反射（包括球面镜反射）都会产生一个反射变换。这个变换的轴同时垂直于入射光和反射光。很显然，上下镜像和左右镜像变换是普通反射变换中的特例。两次连续的反射等效于一次旋转，即

$$反射\ \alpha_1 + 反射\ \alpha_2 = 旋转\ 2（\alpha_2 - \alpha_1）$$

如果图像的原始方向被旋转还原，那么我们称这个图像是可读的。因此，旋转并不改变图像的易读性。很容易证明以下重要结论：偶数次反射产生可读图像。另一方面，奇数次反射总是产生不可读图像。因此，只有偶数次反射可以产生旋转。

两次变换可以合成为一个新的变换，下面的例子可以看作之前所描述的一般情况的特例：

上下镜像 + 左右镜像 = 180°旋转

上下镜像 + 180°旋转 = 左右镜像

左右镜像 + 90°旋转 = 45°反射

我们同样可以得到，如果反射变换的坐标轴旋转，则变换的图像也以相同的方向、两倍的角速度旋转。因此，进一步可以得到以下结论，所有上下镜像系统可以通过旋转 90°变为左右镜像系统。

任意方位的平面镜系统有两种不同的效果：①改变光束方向；②改变图像方位。这两种效果都可以通过矩阵来研究。光轴偏转的问题以及图像方位的问题许多学者都曾做过研究，例如 Pegis 和 Rao（1963）、Walles 和、Hopkins（1964）、Walther（1964）、Berkowitz（1965）。通过物空间的正交坐标系（x_0，y_0，z_0）来描述一个平面镜系统，其中 z_0 沿着光轴并作为光线传播方向。对于一个单面镜，其线性变换的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2L^2) & (-2LM) & (-2LN) \\ (-2LM) & (1-2M^2) & (-2MN) \\ (-2LN) & (-2MN) & (1-2N^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_0 \\ m_0 \\ n_0 \end{pmatrix} \tag{10-14}$$

式中，l、m、n 和 l_0、m_0、n_0 分别是入射光和反射光的方向余弦，L、M、N 是镜面法线的方向余弦。

为了找到光束的最终方向，每一镜面的反射矩阵按入射镜面的相反顺序作积。或者

说，为了找到图像的方位，每一镜面的反射矩阵按入射镜面的相同顺序作积。

10.4 棱镜的偏转和变换

有一些棱镜，除了变换图像位置外还使光轴发生偏转，从而改变光线传输方向。下面我们对其中几种典型棱镜进行介绍。

10.4.1 偏转棱镜

鉴于篇幅有限，我们只对以下几种典型棱镜进行介绍：

1）直角棱镜。

2）阿米西棱镜。

3）五角棱镜。

4）沃拉斯顿棱镜。

直角棱镜是所有棱镜中最简单的一种，许多情形下可以用平面镜代替它。因为只有一次反射，所以直角棱镜产生的图像是不可读的，如图10-4a所示。这种棱镜可以改进产生可读图像。用两个相互垂直的反射面代替直角棱镜的斜反射面，形成一个屋脊面，这样就得到一个如图10-4b所示的阿米西棱镜。

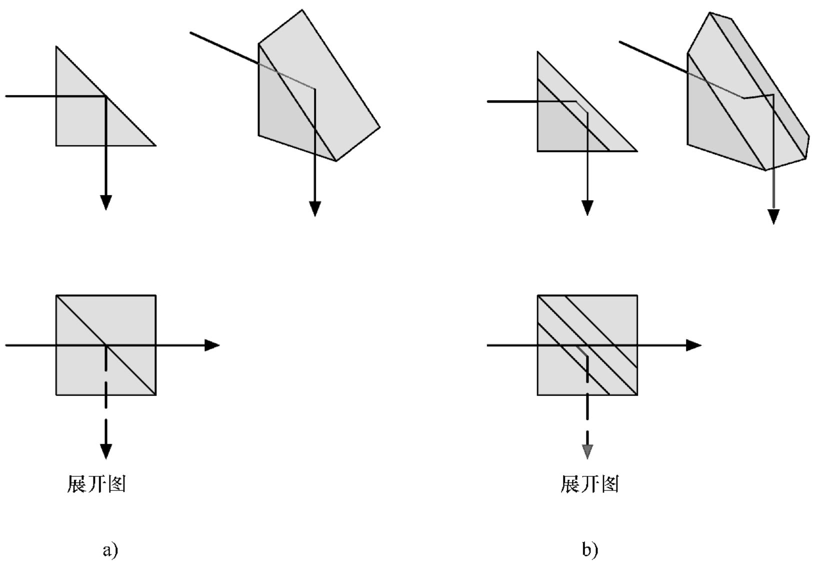


图10-4 两种棱镜

a）直角棱镜 b）阿米西棱镜

直角棱镜和阿米西棱镜都可以经过改进，使得光束在棱镜中偏转45°而不是90°，如图10-5所示。

之前描述的棱镜，偏转角度依赖于入射角度。可以设计一种棱镜，它产生的偏转角度与入射角无关。由10.2节所描述的性质，即偏转角度是两个镜面或反射面之间夹角

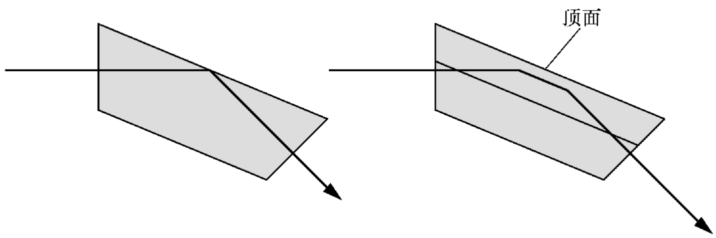


图 10-5　变向道威棱镜

的两倍，可用两个反射面代替一个反射面来实现。

沃拉斯顿棱镜正是运用了这一性质，如图 10-6 所示，这一性质也同样应用于五角棱镜，如图 10-7 所示。在沃拉斯顿棱镜中，两个反射面成 45°，偏转角为 90°。在五角棱镜中，两个面成 135°，偏转角为 270°。

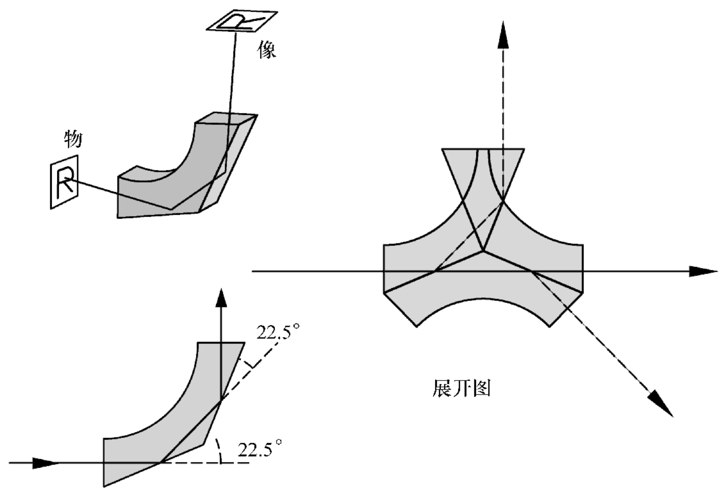


图 10-6　沃拉斯顿棱镜

因为有两个反射面，之前所描述的两种棱镜，图像可读。五角棱镜由于结构紧凑、简单，易于制作，因此更为常用。

尽管这两种棱镜都可以经改进得到 45°偏转，但是外形却是复杂和实用的。为了得到与入射角无关的 45°偏转，图 10-8 所示的棱镜比较完美。这些棱镜应用于显微镜中，以获得更舒适的观察位置。

另外一种 45°偏转棱镜，类似于五角棱镜，如图 10-1 所示。

10.4.2　反射系统

反光棱镜是恒偏向棱镜的一种特殊情况，偏转角为 180°。

直角棱镜可以用作反光棱镜，其形状如图 10-9 所示。这种情形下的棱镜称为普罗棱镜。假设入射光与法线共面，普罗棱镜是一种完美的反光镜。

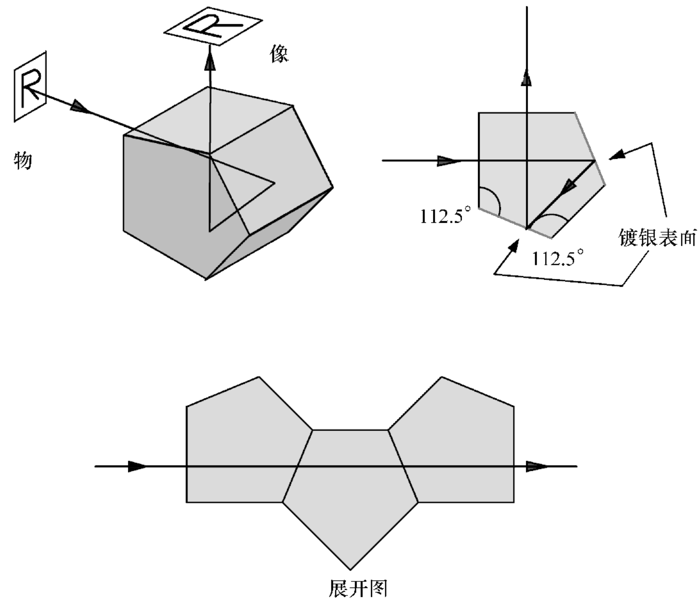


图 10-7　五角棱镜

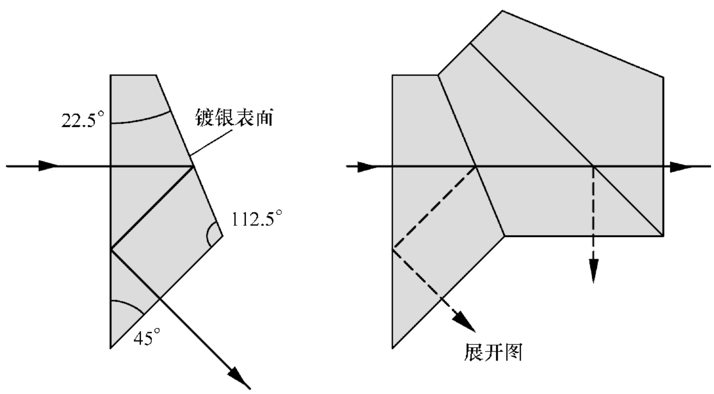


图 10-8　45°偏转棱镜

没有之前所说约束的完美反射棱镜是由三个相互垂直的反射面构成的，这种棱镜被称为角锥棱镜，如图 10-10 所示。

在一个需要反射 180°的光学试验中，角锥棱镜非常有用。角锥棱镜克服了一般棱镜容易摆动、抖动且由于离光源较远很难对准等缺点而被广泛应用。其应用范围广泛，从一般的如汽车的红色尾灯中的反射镜，到高度专业的，如 1969 年放在月球表面的反射镜等。

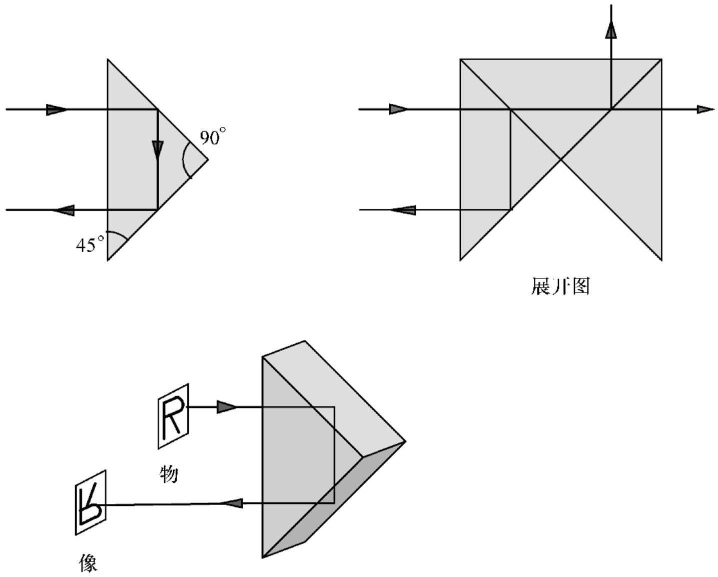


图 10-9　矩形反光棱镜

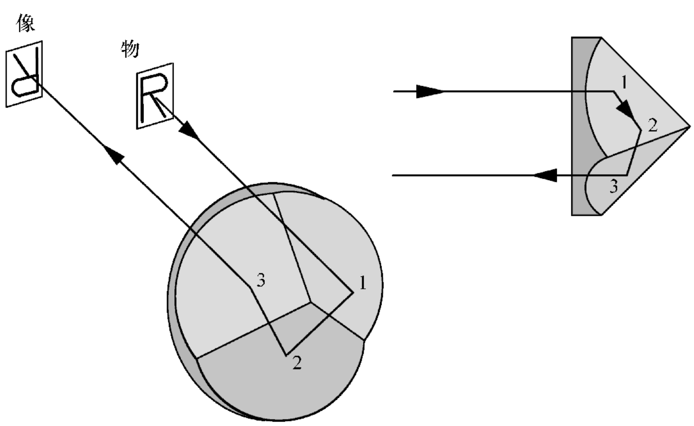


图 10-10　角锥棱镜

10.5　保向变换棱镜

这些棱镜不改变光线传播方向，只改变图像位置。下面介绍一些保向变换棱镜。

10.5.1　上下镜像和左右镜像棱镜

为了使图像上下镜像或左右镜像，棱镜必须是奇数次反射。我们只考虑不改变光线方向的棱镜。这些棱镜中最简单的只有一次反射，如图 10-11 所示。

这是一个单个直角棱镜，用在一种称为道威棱镜的结构中。

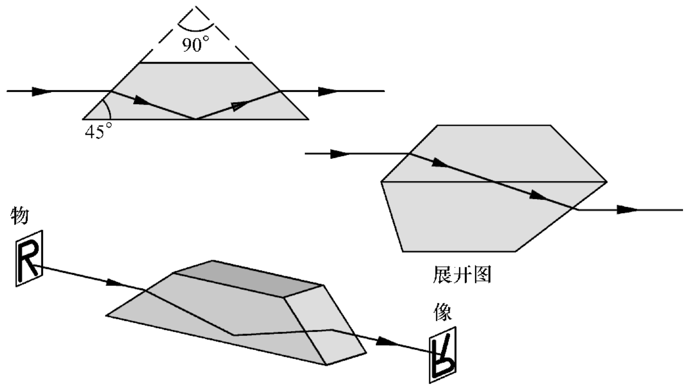


图 10-11　道威棱镜

从展开图很容易理解这种棱镜的机理。尽管有两次折射，但由于入射面和出射面形成平行平板，所以没有色差。由于球差的存在，这种棱镜不能用于高会聚或高发散的光束。

如图 10-12 所示，一种等边三角棱镜可以用作上下镜像或左右镜像棱镜。在这种结构中，有两次折射和三次反射。与道威棱镜一样，这种棱镜也不能运用于高会聚或高发散的光束中。

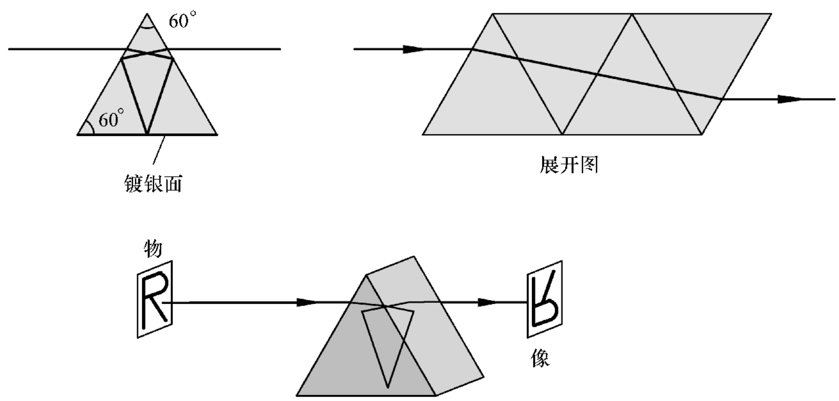


图 10-12　镜像－倒像三角棱镜

图 10-13～图 10-15 展示了三种镜像棱镜，它们都有三次内部反射。第一种不移动光轴，而另外两种光轴位置被移动。这种棱镜可以用于会聚和发散光束。前两种棱镜可以用两片或一片玻璃制作。

如图 10-16 所示，别汉棱镜可以用于会聚和发散光束，而且比之前那些棱镜结构更紧凑。

10.5.2　转像棱镜组

旋转半圈棱镜可以产生可读图像，图像旋转 180°。会聚透镜产生的实像一般相对

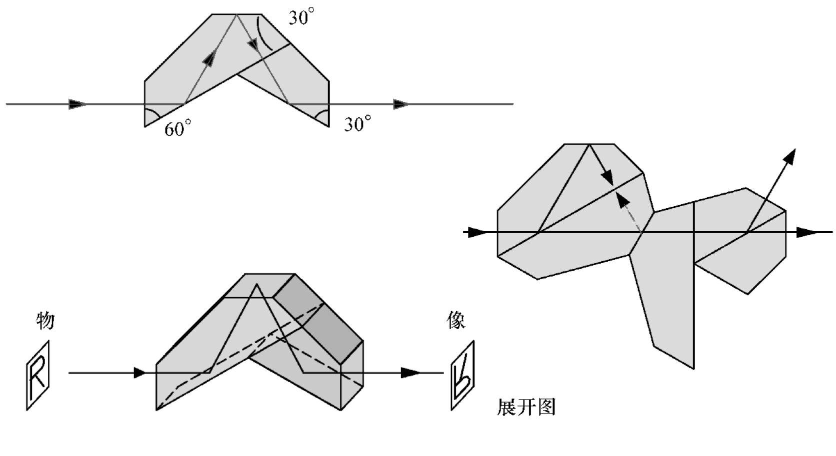


图 10-13　两片镜像 – 倒像棱镜

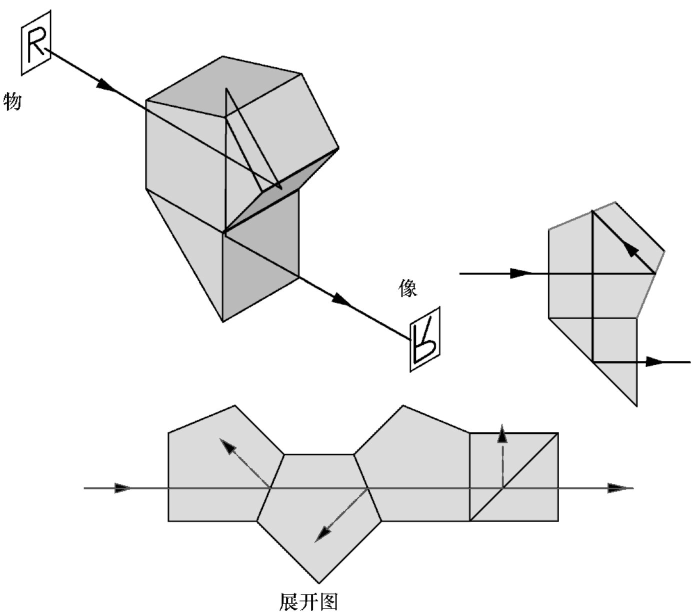


图 10-14　由五角棱镜和直角棱镜组成的镜像 – 倒像棱镜

物体旋转了 180°，因此，转像棱镜可以使图像恢复到物体的原始方向。这种棱镜广泛应用于单眼地面望远镜和双筒望远镜。

通过将其中一个反射面替换成屋脊形状的两个面，之前所描述的所有倒像棱镜都可以变换成转像棱镜组。经过这个替换，图 10-13 所示的棱镜变换为阿贝棱镜，图 10-15 所示的棱镜变换为莱曼棱镜，图 10-16 所示的棱镜变换为施密特 – 别汉棱镜，如图 10-17所示。施密特 – 别汉棱镜应用于小型手持望远镜，其优势在于光轴不会侧向移动。

普罗棱镜是一种双棱镜，通常应用于双筒望远镜，如图 10-18 所示。

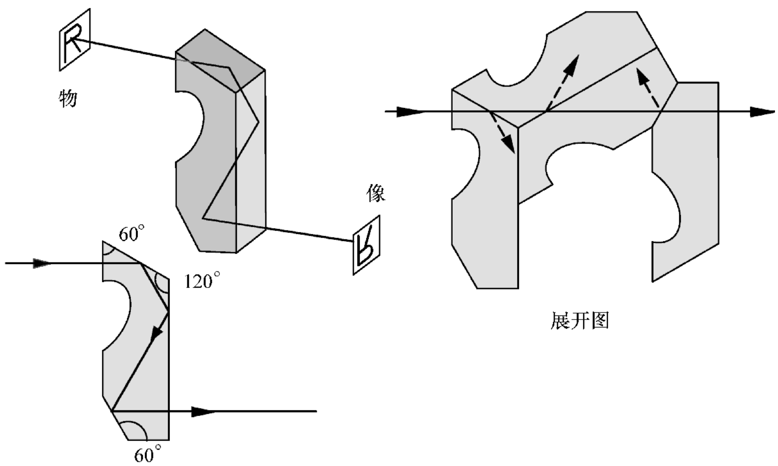


图 10-15　一片镜像-倒像棱镜

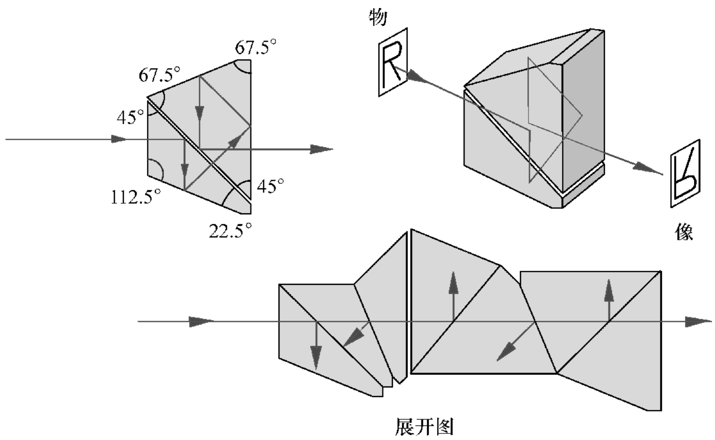


图 10-16　别汉棱镜组

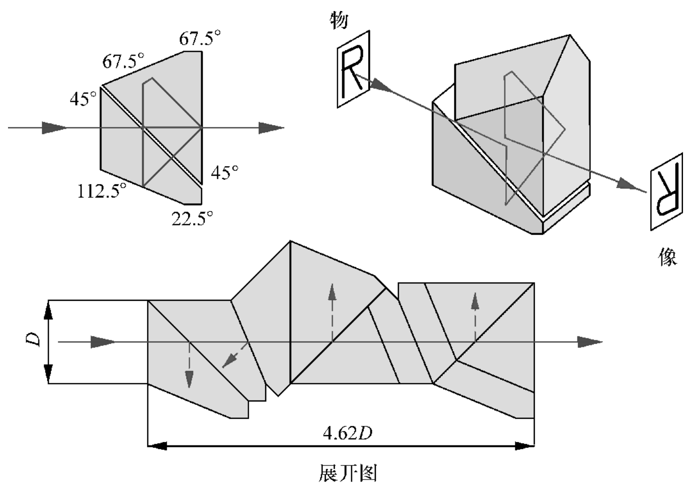


图 10-17　施密特-别汉棱镜

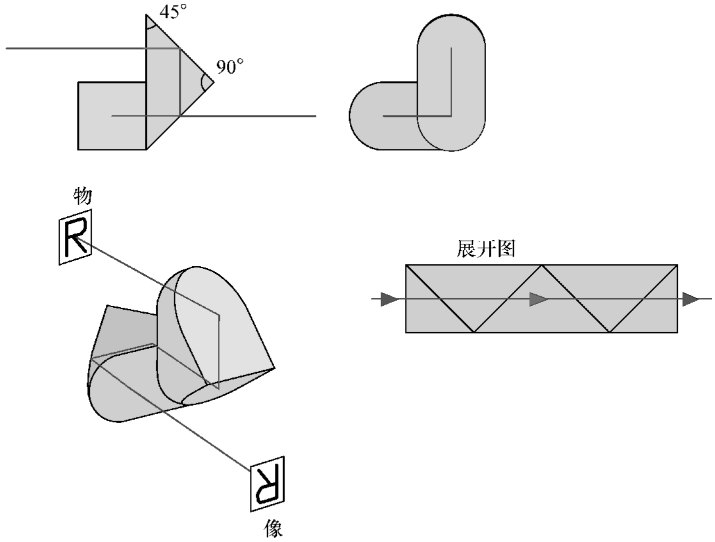


图 10-18　普罗棱镜

10.6　分束棱镜

这种棱镜将光束分成两束，与原始光束有相同的束径，但是强度降低为现在沿不同方向传输的两束光的强度。由于一个单个图像应同时被两只眼睛观察，所以分束棱镜广泛运用于分振幅干涉仪、双目显微镜和望远镜。一般来讲，这种棱镜是由两个直角棱镜粘接成的一个立方体。给其中一块棱镜的斜面镀反射膜，然后将两块棱镜粘接在一起，通过这种方式使得反射光和透射光都有相同的强度。两块棱镜粘接在一起是为了避免全反射。这种棱镜及其变形棱镜如图 10-19 所示。

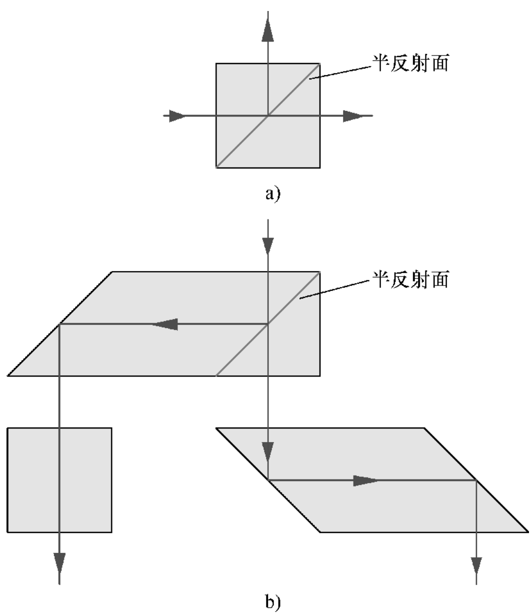


图 10-19　双筒分束棱镜系统
a）单一棱镜　b）双棱镜

10.7　色散棱镜

如图 1-3 所示，折射率是光波长即光颜色的函数。这种性质运用于色散棱镜，将光束分解成其基本色彩成分，得到一个彩虹带，称为光谱。

10.7.1 等边棱镜

最简单的色散棱镜是等边棱镜，如图10-20所示。这种棱镜通常由火石玻璃制作，因为火石玻璃的折射率随波长变化大。

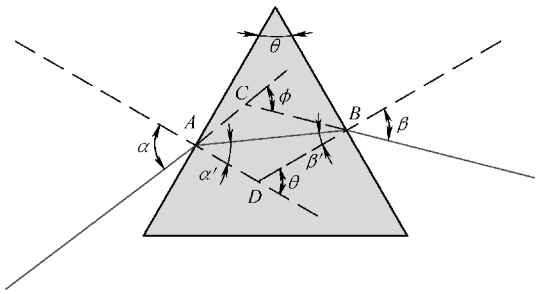


图10-20　三角色散棱镜

如图10-20所示，ϕ是光线偏转的角度，θ是棱镜角。由图10-20可知

$$\phi = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta') \tag{10-15}$$

且

$$\theta = \alpha' + \beta' \tag{10-16}$$

由此可得

$$\phi = \alpha + \beta - \theta \tag{10-17}$$

由斯涅尔定律可知

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} = n \tag{10-18}$$

$$\frac{\sin\beta}{\sin\beta'} = n \tag{10-19}$$

由此，我们得出结论，旋转角度是入射角α、顶角θ和折射率n的函数。当棱镜顶角$\theta = 60°$和折射率$n = 1.615$时，角度ϕ与角度α的函数关系如图10-21所示。

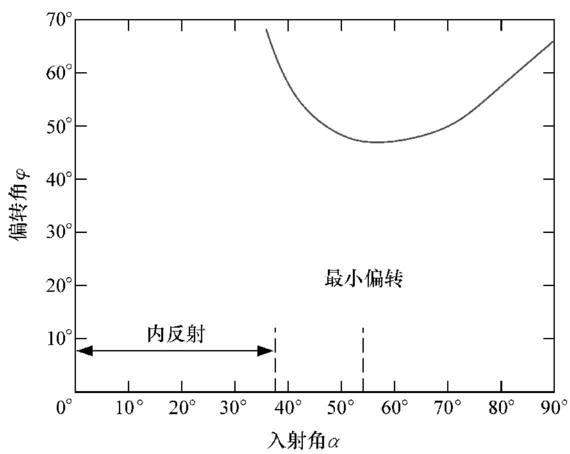


图10-21　色散棱镜中偏转角度与入射角度的关系

当 α 值等于 α_m 时，旋转角 ϕ 有最小值。这从图 10-21 中我们很容易找到。假设 ϕ 存在一个最小值，我们运用可逆性原理可知当 $\alpha=\beta=\alpha_m$ 时，ϕ 有最小值。此时，有

$$\sin\alpha_m = n\sin\theta/2 \tag{10-20}$$

假设由火石玻璃制作的顶角 $\theta=60°$ 的棱镜，对于黄光有 $\alpha=\alpha_m$，则 ϕ 角随波长的改变如图 10-22 所示。

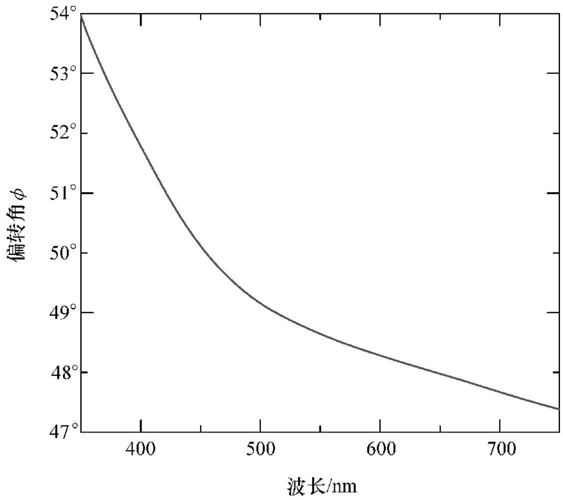


图 10-22 色散棱镜中偏转角度与波长的关系（有彩色插图）

现在我们假设 θ 很小。可以看出 ϕ 与 α 无关，其表达式为

$$\phi=(n-1)\theta \tag{10-21}$$

10.7.2 恒偏向棱镜

以图 10-23 所示的棱镜为例。我们可以看到，每一种颜色的光束宽度不同，并具有椭圆横截面。只有当 α 等于 β 时，折射光束与入射光束的椭圆短半轴相等。

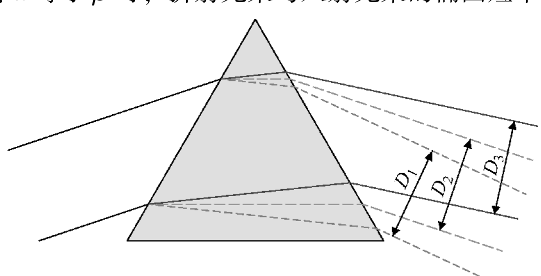


图 10-23 三角棱镜中不同波长光束的尺寸变化（有彩色插图）

对于精确光谱测量，每个波长的折射光束宽度和入射光束宽度都必须相等，然而只有当棱镜旋转到 $\alpha=\beta$（最小旋转）时这种情况才会出现。通常情况，由于棱镜和观察者都要旋转，这种测量是不方便的。

有一种散射棱镜实现了前面的条件，即每次测量只需棱镜单次旋转，不需要观察者

移动，这种棱镜称为恒向偏向棱镜，如图10-24所示。这种棱镜是由一块简单的玻璃制成的，但是我们可以把它想象成由三个直角棱镜叠加而成，如图中那样粘接在一起。偏转角度 ϕ 是一个常数，等于90°。旋转棱镜可以测量每一个波长。反射角必须是45°，因此，角 α 必须等于角 β。

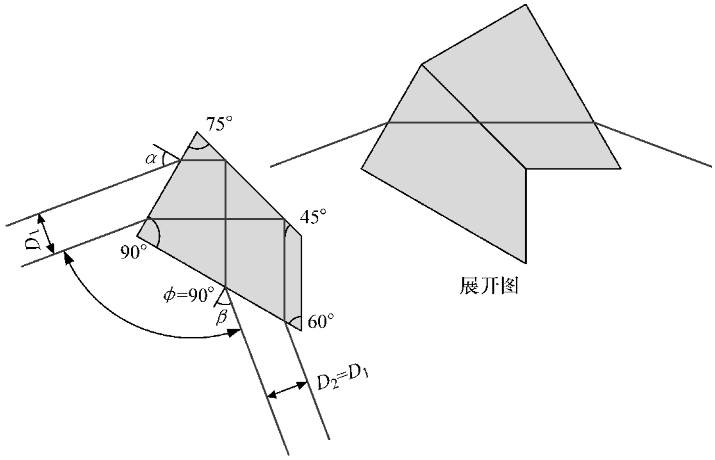


图10-24　恒偏向棱镜

10.7.3　不偏转的色散棱镜

有时候，按颜色分开光束而不偏转光束的主要方向是很方便的。可以通过图10-25所示的有三个棱镜的系统实现。中间的棱镜有小的阿贝数（火石玻璃），另外两个棱镜有大的阿贝数（冕牌玻璃）。光束总的偏转角度由式（10-22）给出。

$$\phi = \theta_1 - \arcsin\left\{n_1 \sin\left[\theta_1 + \theta_2 - \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\sin\theta_2\right)\right]\right\} \tag{10-22}$$

式中的角度在图10-25中有标注。

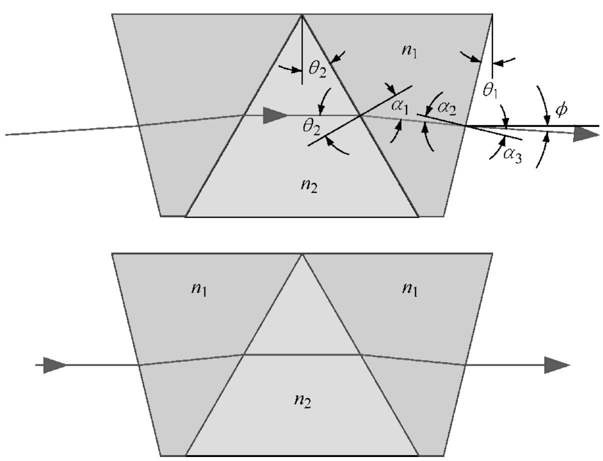


图10-25　不偏转的色散棱镜

10.8　非成像棱镜

不是所有的光学系统都是被设计用来成像或者转换图像的。一些系统的主要目的是改变能量或是尽可能有效地照射目标。通常，第二种情况是使目标上的照明光尽可能均匀。这种系统在某些课本中有介绍，如 Winston 等（2005）、Elmer（1989）和 Cassarly（2010）出版的书中就有。

这些光学元件中一个有趣的例子是圆锥棱镜，也称为锥形棱镜或导光管，如图 10-26所示。为了了解这种棱镜，我们来观察图 10-26。两个反射面之间形成一个角度。如果光线进入两个反射镜的边缘，它可能从另一边出射，也可能反射回入射孔径，这取决于入射路径。光路可以展开形成展开图，看起来像一组固定偏角阵列的反射镜，所有光线沿直线传播。棱镜的端面边缘形成类似多边形的一个图，当镜面间的角度等分360°时形成一个正多边形。Williamson（1952）证明了：只有那些指向多边形的光线（红线）会从系统的出射孔径出射，背离多边形的光线（蓝线）被反射回去。

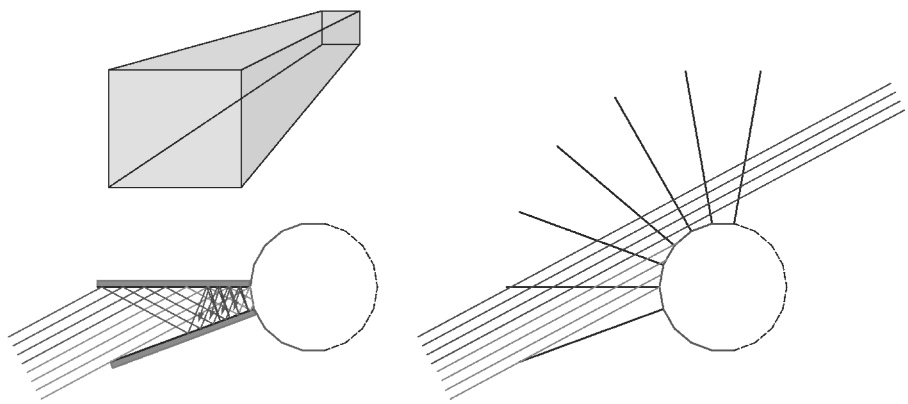


图 10-26　锥形棱镜（有彩色插图）

这种棱镜的一种可能的应用是一束光从大方形孔径处入射，照明一个位于小方形出口处的目标。光能集中于一个小区域，但是光束在入射面处的角度小于出射孔径处的角度。搜集太阳光照明光电池和在投影系统中用相对小的光源照明液晶载玻片是两种典型的应用。

参考文献

[1] Berkowitz, D. A., "Design of Plane Mirror Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 1464 – 1467 (1965).

[2] Cassarly, W., "Nonimaging Optics: Concentration and Illumination," in *Handbook of Optics*, 3rd Ed., Chap. 39, M. Bass, V. H. Mahajan, and E. V. Stryland, eds., McGraw – Hill,

New York (2010).

[3] Elmer, W. B., The Optical Design of Reflectors, 3rd Ed., Wiley, New York (1989).

[4] Hopkins, R. E., "Mirror and Prism Systems," in *Military Standardization Handbook: Optical Design*, *MIL-HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962).

[5] Hopkins, R. E., "Mirror and Prism Systems," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. Ⅲ, Chap. 7, R. Kingslake, ed., Academic Press, San Diego, CA (1965).

[6] Pegis, R. J. and Rao, M. M., "Analysis and Design of Plane Mirror Systems," *Appl. Opt.*, **2**, 1271-1274 (1963).

[7] Walles, S. and Hopkins, R. E., "The Orientation of the Image Formed by a Series of Plane Mirrors," *Appl. Opt.*, **3**, 1447-1452 (1964).

[8] Walther, A., "Comment on the Paper: 'Analysis and Design of Plane Mirror Systems' by Pegis and Rao," *Appl. Opt.*, **3**, 543 (1964).

[9] Williamson, D. E., "Cone Channel Condenser Optics," *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, 712-715 (1952).

[10] Winston, R., J. C. Miñano and P. G. Benitez. *Nonimaging Optics*, Academic Press, New York (2004).

第 11 章　基本的光学系统和简单照相镜头

11.1　光学系统分类

一个光学系统一般由透镜和反射镜组成，但如 Hilbert 和 Rodgers（1987）指出的那样，其有非常多的可能配置和需求。根据特定的应用，光学系统有许多不同的需求，例如：

1）相对孔径，或者 f 数 FN。

2）视场。

3）拉格朗日不变量。

4）轴上和轴外分辨率。

5）口径尺寸（入瞳半径）。

6）系统的物理尺寸。

7）制造难度。

8）费用等。

从严格的光学角度看，前四项是最重要的。一个单片放大镜很明显不能和一个显微物镜有相同的要求。显微物镜的相对孔径非常大，而单片放大镜的相对孔径却很小。显微物镜需要的分辨率很高，但是对单透镜来说所需的分辨率很低。

如 Hilbert 和 Rodgers（1987）描述的，图 11-1 表示一些最常见的光学系统的 f 数 FN 和视场角的关系。其他所有的特性，如轴上和近轴分辨率，在图中被忽略了，但是它某种程度上展示了光学系统的多样性。

成像光学系统的一项比较有趣而重要的特性是它能够产生的像元的总数目（像素），而这取决于 f 数和孔径直径。假设系统为理想光学系统，f 数越小，像元（衍射像）越小，如我们讨论衍射时所讲的。另一方面，给定像元尺寸，较大的视场比较小的视场包含更多的像元。Hopkins（1988）指出一副图像中的元素的最大总数接近于拉格朗日不变量 Λ 的二次方乘以 $4/\lambda^2$。像元的角半径 θ 和艾里斑的半径相等

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{2Y} \tag{11-1}$$

式中，λ 是波长，Y 是入瞳处的子午光线高。如果视场的半径是 α，那么整个视场中的像元的数目和角面积（立体角）之比相等：

$$N = \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2 = \left(\frac{2Y\alpha}{1.22\lambda}\right)^2 \tag{11-2}$$

另一方面，由于 $\alpha = h'_k/F$，$u'_k = Y/F$，其中 F 是有效焦距，容易得到

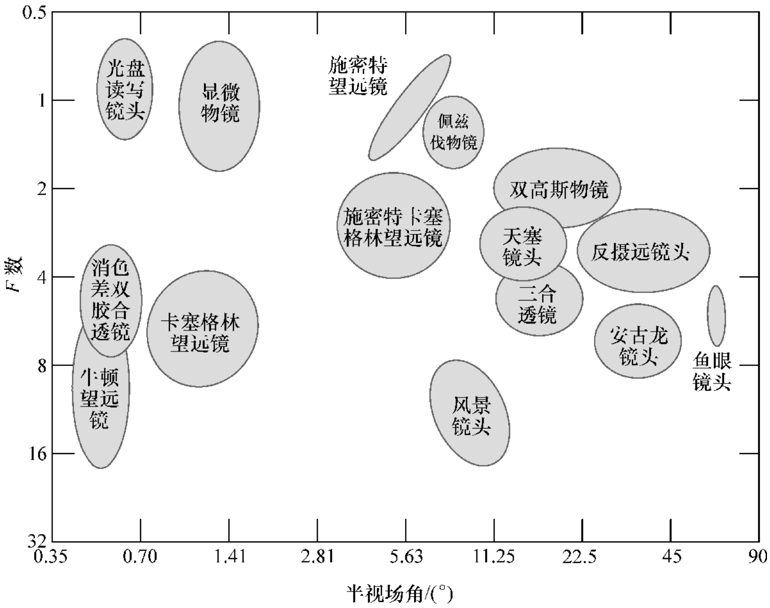


图 11-1　图示说明光学系统的多样性

$$Y\alpha = h'_k u'_k \tag{11-3}$$

因此

$$N = \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2 = \left(\frac{2h'_k u'_k}{1.22\lambda}\right)^2 = \frac{D^2 h'_k}{F^2\lambda^2} \approx \frac{4\Lambda^2}{1.49\lambda^2} \approx 10.7\times10^6\Lambda^2 \tag{11-4}$$

式中，不变量 Λ 的单位是 mm。这个公式的一个有趣的应用是高清晰度电视的物镜镜头。高清晰度屏幕具有包含 1920×1080 个方形像素的矩形矩阵。在包含这个矩形在内的圆形里就有 3.81×10^6 个像元总数。因此，拉格朗日因子的最小值为 0.6mm。

透镜和反射镜的可能组合数目几乎是无限的。不过第 12 章将从最简单的镜头开始，讲一些基本的结构。大多数光学系统都可以看作是一些基本系统的衍生。关于许多光学系统的设计和描述可以在许多专利中找到，也可以在一些书籍中找到，例如，Cox（1964），Gross（2007），Kidger（2004），Kingslake 和 Johnson（2010），Laikin（1990），Ray（2002），以及 Smith 和 Genesee Optics Software（1992）。

11.2　放大镜和单片成像镜头

单透镜是最简单的光学仪器，它有许多应用。一项重要的应用就是作为简单的显微镜或者放大镜。另一项应用是作为简单的成像镜头。现在我们将介绍这些镜头。

11.2.1　放大镜

观察者的瞳孔上测得物体的视角半径决定了人眼视网膜上图像的尺寸。为了增大图像尺寸，需要减小物体到人眼的距离。然而这个距离是有限制的。物体靠近的时候，眼

睛通过调节晶状体的形状来聚焦。观察者越年轻，这个距离就越小。对于一个年轻的成年男性，这个距离的平均值大约是 250mm。这个距离叫作最小明视距离。

如果我们想从更近的距离观察，就必须在物体和观察眼之间放置一个会聚透镜。考虑图 11-2 中的会聚透镜。一个高度为 h 的物体放置在透镜之前距离 $-l$ 处。为了得到一个虚像，这个距离比焦距要小（l'也是负的）。因此，利用式（2-13），可以确定这个距离。假设没有透镜时，观察距离是 250mm，视差角为 $\alpha = h/250$，其中 h 的单位是 mm；虚像的角尺寸是 $\beta = h'/(-l'+d)$，其中 d 是人眼到透镜的距离，从而，这个简单显微镜的视角放大率（或者叫放大率）为

$$M = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{250}{-l'+d}\left(-\frac{l'}{f}+1\right) \tag{11-5}$$

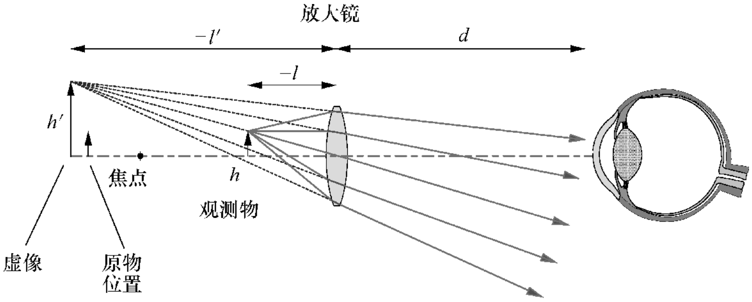


图 11-2　单片放大镜的成像

式中，所有的长度单位都是 mm。如果虚像在无穷远处（$l' = \infty$），则放大率变为

$$M = \frac{250}{f} \tag{11-6}$$

与透镜到人眼之间的距离无关。如果通过把虚像靠近最小观察距离 250mm 来提高放大率，可以得到

$$M = \left(\frac{250}{f}+1\right)\left(\frac{250}{250+d}\right) \tag{11-7}$$

由于焦距 f 和距离 d 小于 250mm，为了得到放大率的可能最大值，我们可以发现相对式（11-6）提高的放大率可以忽略。

放大镜的孔径是观察眼的眼瞳，一般情况下都非常小。因此，球差、轴向色差以及彗差都可以忽略。横向色差在单透镜中是无法避免的。这样，就只需要在该光阑（观察眼）位置状态下校正像散、场曲和畸变。作为例子，考虑具有下述数据的一个平凸透镜：

焦距	100mm
透镜直径	50mm
凸面曲率半径	51.67mm
中心厚度	10mm
像高	10mm
材料	N－BK－7

如果从两个方向对透镜进行追迹放大光阑子午像差曲线，可以得到图11-3中的曲线。从这些结果可以看出：

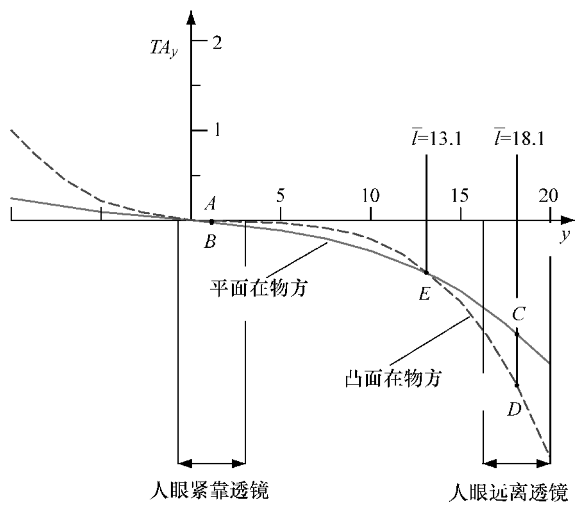


图11-3 带有扩展光阑的单片平凸放大镜的子午像差曲线

1）如预料的那样，两条曲线都通过原点，意味着人眼和透镜接触时，透镜两个方向的畸变都是零。畸变随瞳孔到透镜的距离增大而增大。

2）由于人眼不可能和透镜完全接触，最佳的方向是凸面在物方，如点A。这种情况下，由于存在一个拐点，所以彗差非常小；由于曲线斜率为零，所以子午焦面平坦；又由于点A到水平轴的距离很小，所以畸变也很小。

3）在透镜另一个方向，即平面在物方，在点B处的像差值只略高于点A处的像差值。

4）当观察眼远离透镜并且平面在物方时，如曲线中的点C处，所有像差比点A和点B处的都要大。

5）当观察眼远离透镜但是凸面在物方时，如曲线中的点D处，所有像差都比点C处的要大。总之，如果人眼不能很靠近透镜的话，那么最佳方向是平面在物方。

6）在观察眼和透镜之间的距离有一个特定值，如点E，此处对两个透镜方向有相同的畸变。唯一的区别是当平面在物方时，子午焦面较为平坦，因为曲线的斜率更小。

点$A \sim D$所表示的镜头形式在图11-4中画出。

其他一些放大镜的设计可以比单透镜产生更好的像质，图11-5中画出了其中几种。这些镜头可以用和单透镜相同的分析方法来分析。作为例子，图11-6和表11-1给出了一个黑斯廷斯（Hastings）放大镜的设计。该放大镜具有很好的像方分辨率。残余的较大的像差是场曲。

11.2.2 双目放大镜

双目放大镜可以使两只眼睛同时观察物体。这种放大镜一般距离观察者的头部比较近，并且有足够大的直径，以允许两只眼睛同时观察。观察者一侧的镜头直径至少应为

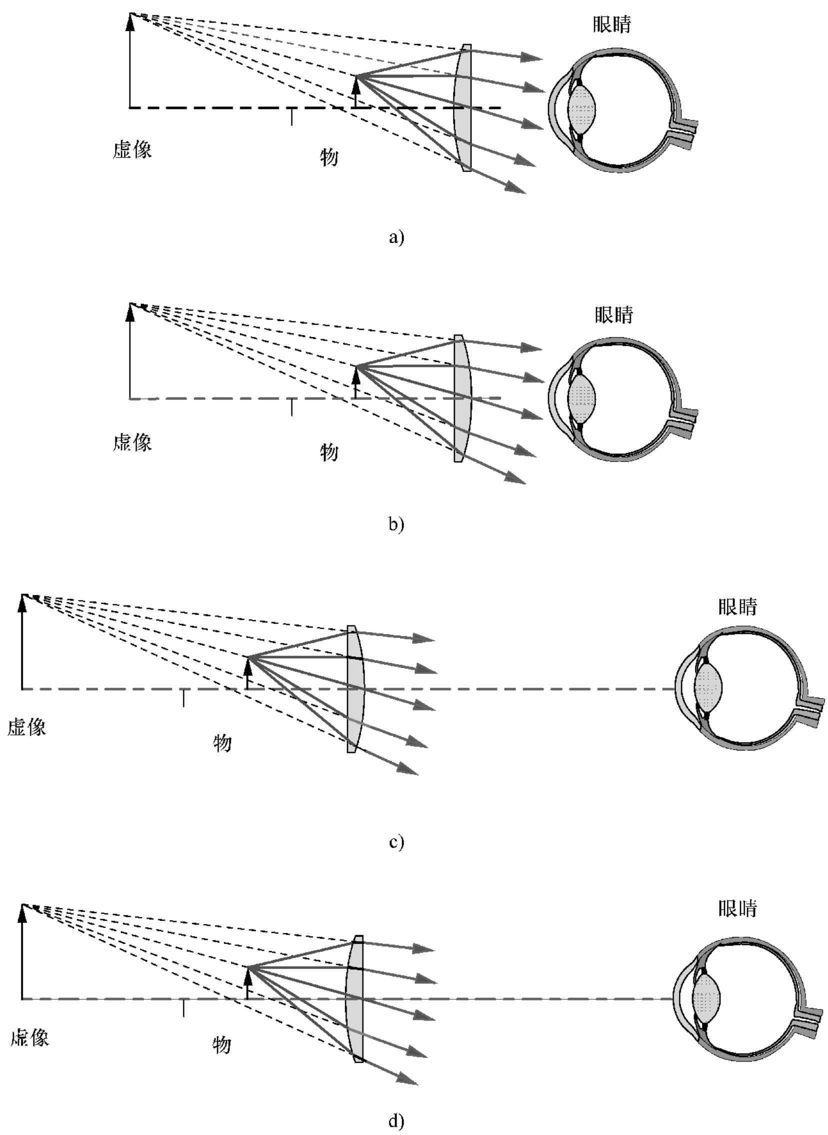


图 11-4　用单片平凸放大镜观察的四种方式

a）方式一　b）方式二　c）方式三　d）方式四

75mm。这种放大镜常用来观察小的阴极射线管或者其他电子设备所成的像。有几位作者对这个问题做了细致的研究（Coulman 和 Petrie，1949；Hopkins，1946；Rosin，1965）。Rogers（1985）在这方面写了一篇很好的总结文章。

如图 11-7 所示，两只眼睛观察到的区域是不相同的。一只眼睛看到 A 到 A' 范围内的物体，而另一只眼睛看到 B 到 B' 范围内的物体，但是两者有一个重叠区域。两只眼睛的透视是不一样的。因此如果物体不是平的，虚像可以构成立体视觉。

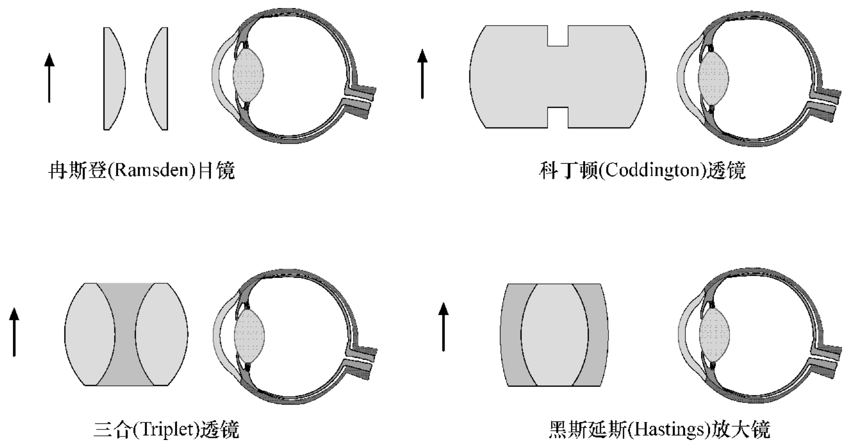


图 11-5　一些实用的放大镜

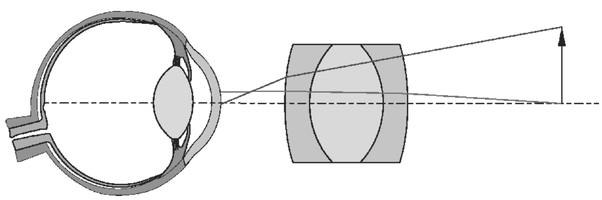


图 11-6　A7×Hastings 放大镜

表 11-1　10×Hastings 放大镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
光阑	5.0	10.00	空气
44.31	24.0	5.00	N－F2
17.65	24.0	15.00	N－SK16
－17.65	24.0	5.00	N－F2
－44.31	24.0	31.35	空气

孔径：5.0mm。
焦距：40.0mm。
后工作距离：31.35mm。
像高（半视场角）：18.65mm（25°）。

光学设计可以对系统进行倒置，这样物方的共轭距最大。然后光阑沿垂直于光轴方向移动，但更简单的方法是设置一个大到可以覆盖人眼两个瞳孔的光阑。在已出版的文献和专利中可以找到很多双目放大镜的设计。

11.2.3　单片成像镜头

单透镜可以用来在屏幕或者胶片上形成实像。给定放大率，则焦距随之确定。那么

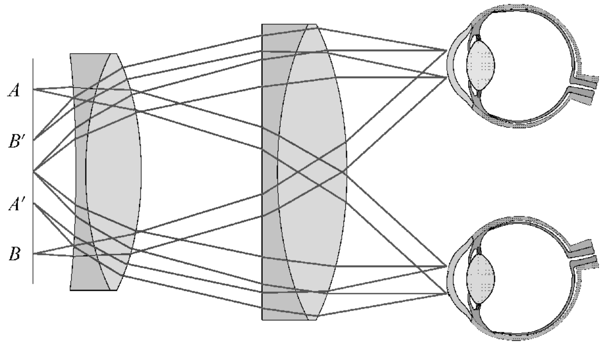


图 11-7　双目放大镜

我们就只有两个自由度，透镜弯曲和光阑位置。从三阶理论可以知道下列事实：

1）只用球面无法完全校正球差，但可以得到最小值。如果孔径很小，这项像差就不是很重要，因为它的横向值与孔径的三次方成正比。

2）对任意物距、透镜弯曲和光阑位置，彗差都可以按照第 6 章中所述计算出来。物体在无穷远处，且透镜为薄透镜时，光阑距离为以下值时彗差为零：

$$\overline{l'} = f\left(1 - \frac{SphL}{f - f_M}\right) \tag{11-8}$$

但必须记住的是上式只对带有球差的透镜有效。

3）佩兹伐场曲随透镜的屈光度线性增加，并且不依赖于透镜弯曲。因此，在薄透镜中无法避免此种像差。

然而如果人为引入一些像散，可能得到更平坦的视场。理想的情况是得到一个平坦的子午焦面。通过适当地选取光阑位置可以实现。轴向佩兹伐场曲的值由下式给出：

$$Ptz = -\frac{h'^2_k}{2nf} \tag{11-9}$$

4）当光阑和透镜接触时，像散和透镜弯曲无关，而是简单地和透镜屈光度成正比。像散为

$$AstL_s = \frac{h'^2_k}{2f} \tag{11-10}$$

如果光阑不在透镜平面上，则它的位置和透镜弯曲就成为有用的参数。由于佩兹伐场曲是负的，可以通过引入适当大小的负的像散来得到更平坦的视场。

5）当且仅当光阑和透镜重合时，畸变为零。

6）给定焦距时，轴向色差是固定的。它的轴向分量为

$$AchrL = \frac{f(N_F - N_C)}{(N-1)} = \frac{f}{V} \tag{11-11}$$

横向色差分量为

$$AchrT = \frac{y}{V} \tag{11-12}$$

7）当且仅当光阑和薄透镜位置相同时，倍率色差为零。

根据镜头的应用，我们仅使用透镜弯曲和光阑位置这两个变量得到期望的结果。为了对可能的解有直观的感受，我们观察保持焦距不变而透镜弯曲不同的几组薄透镜的子午像差曲线，如图11-8所示。透镜数据如下：

焦距	100mm
直径	20mm
前表面曲率	如图11-8所示（单位：1/mm）
像高	36.4mm（20°）
中心厚度	2mm
材料	N-BK-7

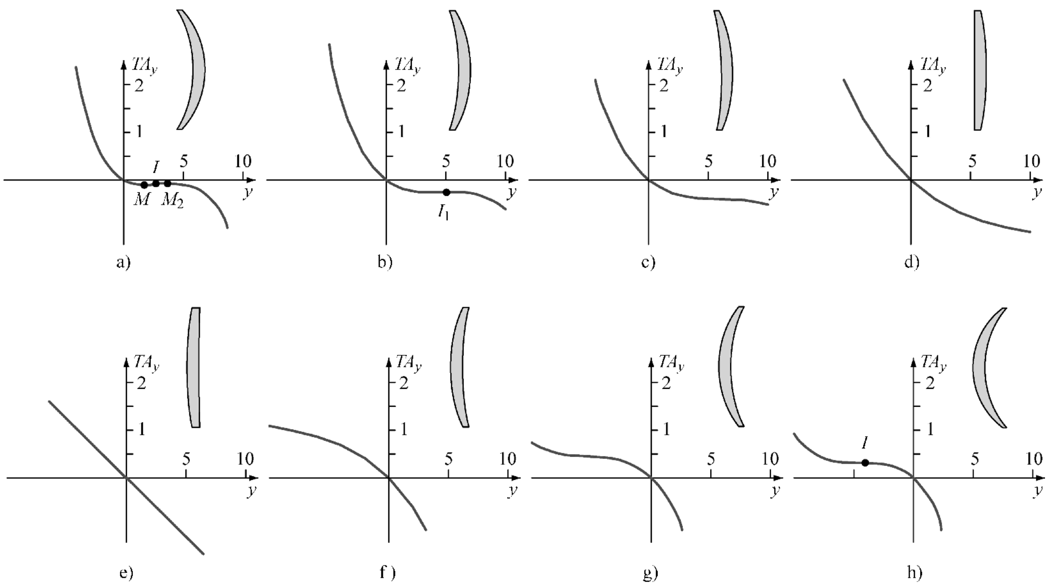


图11-8　几个不同的透镜弯曲情况下，带有放大光阑镜头的子午像差曲线

a）$c_1=-0.05\text{mm}^{-1}$　b）$c_1=-0.03\text{mm}^{-1}$　c）$c_1=-0.02\text{mm}^{-1}$

d）$c_1=0\text{mm}^{-1}$　e）$c_1=0.017\text{mm}^{-1}$　f）$c_1=0.04\text{mm}^{-1}$

g）$c_1=0.06\text{mm}^{-1}$　h）$c_1=0.08\text{mm}^{-1}$

图11-8e中的透镜弯曲对应于彗差为零（光阑在透镜处）和球差最小的解。然而，曲线的斜率比较大，表示子午场曲比较大。由于曲线是一条直线，镜头对所有的光阑位置有相同的子午场曲和彗差。所有曲线都通过原点，表示光阑在透镜表面时畸变为零。所有曲线在原点处都有相同的斜率，因为所有弯曲的切面具有相同的曲率。这是可以预料到的，因为当光阑在透镜平面时，子午曲率由佩兹伐场曲和像散给出，而这两者都与透镜弯曲无关。

11.3　风景镜头

单片照相镜头经常叫作风景镜头。这种镜头中，以产生一些畸变的代价，移动光阑位置。如图 11-8 所示，光阑直径小于透镜直径。较小的光阑可以极大地减小球差和轴向色差的影响。这种镜头广泛地应用在老式摄影相机中，典型的焦比约为 15 或更大。

观察图 11-8，可以看到，对曲线中没有曲率的点，必定没有彗差。这些点叫作拐点，如图 11-8a、b 和 h 中所示的点 I。类似地，任何斜率为零的点必定有平坦的子午焦平面。这些点可能是极小值点、极大值点或者水平拐点，如图 11-8a 中 M_1 和 M_2，以及图 11-8b 和 h 中的 I。应该注意到，图 11-8a 中，极小值 M_1 比极大值 M_2 处有更大的畸变（TA_y 更大）。从这些图中，我们可以得到下面一些有趣的事实：

1）只有某些弯曲能够产生斜率为零（平坦的子午焦面）的拐点（没有彗差），如图 11-8b 和 h 所示。

2）有这样两个解：一个解是光阑在透镜前面，如图 11-8b 所示，另一个解是光阑在透镜后面，如图 11-8h 所示。

3）这两个解的畸变符号相反，而光阑在后面的那个解具有更大的畸变值。对这些解来说，光阑的微量位移不会产生任何畸变量的改变。

4）光阑在透镜后面时，透镜的弯曲更大。因此，球差也更大。

5）存在一些轴向和倍率色差，但不是很大。

当从这些子午曲线中选定主光线高时，就可以利用式（8-30）计算光阑在后面的镜头的光阑位置，或者利用式（8-31）计算光阑在前面的情况。选择光阑直径，以使球差可以忽略。最后，比较有趣的是，当切面是平坦的时候，佩兹伐面的矢高，或者佩兹伐场曲 Ptz，和子午像散相等。由于 Ptz 的值和弯曲无关，那么在使切面平坦之后，像散的最终值对两种弯曲的解都是相同的。显示基于图 11-8 的子午像差曲线线设计的两种风景镜头如图 11-9 所示。光阑在前面的风景镜头的设计数据见表 11-2，光阑在后面风景镜头的设计数据见表 11-3。从图 11-10 的像差曲线，我们可以得到：

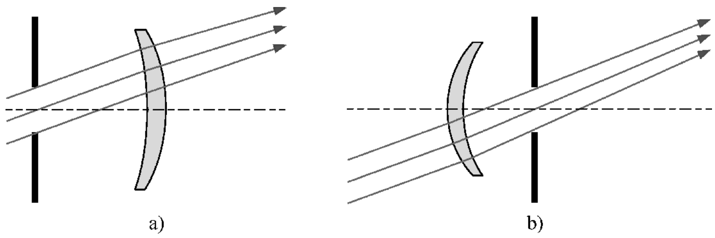


图 11-9　对于风景镜头的两种可能的结构

a）前置光阑　b）后置光阑

1）镜头的相对孔径较小（$F/20$），尽管如此，仍然有较为明显的球差。而且，也有一些轴向色差。

2）$y=0$ 时，子午曲线的斜率为零。这意味着子午焦面是平的。

3）存在一些倍率色差。

4）光阑在前面的解在光学性能上更好一些。然而，更经常用到的是光阑在后面的系统，因为可以很方便地清洁镜头，而且比较美观。

表 11-2　孔径光阑前置的风景镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
光阑	50.0	13.74	空气
-33.333	20.0	2.00	N-BK-7
-20.6776	20.0	—	空气

孔径（*F*数）：5.0mm（*F*/20.0）。
焦距：100.0mm。
后工作距离：102.044mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：36.4mm（20°）。

表 11-3　孔径光阑后置的风景镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
12.500	18.0	2.00	N-BK-7
15.589	18.0	8.81	空气
光阑	20.0	—	空气

孔径（*F*数）：5.0mm（*F*/20.0）。
焦距：100.0mm。
后工作距离：94.65mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：36.4mm（20°）。

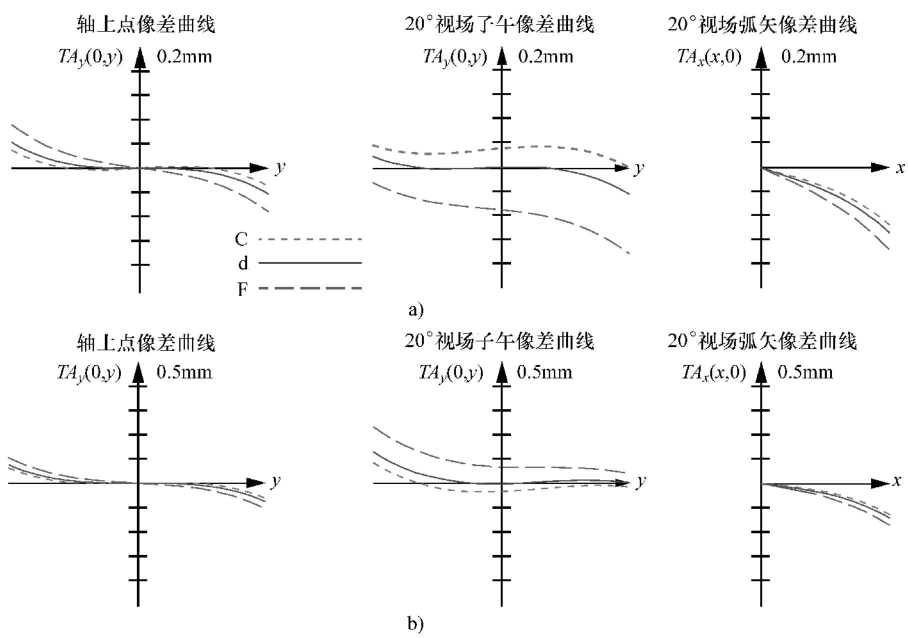


图 11-10　风景镜头的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

a）光阑在前面　b）光阑在后面

11.4　周视镜头

如果将两个弯月透镜的凹面相对放置，构成一种对称的形式，如图 11-11 所示，就得到了一个很多年前发明出的系统，它的商标名为周视镜头。如果这个系统完全对称，那么包括物高和像高、彗差、畸变，以及倍率色差都自动消除了。因此，我们不需要考虑透镜弯曲带来的彗差校正。因此，在图 11-8a 的曲线中，我们可以选择一个斜率为零的点（平坦的子午焦面），而无须考虑彗差（曲线的曲率）。如果我们考察这条曲线，会发现有两个点 M_1 和 M_2 满足需要。点 M_1 处有更大的畸变，但由于系统的对称性，畸变最终是可以消除的，所以选择这个点，这样可以产生一个更为紧凑的系统。这种镜头的弯曲比风景镜头的更厉害。利用式（8-31），可以计算出两个透镜之间的分离。

如果物体在无穷远处，就无法保留系统的完全对称性。然而，通过光线追迹分析，可以看到当物体处于无穷远时，系统的校正状态仍然出奇地好。物体在无穷远处的周视镜的设计数据见表 11-4。为了完全消除彗差，两个透镜距离光阑的距离稍有不同。图 11-12 显示了图 11-11 和表 11-4 中表示的周视镜的轴向、子午和弧矢像差曲线。

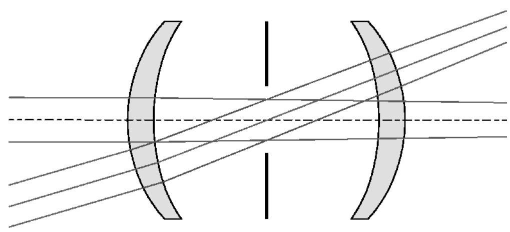


图 11-11　周视镜

表 11-4　周视镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
18.46	13.0	4.0	N－BK－7
21.70	13.0	15.017	空气
Stop	4.42	13.404	空气
－21.70	13.0	4.0	N－BK－7
－18.46	13.0	—	空气

孔径（F 数）：5.0mm（$F/20.0$）。
焦距：100.0mm。
后工作距离：78.95mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：36.40mm（20°）。

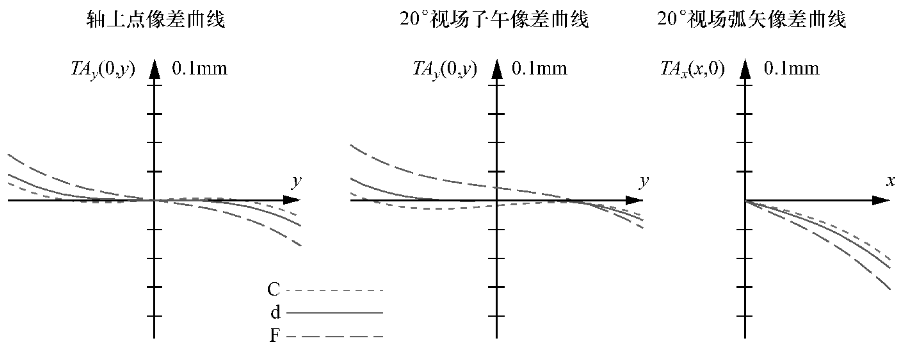


图 11-12　周视镜的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

11.5　消色差风景镜头

我们很自然会考虑风景镜头消除两种色差的可能性。我们已经知道，如果校正了轴向色差，光阑的移动不会引入任何倍率色差，即两种像差都得到了校正。我们使用两种不同的玻璃，冕牌玻璃和火石玻璃，来消色差。有许多方法可以用来消色差，例如，利用 $D-d$ 方法或者光线追迹。

如风景镜头一样，下一步是弯曲透镜直到彗差为零且子午焦面变得平坦。然而，子午焦面无法平坦化，因为前凹面和冕牌-火石交界面贡献了一个很大的正像散，使得子午焦面向后弯曲。这种消色差风景镜头叫作谢瓦利埃（Chevalier）透镜。

不幸的是，如果使用普通玻璃，透镜的弯曲在减小其他面的贡献时增大了玻璃接触面的像散。因此，这种消色差的代价是增大了像散或者场曲。换句话说，图 11-13 中的子午曲线没有一个斜率为零的拐点 I。那么，我们可以通过选择点 I（主光线高）来校正彗差，或者通过选择点 M 来使视场变平。图 11-14 显示了一个没有彗差的消色差风景镜头，设计数据见表 11-5。图 11-15 显示了这个镜头的轴向、子午和弧矢像差曲线。

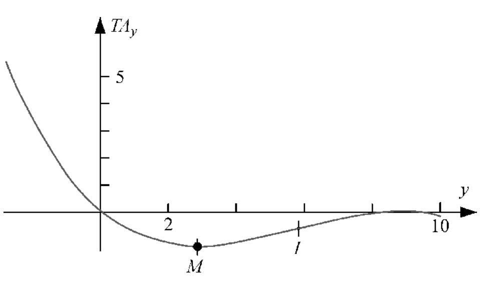


图 11-13　对于带有一半扩展光阑周视镜的子午曲线

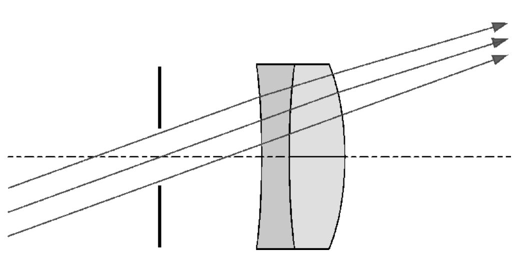


图 11-14　消色差风景镜头

表 11-5　消色差风景镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
Stop	12.0	17.21	空气
-89.622	12.0	3.0	N-F2
89.622	12.0	5.0	N-BK-7
-29.933	12.0	—	空气

孔径（F 数）：5.0mm（$F/20.0$）。

焦距：100.50mm。

后工作距离：103.95mm。

物距：无穷远。

像高（半视场角）：36.40mm（20°）。

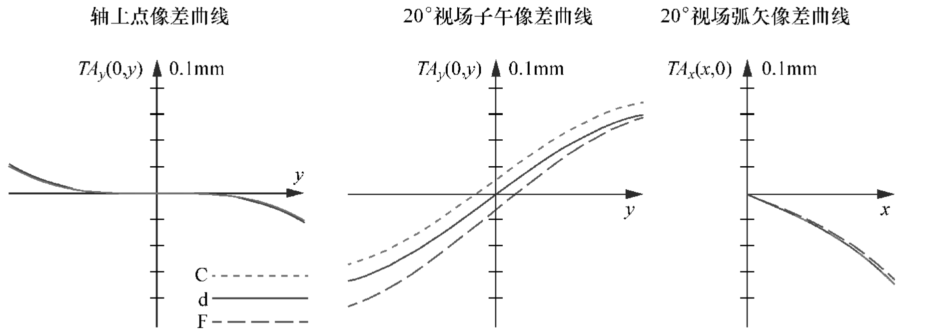


图 11-15　风景镜头的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

对于这种镜头中存在较大的正像散，一个明显的解决方法，是通过使用和负透镜的玻璃材料具有相同或更高折射率但是具有不同阿贝数的正透镜玻璃，来消除玻璃接触面的贡献。这种方法需要例如钡冕玻璃的材料。这种镜头叫作新型消色差风景镜头。这种玻璃组合减少了佩兹伐场曲，增大了视场。然而，新的消色差镜头中的球差比 Chevalier 透镜中的更差。

消色差风景镜头也可以通过在光阑面上放置弯月形冕牌正透镜来实现。这种方法由 Thomas Grubb 公司于 1857 年提出，产生一个非常弯曲的冕牌-火石玻璃接触面。好处是球差得到了非常好的校正。在每个透镜上有较大的彗差，以得到平坦的子午焦面。为了达到这个目的，两种玻璃的阿贝数的差应该很小，同时具有相对较大的折射率差。

一种比较自然的解决方法是把两个镜头对称放置，通过对称的形式来校正彗差，如图 11-16 所示。这种镜头因消球差或者是大孔径和无畸变而出名。

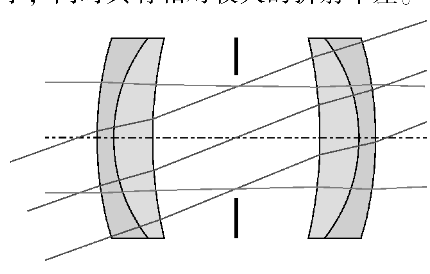


图 11-16　大孔径消畸变镜头

这种镜头的一个例子可参看表 11-6。系统不是完全对称的，因为两个共轭距是不相等的，但是彗差和倍率色差基本都消除了。为了得到更好的校正，在第一和最后的光学表面上的小的不对称性是允许的。像差曲线如图 11-17 所示。如 Kingslake（1978）指出的，大

孔径消畸变镜头是曾经制造的最流行的镜头之一。

表11-6　消色差风景镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
61.1279	18.0	8.00	N－SF2
29.4082	18.0	7.00	LF5
78.1452	18.0	15.00	空气
光阑	18.0	15.00	空气
－78.1452	18.0	7.00	LF5
－29.4081	18.0	3.00	N－SF2
－57.6332	18.0	—	空气

孔径（*F*数）：20.0mm（*F*/16.0）。

焦距：320.00mm。

后工作距离：300.749mm。

物距：无穷远。

像高（半视场角）：116.47mm（20°）。

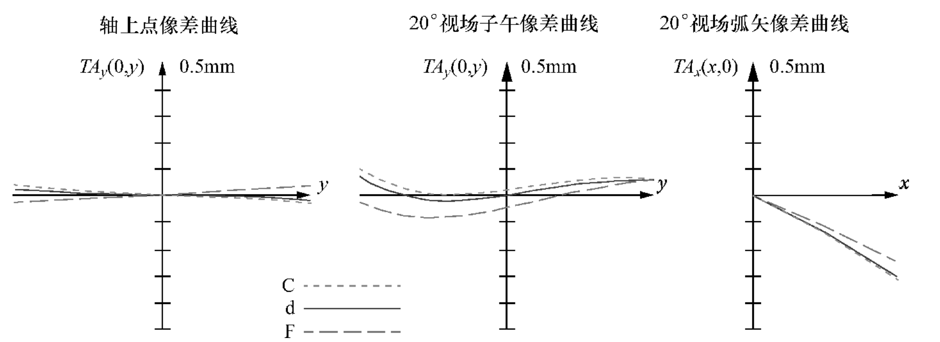


图11-17　大孔径消畸变镜头的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

11.6　双胶合透镜

折射望远镜的物镜的一种典型形式是4.2节所描述的消色差双胶合透镜，但是它可以更复杂（Fulcher，1947）。双合透镜的设计包含许多选项，取决于必须校正的像差类型（详细的描述见于Hopkins，1959，1962a，1962b；Hopkins和Lauroesch，1955；Korones和Hopkins，1959）。本节我们将研究这些选项和设计过程。

11.6.1　未消球差的双胶合透镜

给定玻璃和有效焦距，那么可以把三个曲率作为可用的自由度，来实现目标焦距，并校正两种像差，即球差和轴向色差。两个透镜的屈光度之比可以用来校正轴向色差，

而球差可以通过把透镜适当地向右弯曲来校正。选择透镜的合适厚度，确保不会太薄也不会太厚。

光学系统设计中的一种非常有用的图表法由 Kingslake（1978）做过描述，他认为这种方法由 H. F. Bennett 提出。这种方法可以在没有自动镜头改进程序，或者需要对每一个可能变量对设计的影响有详细的了解时使用。甚至当你使用光学追迹程序的时候，这种方法也可以使对像差变量的影响有一个直观的了解。当有两个可以修改的参数和两个待校正的函数（像差）时，都可以使用这种方法。作为例子，考虑一个消色差双胶合透镜。初始结构用第 6 章中的一阶公式计算，并假设正透镜是等凸的。数据如下：

直径	20.00mm
焦距	100mm
第一面曲率半径	43.68mm（$c_1=0.022893\text{mm}^{-1}$）
第二面曲率半径	−43.68mm（$c_2=-0.022893\text{mm}^{-1}$）
第三面曲率半径	−1291.00mm
第一片透镜中心厚度	4.00mm
第二片透镜中心厚度	2.00mm
玻璃材料	N－BK－7 和 N－F2

如图 11-18 所示，需要校正的两个函数是初级球差 *SphT* 轴向色差 *AchrT*。变量是正透镜的两个曲率 c_1 和 c_2。第三（最后一个）个曲率 c_3 由双胶合透镜的有效焦距确定。如果初始试验解是点 A，改变正透镜的前曲率，改变量为 Δc_1，调整第三个曲率以保持有效焦距不变，计算像差，找到一个新的透镜，即点 B。然后，回到起始点，改变 c_2，改变量为 Δc_2，再次计算像差，找到一个新的透镜的解，即点 C。

最后，假设修改的参数对像差的影响是线性的。如图 11-18 所示，通过使透镜的曲率半径的改变量为 $\Delta c'_1$ 和 $\Delta c'_2$，我们可以找到期望的解，即点 E。

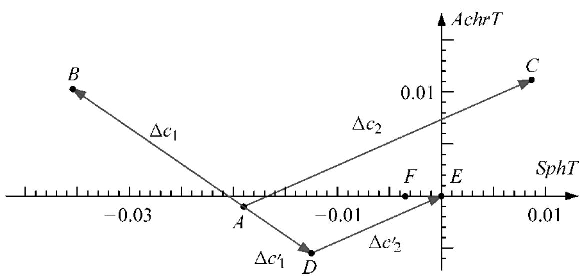


图 11-18　对于消色差双胶合透镜球差校正的图示解

图中，

$$\Delta c'_1=\frac{AD}{AB}\Delta c_1 \tag{11-13}$$

$$\Delta c'_2=\frac{DE}{AC}\Delta c_2 \tag{11-14}$$

我们可以在图 11-18 中的图示中注意到一个有趣的特点：

1）由于非线性，预测解 E 并不是真实解 F；但是，对于所有实际的应用，它都非

常接近。

2）参数 c_1 和 c_2 对像差有相同的影响。如果两种玻璃具有相同的折射率 n_D，玻璃接触面 c_2 就对球差没有任何影响。从而，直线 AC 将是垂直的。折射率的区别越大，这条线的斜率就越小。

3）直线 AB 和 AC 相互之间不平行。保证了解的存在性。

在不考虑球差校正的情况下，我们可以找到一个轴向色差为零的解。从而可以得到图 11-19。有两个解 A 和 B，都可以使球差为零。点 B 对应于我们刚找到的那个解。这两个解如图 11-20 所示。

如果正透镜没有严格的等凸限制，双胶合透镜的设计可以改进。表 11-7 显示了这种双胶合透镜的设计数据。

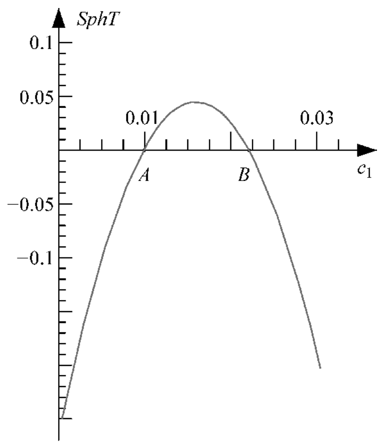


图 11-19　横向球差与消色差双胶合透镜前表面曲率之间的关系

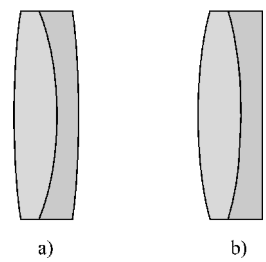


图 11-20　无球差的消色差双胶合透镜的两个解
a）左边交点解　b）右边交点解

表 11-7　*F* 数为 *F*/5 的消色差双胶合透镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
46.608（光阑）	22.0	4.0	N－BK7
－43.575	22.0	2.0	N－F2
－490.991	—	95.99	空气

孔径（*F* 数）：20.0mm（*F*/5.0）。
焦距：100.0mm。
双胶合透镜的后工作距离：273.47mm。
系统的后工作距离：95.99mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：8.74mm（5°）。

这种双胶合透镜的轴上点像差曲线如图 11-21 所示。可以注意到：

1）为了补偿初级球差，引入了五阶球差和离焦，使得光瞳边缘的总球差接近为

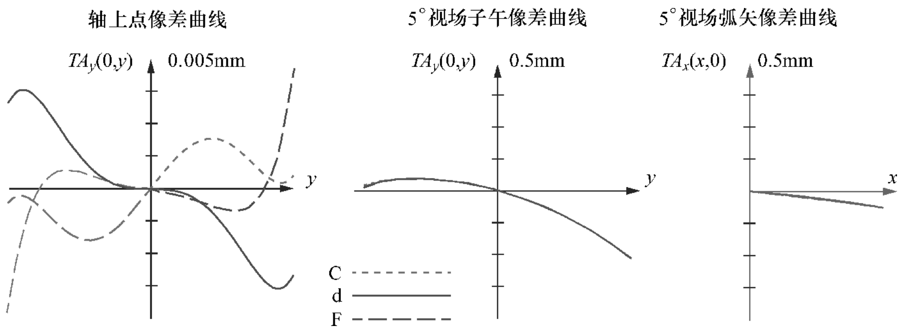


图 11-21　图 11-20b 中透镜解的轴上和轴外点像差曲线

零。最大横向像差约为 0.005mm（5μm），这和艾里斑的半径很接近。

2）F 和 C 曲线在光瞳边缘处相交，表示初级轴向色差得到了良好的校正。由于复色的存在，d 色（绿色）的曲线并没有在光瞳边缘处和红色、蓝色的曲线相交。

3）由于色球差的存在，蓝色（F）和红色（C）曲线的球差值不相等。

图 11-21 也显示了离轴 5°（$h'=8.74$mm）时子午和弧矢曲线。三种颜色的曲线几乎重合，表示没有倍率色差。如预期的那样，从子午光线像差曲线的对称分布图上可以看出彗差比较大。由于子午焦面是弯曲的，曲线的非对称部分是线性函数，其斜率由于焦面弯曲引起倾斜。子午和弧矢曲线的不同的斜率表示存在一些像散。如果这个透镜用作平行光管，将产生一个平坦的波前，在黄光时的峰谷（$P-V$）误差为 0.22 个波长。

在第 5 章我们已经看到，如果两个接触的薄透镜的玻璃具有不同的折射率，就有两个解可以使球差为零。因此，通过选择玻璃，或者稍后介绍的方法，我们可以把这个零球差的解放在任意期望的位置，从而实现彗差的校正。一个校正了球差和彗差的系统称为不晕的。

11.6.2　双分离透镜

这种物镜被许多作者描述过，例如，Rosin（1952）。这种双分离透镜的两个元件被分别弯曲到最佳的形状，以得到初级球差和彗差的同时完全校正。因此，给定焦距，并要求轴向色差为零，那么两个元件的焦距就固定了。两个弯曲就是校正球差和彗差的两个自由度。为了修改我们刚才的设计，首先在两个透镜之间引入一个 0.15mm 的空气间隔。评价这个初始设计。利用通用系数来计算初级弧矢彗差。通过对通过光瞳边缘的一条轴向光线进行精确光线追迹来计算球差。从而横向像差 TA_y 就是横向轴向球差的值，包含了所有的高阶项。

下一步是弯曲正透镜。这可以通过给曲率 c_1 一个改变量 $\Delta c_1=-0.002\text{mm}^{-1}$，然后调整曲率 c_2 以保持相同的有效焦距来实现。像评价初始结构一样评价这个新的结构。第三步是回到原始设计，像第一个透镜一样，用相同的方法和改变量来弯曲负透镜。再次评价这种结构。通过这种方法，得到了图 11-22 中所示的图。其中 A 是原始设计，B 和 C 是带有透镜弯曲的结构。

使用先前描述的方法，可以在点 E 的附近找到一个解，但并不精确地在点 E 处。

由于非线性，这个点并不如期望的那样在原点，但是负透镜的一个小的弯曲可以得到一个非常好的结果。图11-23和表11-8显示了一个双分离透镜。

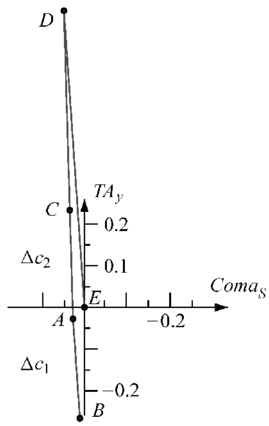


图11-22　双分离透镜的图示解

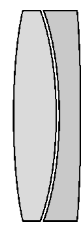


图11-23　双分离透镜

表11-8　*F*数为*F*/5的双分离消色差球差透镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
58.39（光阑）	22.0	4.0	N－BK7
－36.29	22.0	0.15	空气
－36.67	22.0	2.0	N－F2
－161.92	—	96.55	空气

孔径（*F*数）：20.0mm（*F*/5.0）。
焦距：100.00mm。
后工作距离：96.55mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：8.75mm（5°）。

图11-24显示了这个透镜的轴向曲线，从中我们可以看到：

1）球差与双胶合透镜的很相似。再一次地引入了五阶球差和离焦，从而在光瞳边缘处总像差接近零。

2）初级色差与双胶合透镜的也很相似。

图11-24中一个高度8.75mm（5°）的离轴物点的子午和弧矢曲线是一条直线，表示没有彗差。较大的斜率是由弯曲的子午焦面引起的。注意到这条曲线中原点处的斜率和图11-21中的是相等的。子午和弧矢曲线的斜率不同，表示存在一定的像散。显然，一个这样的透镜系统不能被胶合，必须很仔细地安装以避免错位。

在这种平行空气间隔的双分离透镜中，为了减少制造费用，中间相邻的两个曲率半径是相等的。从而，两个可调的参数是整个透镜的弯曲和两个透镜之间的距离。

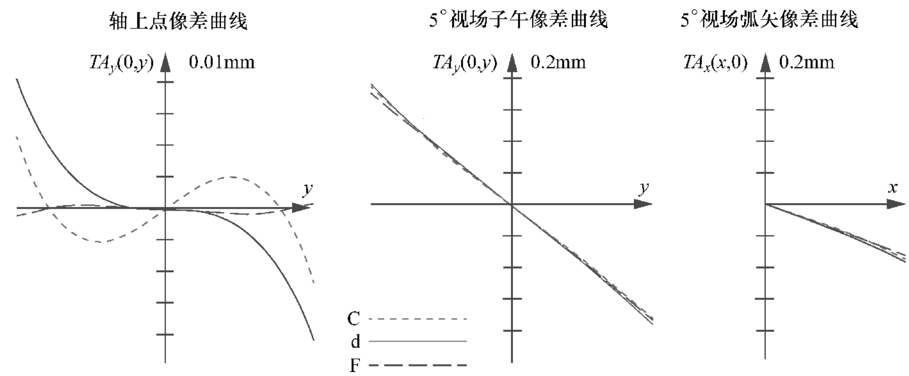


图 11-24　双分离透镜的轴上点、轴外点子午和弧矢曲线

这种设计的唯一问题是，根据第 5 章中解释的原则，高阶球差可能变得太大，从而产生较大的带像差。因此，初级和高阶球差必须相互补偿。一般来说，带有两个不同曲率的分离式设计优于平行空气间隔系统。

11.6.3　消球差双胶合透镜

如 6.3.3 节所述，球差为零的解可以正好位于慧差等于零的弯曲值。这种透镜系统中，我们有三个自由度，即整个透镜的弯曲，和两个元件的屈光度。在给定透镜的折射率后，我们可以使用这些变量来得到期望的焦距，校正球差，校正彗差。然后通过选择阿贝数可以校正色差。例如，通过替换玻璃 N－F2 为 N－SF5，双胶合透镜的设计得到了改进，因为色差减小了。对 N－Bk7 和 N－SF5 这两种玻璃而言，彗差的符号相反。图 11-25 和表 11-9 显示了这种消球差双胶合透镜的设计。图 11-26 画出了像差曲线。

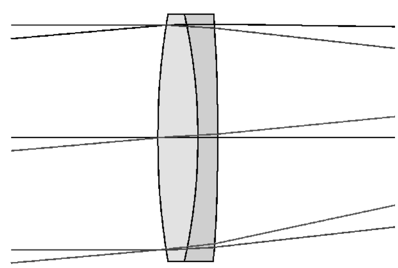


图 11-25　消球差双胶合透镜

表 11-9　*F* 数为 *F*/5 的消球差双胶合透镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
60.21（光阑）	22.0	4.0	N－BK7
－45.45	22.0	2.0	N－SF5
－136.98	—	97.11	空气

孔径（*F* 数）：20.0mm（*F*/5.0）。

焦距：100.00mm。

后工作距离：97.11mm。

物距：无穷远。

像高（半视场角）：8.75mm（5°）。

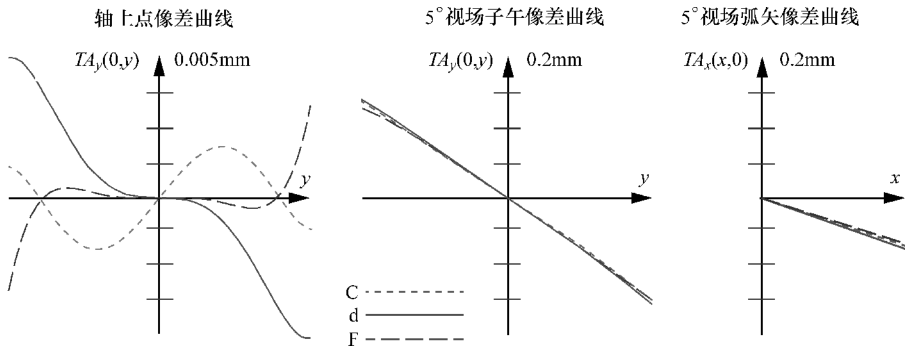


图 11-26　消球差双胶合透镜的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

11.6.4　复消色差透镜

二级色差可以通过下面的方法来减小：

1）选择合适的玻璃，以使两种玻璃的部分相对色散相等，或者至少是彼此接近。不幸的是，由于需要用到特种玻璃，这并不是一个很好的解决方法。

2）使用三种不同的玻璃来组成一个 4.4.1 节所述的三合透镜。我们提到过，$P-V$ 图中三种玻璃所代表的点组成的三角形的面积必须不为零，这样才能得到一个解。另一方面，为了有低屈光度的元件，这个面积又要尽可能地大。如 Kingslake（1978）指出的，比较好的玻璃选择是第一个元件用冕牌玻璃，中间的元件用一个短性火石或者镧冕玻璃，最后的元件用一个非常重的重火石玻璃。

11.7　激光准直器

我们经常需要得到一束良好准直的激光光束，这时可以使用一个较大 F 数的普通望远物镜得到，但是一个重要的需求是焦距必须很短，这时，尽可能低的 f 数是方便的。这就需要对球差进行极好地校正，同时有很低的带像差。如 Korones 和 Hopkins（1959）描述的，带像差可以通过下面四种方法中的任一种来减小：

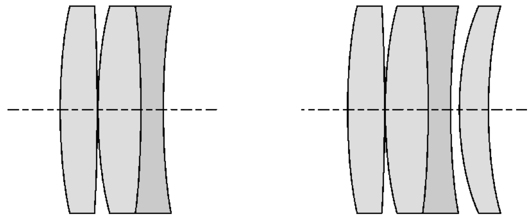
1）选择合适的玻璃。

2）使用空气间隔。

3）引入非球面。

4）把正透镜分裂为两个。

激光准直器中，良好的色差校正不是必要的，但是球差必须对一定范围的波长都很小。当改变颜色的时候，或许需要重新对焦。另一项重要的需求是彗差校正，从而允许少量的对准偏差。Malacara（1965）使用最后一种方法设计了两个准直器，如图 11-27 所示。表 11-10 中所示数据代表的准直器，在 He-Ne 激光下，其 rms 波前畸变优于 $\lambda/40$，并且对色差有良好的校正。轴上点、子午和弧矢像差曲线如图 11-28 所示。



a)　　　　b)

图 11-27　两个 He - Ne 激光准直镜

a）F/4 准直镜　b）F/2. 64 准直镜

表 11-10　F 数为 F/4 的激光准直镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
142. 17	50. 0	9. 0	N - BK7
- 819. 98	50. 0	0. 2	空气
177. 28	50. 0	10. 0	N - BK7
- 195. 91	50. 0	5. 0	N - SF15
516. 51	50. 0	—	空气

孔径（F 数）：50. 0mm（F/4. 0）。
焦距：200. 00mm。
后工作距离：200mm。
物距：无穷远。

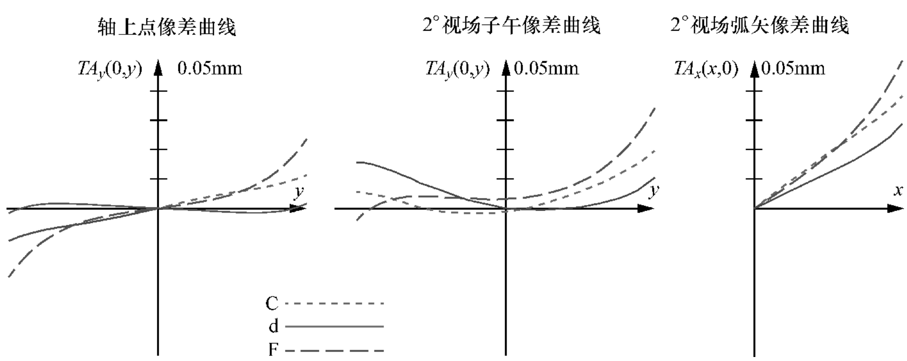


图 11-28　F/4 准直镜的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

在第二个准直器中，为了减小焦距，加入了一个弯月透镜，如浸没式显微物镜中的复式前置镜头一样，见表 11-11。由于这个附加的元件没有进行色差校正，因此这种准直器也没有良好的色差校正。632. 8μm 波长时，波前相对平面的最大值偏离也优于 λ/40。

表 11-11 **F 数为 F/2.64 的激光准直镜**

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
142.17	50.0	9.0	N - BK7
-819.98	50.0	0.2	空气
177.28	50.0	10.0	N - Bk7
-195.91	50.0	5.0	N - SF15
516.51	50.0	2.0	—
71.80	50.0	7.0	N - BK7
111.62	50.0	—	—

孔径（F 数）：50.0mm（F/2.64）。
焦距：132.00mm。
后工作距离：112.4mm。
物距：无穷远。

11.8 球面和抛物面反射镜

由反射镜组成的系统相当常见，在许多光学仪器中都有重要的应用。一些作者主要在离轴形式上进行了非常详细的研究，例如，Sasian（1994），Gomez - Vieyra 和 Malacara - Hernandez（2011），以及许多研究反射式天文望远镜的作者。这些将在第14章中提到。

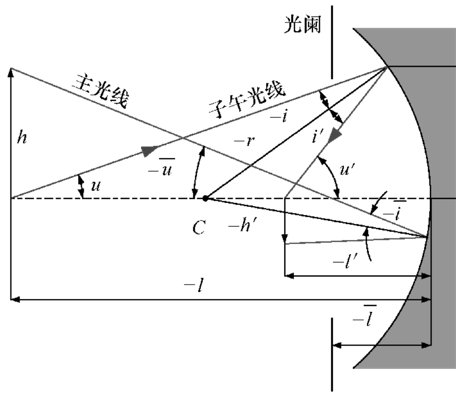


图 11-29 物位于离镜面有限距离处的凹面反射镜上的一阶参数

球面镜的波像差在第7章的7.8节已经研究过。本章我们将从光线像差的角度来研究它们。球面镜的一阶参数（凹或者凸，球面或者抛物面）假设物距为有限距离 l，光阑在镜前面有限距离处，如图11-29所示，这些参数是对一个凹面写出的（曲率半径为负），但是结果对凹面镜和凸面镜同样有效。利用式（1-38）和式（1-46），经过一些代数运算，我们可以得到子午光线的 i、i'、u、u' 的值，以及折射率 n 和 n'：

$$i = -i' = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{l}\right) \quad y = \left(-\frac{1}{2f} - \frac{1}{l}\right)\frac{D}{2} \quad u = -\frac{y}{l} = -\frac{D}{2l}$$

$$u' = -\frac{(2/r - 1/l)}{(1/r - 1/l)} \quad i = -\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{l}\right) \quad y = -\left(-\frac{1}{f} - \frac{1}{l}\right)\frac{D}{2} \tag{11-15}$$

$$n' = -n = -1$$

当物体在距离镜面无穷远距离时（见图 11-30），这些表达式变为

$$i=-i'=\frac{y}{r}=-\frac{D}{4f}$$

$$u=0$$

$$u'=-2i=-\frac{2y}{r}=\frac{D}{2f}$$

$$n'=-n=-1 \tag{11-16}$$

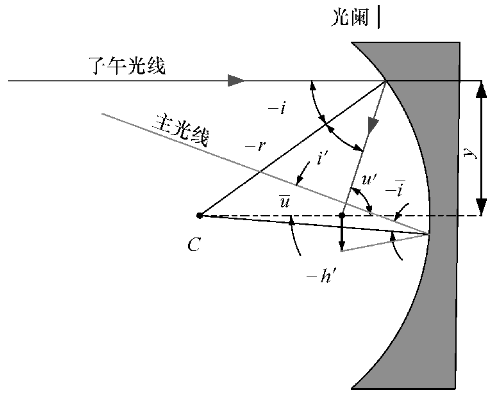


图 11-30　物位于无穷远处的凹面反射镜上的一阶参数

对主光线，我们可以发现

$$\bar{i}=-\left(\frac{\bar{l}-r}{r}\right)\bar{u}=\left(\frac{\bar{l}-r}{r}\right)\left(\frac{2/r-1/l}{1-\bar{l}/l}\right)h' \tag{11-17}$$

由此

$$\frac{\bar{i}}{i}=-\frac{(2/r-1/l)(1-\bar{l}/r)}{(1/r-1/l)(1-\bar{l}/l)}\frac{h'}{y} \tag{11-18}$$

当物体距镜面无穷远时，上式变为

$$\frac{\bar{i}}{i}=2\left(\frac{\bar{l}-r}{r}\right)\frac{h'}{y} \tag{11-19}$$

这些表达式对球面和抛物面镜同样有效。

11.8.1　球面镜的离轴像差

现在我们就来推导凹面或者凸面球面镜的初级离轴像差的表达式。离轴球面镜的波像差在第 7 章的 7.8 节中已经详细研究过。这里我们用第 5 章中的光线光学来研究它们。

11.8.1.1　球差

由式（5-28），可以写出对一个球面镜，物体在镜面前方无穷远时的初级轴向球差为

$$SphL=-\frac{(1/r-1/l)^2}{(2/r-1/l)^2}\frac{y^2}{r}=-\left(\frac{r-1}{r-2l}\right)\frac{y^2}{r} \tag{11-20}$$

11.8.1.2　彗差

如式（6-40）和式（6-49），彗差和像散取决于球差的值。而球差的值又取决于物体的位置。因此，彗差和像散的值是物体位置和光阑位置的函数。物体在镜面距离为 l 时，弧矢彗差值由下式给出

$$Coma_S=-\frac{(1/r-1/l)(1-\bar{l}/r)}{(1-\bar{l}/l)}\frac{y^2h'}{r} \tag{11-21}$$

11.8.1.3　像散

由式（6-49）和式（11-18），物体在镜面前距离为 l 时，轴向弧矢像散由下式给出

$$AstL_S = -\frac{(1-\bar{l}/r)^2}{(1-\bar{l}/l)^2}\frac{h^2}{r} \tag{11-22}$$

11.8.1.4　佩兹伐场曲

由式（6-23），佩兹伐场曲为

$$Ptz = \frac{h'^2}{r} = \frac{h'^2}{2f} \tag{11-23}$$

11.8.2　凹球面镜

我们来分析凹球面镜的每一种单色初级像差。

11.8.2.1　球差

由式（11-20），我们可以看到，当物体和像都在曲率中心或者镜的顶点（$l=r$），球面镜没有球差。如果物体在无穷远处（$l=\infty$ 且 $l'=f=r/2$），轴向球差为

$$SphL = \frac{y^2}{4r} = \frac{D^2}{32f} = \frac{z}{2} \tag{11-24}$$

而横向球差为

$$SphT = \frac{y^3}{2r^2} = \frac{D^3}{64f^2} \tag{11-25}$$

式中，D 是镜直径，z 是表面的矢高，r 是曲率半径。对此式积分，并利用式（7-4），且假设波前曲率半径和球面镜的焦距相等（$r/2$），我们可以得到波像差

$$W(y) = \frac{y^4}{4r^3} \tag{11-26}$$

有趣的是，这个结果是球面和抛物面之间的矢高之差 $Z=B_1S^4$ 的两倍。这是可以预料到的，因为抛物面没有球差。因此，球面镜的波前球差就是抛物面和球面之间距离的两倍。

11.8.2.2　彗差

把分析限制在物体在凹面镜前面无穷远距离的情况下，由式（11-21），弧矢彗差由下式给出

$$Coma_S = \frac{y^2h'(\bar{l}-r)}{r^3} \tag{11-27}$$

当光阑在镜处（$\bar{l}=0$），弧矢彗差的值为

$$Coma_S = \frac{D^2h'}{16f^2} \tag{11-28}$$

如果出瞳在曲率中心（$\bar{l}=r$），弧矢彗差的值为 $Coma_S=0$。

11.8.2.3　像散

由式（11-22），对物体在无穷远距离的情况，我们得到

$$AstL_S = \frac{h'^2}{r}\left(\frac{\bar{l}-r}{r}\right)^2 \tag{11-29}$$

如之前解释的，这个结果只在物体和透镜之间为无穷远距离时有效。利用式（11-17），初级轴向弧矢像散可以写为

$$AstL_S = -\left(\frac{\bar{l}-r}{r}\right)^2 Ptz \tag{11-30}$$

初级轴向子午像散 $AstL_T$ 是上值的 3 倍。

11.8.2.4　佩兹伐场曲

由式（11-20），我们可以看到佩兹伐面和镜是同心的。如果物体不在镜前无穷远处，那么像就在相应的共轭距离处，但是佩兹伐场曲保持不变。

弧矢焦面的矢高等于佩兹伐场曲和轴向弧矢像散之和。子午焦面的矢高等于佩兹伐场曲和轴向子午像散之和。最佳表面的矢高为

$$Best = \left[1 - 2\left(\frac{\bar{l}-r}{r}\right)^2\right] Ptz \tag{11-31}$$

当光阑在曲率中心处，像散就消失了，但是视场仍有佩兹伐场曲，如图 11-31a 所示。如果光阑在

$$\frac{\bar{l}}{r} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} + 1 = 0.42; 1.58 \tag{11-32}$$

处，那么子午面就是平坦的，如图 11-31b 所示。如果光阑放置在

$$\frac{\bar{l}}{r} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = 0.29; 1.707 \tag{11-33}$$

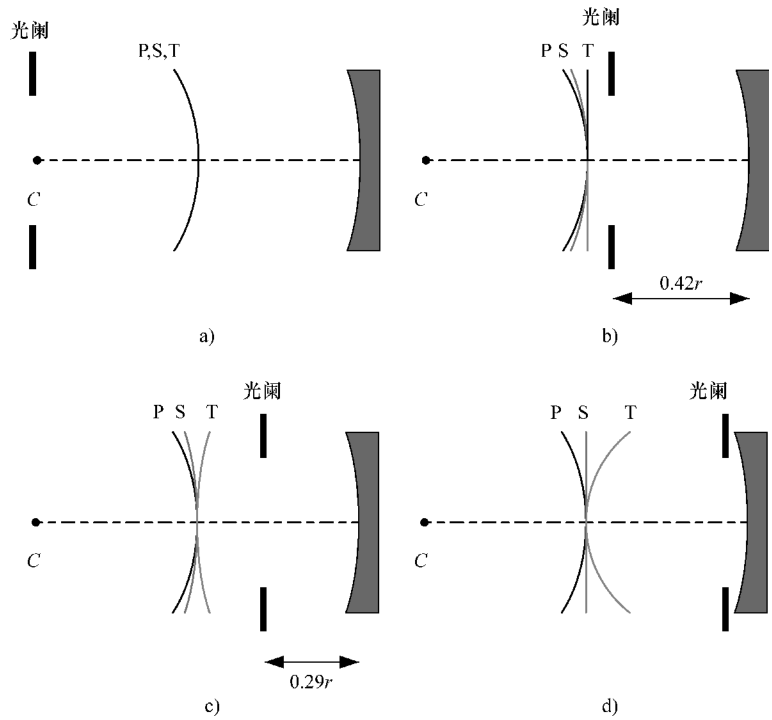


图 11-31　对于四个不同光阑位置的球面镜的像散表面

处，那么位于弧矢面和子午面之间的最佳表面就是一个平面，如图 11-31c 所示。当光阑在镜上，轴向子午像散符号相反，如图 11-31d 所示。这种情况下，弧矢面是平的。

当物和像都在凹球面镜的曲率中心时，球差、彗差和像散都是零。只存在佩兹伐场曲。

11.8.3　凹抛物面镜

我们再来看凹抛物面镜的各种初级像差。

11.8.3.1　球差

对抛物面镜，当物在无穷远处，没有球差。然而，如果物在曲率中心，就会出现球差。由式（A2-16），镜面的轴向球差

$$SphL_{\text{normals}} = f\tan^2\varphi \tag{11-34}$$

如图11-32所示，物在曲率中心时的抛物面的球差约等于法向球差的两倍。因此，我们可以写出

$$SphL = 2f\frac{y^2}{r^2} = \frac{y^2}{r} = -\frac{D^2}{8f} \tag{11-35}$$

如果把这个结果和物在无穷远处的球面镜的像差比较，可以发现它们的符号相反，绝对值相差一个4倍的因子。如果我们注意到它们的波像差必须有相反的符号以及相同的绝对值，这就很容易理解。对球面来说，观察平面距离为 $-f = r/2$，而对抛物面来说，此距离为 r。

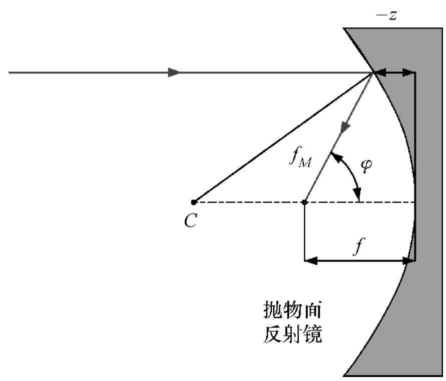


图11-32　抛物面反射镜

从而，它们的横向像差的绝对值必定相差一个2倍的因子，而轴向像差的绝对值必定相差一个4倍的因子。

11.8.3.2　彗差

现在考虑物在无穷远处，如果光阑在镜面上，抛物面将没有彗差，只有主面在焦点处会聚，但这不是一般情况。抛物面的主面是抛物面本身。从而，OSC（定义见6.3.1节）的值为

$$OSC = \frac{f_M}{f} - 1 \tag{11-36}$$

式中，f_M 和 f 分别是边缘和近轴焦距，如图11-32所示，两者沿反射光线测得。对抛物面，我们有

$$f_M = f \mp z \tag{11-37}$$

式中，z 是矢高，由下式给出

$$z = -\frac{y^2}{4f} = -\frac{D^2}{16f} \tag{11-38}$$

那么，弧矢彗差的值等于

$$Coma_S = OSC \cdot h' = -\frac{zh'}{f} \tag{11-39}$$

或者

$$Coma_S = \frac{D^2 h'}{16f^2} \tag{11-40}$$

这个值和球面镜的彗差值一致。它也可以利用式（6-41）和式（6-91），把球面和非球面的贡献相加得到。然而，当光阑在镜面上，非球面的贡献为零。这也解释了为什么光阑在镜上时，彗差对球面镜和抛物面镜是相等的。

11.8.3.3　像散

对抛物面，物在无穷远处时，球差为零。如果我们把球面和非球面对这些像差的贡献分开，写为

$$SphL_{\text{sphere}} + SghL_{\text{asphere}} = 0 \tag{11-41}$$

类似地，对轴向弧矢像散，

$$AstL_{S\ \text{total}} = AstL_{S\ \text{sphere}} + AstL_{S\ \text{asphere}} \tag{11-42}$$

而利用式（6-50）和式（6-96），有

$$AstL_{S\ \text{total}} = SphL_{\text{sphere}}\left[\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^2\left(\frac{\bar{y}}{y}\right)^2\right] \tag{11-43}$$

或者

$$AstL_{S\ \text{total}} = AstL_{S\ \text{sphere}}\left[1 - \left(\frac{i}{\bar{i}}\frac{\bar{y}}{y}\right)^2\right] \tag{11-44}$$

光阑在镜上时，像散和球面镜的像散相等。然后，经过一些代数运算，我们得到

$$AstL_{S\ \text{total}} = AstL_{S\ \text{sphere}}\left[\frac{(\bar{l}-r)^2 - \bar{l}^2}{(\bar{l}-r)^2}\right] \tag{11-45}$$

然后，利用式（11-30），得到

$$AstL_{S\ \text{total}} = \left[\frac{(\bar{l}-r)^2 - \bar{l}^2}{r^2}\right]Ptz \tag{11-46}$$

然后，利用式（6-73），最佳像面的矢高

$$Best = \left[1 - 2\left(\frac{r-2\bar{l}}{r}\right)^2\right]Ptz \tag{11-47}$$

我们看到当 $\bar{l}/r = 0.25$ 时，最佳像面是平的。

最后，有趣的是，对物在无穷远处的抛物面，子午焦面是平的。图 11-33 显示了一个抛物面的子午和弧矢曲线以及像散面。其中，焦距为 2600mm，直径为 200mm，半视场为 0.2°。

11.8.4　凸球面镜

现在来研究凸球面镜。如图 2-9 显示的发散镜头，一个凸球面镜不能对实物产生实像。实像只能由虚物产生，如第 14 章中要研究的卡塞格伦望远镜。虚物可以产生虚像。这里我们只讨论实物的形式，因此像是虚的。

如果入瞳在镜的曲率中心处，像就会有一个弯曲强烈的球面焦面，此焦面和镜面共心，如图 11-34 所示。系统中的仅存像差是球差和佩兹伐场曲，彗差和像散都是零。这种系统的问题是入瞳在凸面镜后面，因此这种结构只在该镜面是一个更复杂的布置结构

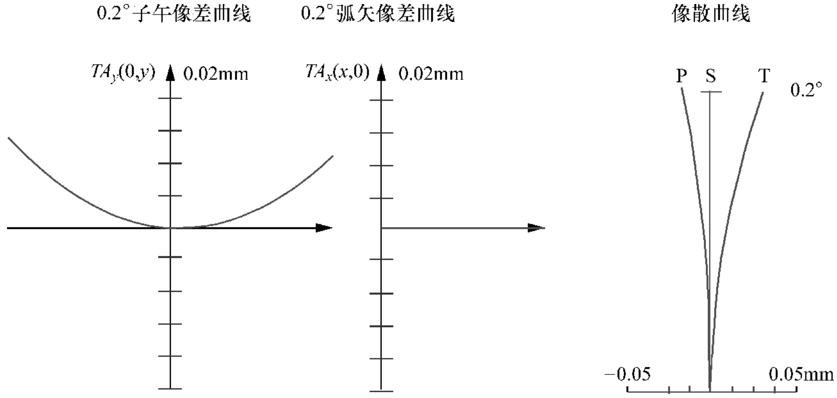


图 11-33　抛物面镜的子午和弧矢像差和像散曲线

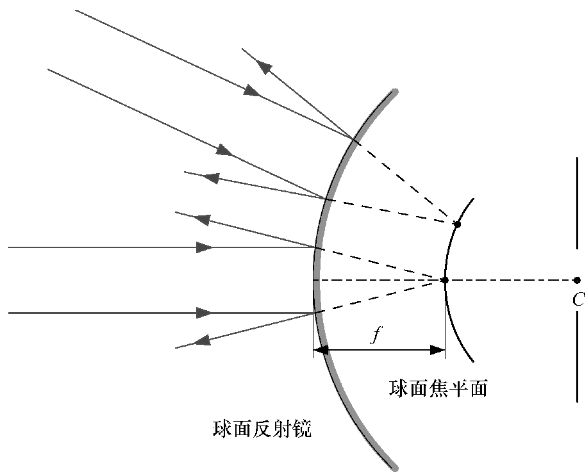


图 11-34　光阑在镜面曲率中心处的凸球面反射镜，并且像与球面同心

中的一部分时才有可能。

一个更常见的形式是人眼观察虚像，而光阑就是观察眼的瞳孔。如果物是平的，且无限延展，虚像就会被强烈地弯曲，如图 11-35 所示。这种凸透镜可以用作一个极宽视场的系统，包含覆盖一个半球面的视场。

当一个平的虚物在镜上反射时，实像有强烈的弯曲，如图 11-36 所示。对小区域来说，佩兹伐、弧矢和子午场都是球面，如初级像差理论预期的那样（见图 11-36 的虚线）。对非常大的区域，像面的形状是卵形的，非常接近于椭圆。对弧矢和子午光线，卵形是有区别的，如 Mejia – Barbosa 和 Malacara – Hernandez（2001）指出的。这些表面可以用 Coddington 方程或者精确光线追迹来计算出来。在顶点 V 处，这些卵形对初级佩兹伐、弧矢和子午面有相同的曲率。这些卵形相交于绕光轴的一个公共圆。这个圆由平面物和球面镜的圆形交点 R 组成。

如果反转光路，平的虚物变为平的虚像，卵形像变为卵形物。这种配置由 Mejia – Barbosa 和 Malacara – Hernandez（2001）提出，用作角膜形貌检测仪。

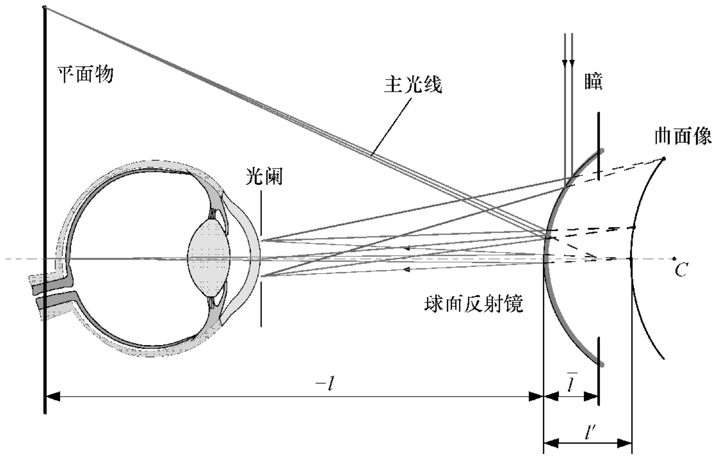


图 11-35　光阑位于曲率中心的凸球面反射镜和平面像

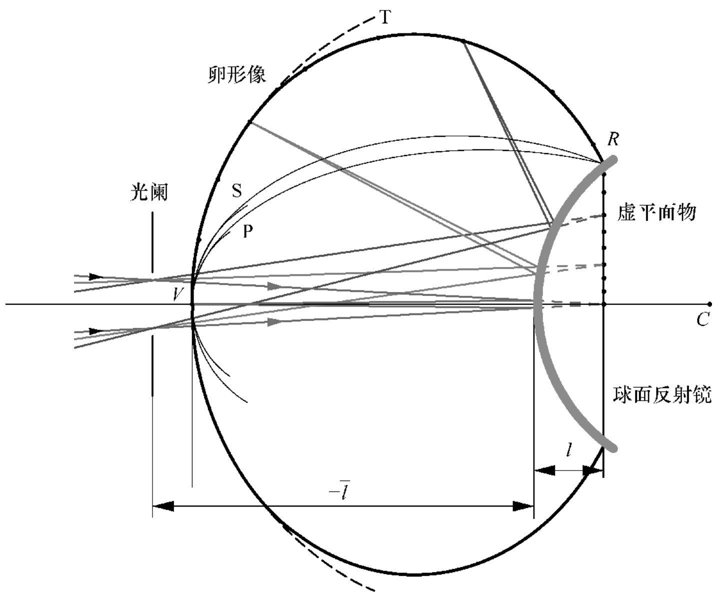


图 11-36　有平面虚物的凸球表面，并且光阑在反射镜前

11.9　一些反射和折反系统

反射系统只由反射镜组成。折反系统由透镜和反射镜组成。这一部分我们研究几种这类系统。

11.9.1　孟琴反射镜

这种镜，如图 11-37 所示，由法国的 Mangin 于 1876 年发明，用来替换探照灯中的

抛物面镜。通过在弯月负透镜的凸面上镀一层反射膜即可制造出来。前凹面的曲率半径是用来校正球差的变量。彗差小于抛物面镜彗差的一半。这种系统有两个重要的优点。一个是表面是球面，而不是抛物面，使得制造更容易。第二个优点是反射膜在后表面上，避免了暴露于空气中和金属的氧化。

一个具有焦距 F，玻璃为冕牌玻璃 N－BK－7 的孟琴镜，可以用下面的公式来设计：

$$r_1 = 0.1540T + 1.0079F \tag{11-48}$$

和

$$r_2 = 0.8690T + 1.4977F \tag{11-49}$$

式中，T 是厚度，r_1 是前表面的曲率半径，r_2 是后表面的曲率半径。

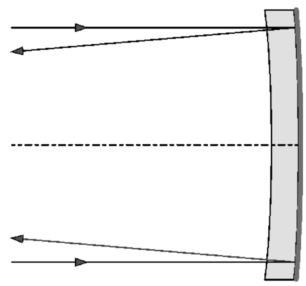


图 11-37　孟琴镜

表 11-12 示出了一个孟琴反射镜的设计数据。如果需要，这个系统也可以是消色差的。

表 11-12　孟琴镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
-505.80	100.0	10.0	N－BK7
-758.00	100.0	10.0	N－BK7
-505.80	100.0	—	空气

孔径（F 数）：100.0mm（F/5.0）。

焦距：500.23mm。

后工作距离：105.00mm。

物距：无穷远。

像高（半视场角）：0.0mm（0°）。

11.9.2　戴森（Dyson）系统

单位放大率系统在复制小的结构或者图样的时候非常有用。例如，电子工业中的照相平版印刷术。一般这些系统是对称的，自动消除了彗差、畸变和倍率色差。图 11-38 中画出了一种系统，由 Dyson 设计。

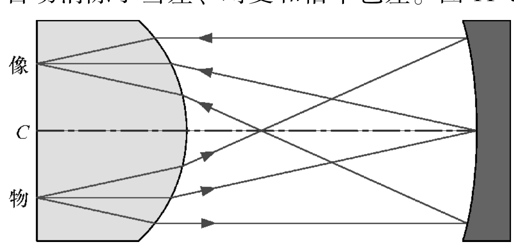


图 11-38　Dyson 系统

这个系统是共心的。从点 C 出发的轴上边缘子午光线不会被折射。因此，不存在球差和轴向色差。透镜的曲率半径 r_L 为

$$r_L = \left(\frac{n-1}{n}\right) r_M \tag{11-50}$$

式中，r_M 是反射镜的曲率半径。用来使佩兹伐之和为零。初级像散也是零，因为两个表面的球差贡献都是零。然而，在离光轴的不远处就有高阶像散出现。因此，这个系统中所有的初级像差都得到了校正。

可以注意到，由于主光线平行于物方介质和像方介质中的光轴，系统是前后双远心

的。表 11-13 示出了一个 Dyson 系统的设计。

表 11-13　Dyson 系统

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
	500.00	340.72	N－BK7
－340.72	500.00	659.28	空气
－1000.00	500.00	－659.28	空气
－340.72	500.00	－340.72	N－BK7
像高（离轴距离）：150.0mm。			

11.9.3　奥夫纳（Offner）系统

Offner 系统是另一种 1∶1 放大率的系统，只由反射镜组成，如图 11-39 所示。和 Dyson 系统一样，这种系统是共心的，佩兹伐和为零。这种系统也可以校正所有初级像差，但是因为这种形式的高阶像散很大，实际的 Offner 系统和这种形式不同。初级和高阶像散在一个区域中平衡，形成一个良好校正的环形，这也是弧矢面和子午面相交的地方。

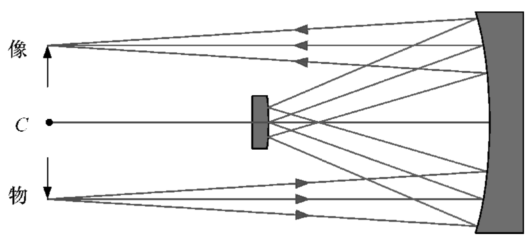


图 11-39　Offner 系统

11.10　*f*－*θ* 透镜

对无畸变的透镜，像高 h 等于 $f\tan\theta$，其中 f 是焦距，θ 是入射主光线相对光轴的角度。在一些仪器里，这不是期望的镜头特性，例如，在激光扫描器中，我们需要像和角度 θ 成比例，而不是和角度的正切成比例。图 11-40 显示了一个基本激光扫描器，其中平行光束照射一个旋转的多边形。多边形的转动角速度是一个常量，我们需要聚焦点以恒定的线速度移动。

为了实现移动点的恒定速度，透镜的畸变必须不为零。必须人为地引入一个负的或者桶形畸变。这种畸变是可以引入的，因为入瞳位于透镜的前面，在旋转多边

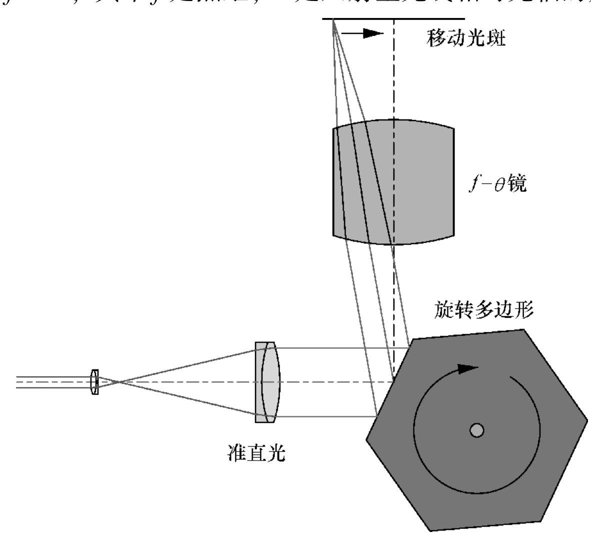


图 11-40　带有 *f*－*θ* 透镜的激光扫描仪

形的表面。有时，$f-\theta$ 透镜需要是像方远心的（出瞳在无穷远），这样像高是一个常量，不依赖于像面的位置。然而，这并不总是必要的。

11.11　菲涅耳透镜和伽柏平板

菲涅耳透镜由不同斜率和宽度的环形组成，如图11-41所示。我们可以把这种透镜看作是一个厚的平凸透镜，它的弯曲面被分成许多同心圆，从而降低了厚度。每个环形的宽度随半径的平方而增加。因此，透镜的厚度大体上为常量。菲涅耳透镜的环宽可以制作为许多尺寸，甚至可以在微米量级（菲涅耳微透镜）（Nishihara 和 Suhara，1987）。

这种透镜的球差和普通透镜一样，可以通过弯曲来进行控制。从平凸结构开始逐渐弯曲，这是两个表面的屈光度的重新分配，然而，这种方法很少使用。因为制造的原因，只在一面上制造沟形表面更方便。减少球差的另一种方法是引入一个非球面，通过恰当地控制每一个槽的斜率即可做到。这种方法较前者更为常见。

Delano（1974，1976，1978，1979，1983）详细地研究了菲涅耳透镜的初级像差，得到了一些有趣的结果。例如，存在一个新的彗差项，叫作线性彗差，这种彗差在普通透镜中没有出现。彗差图像如图11-42所示。

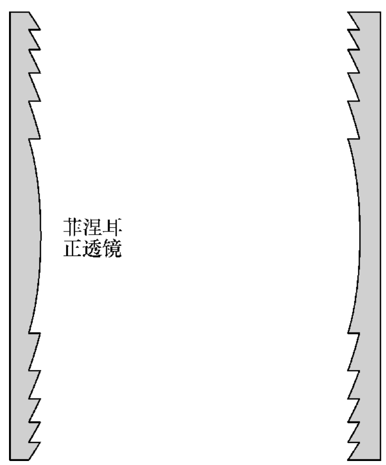


图11-41　菲涅耳正透镜和负透镜

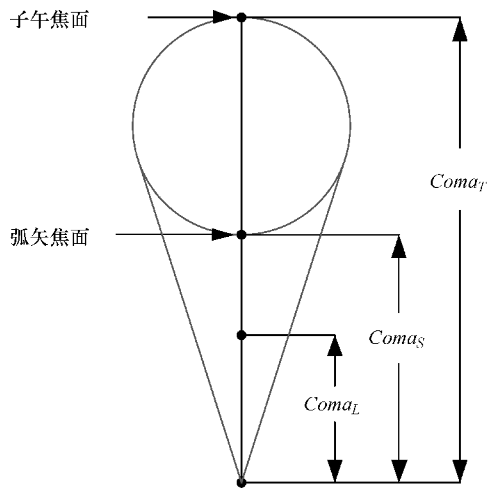


图11-42　菲涅耳透镜中的线性彗差

普通透镜和菲涅耳透镜之间存在一个非常重要的区别。假设普通透镜中没有像差，那么将产生一个球面波前，如图11-43a所示。然而，对菲涅耳透镜，一般情况下会产生一个随机的环形阶梯式的波前，如图11-43b所示。原因是折射光线方向由槽的斜率控制，但是厚度并不能以需要的精度控制。要产生一个完美的球面折射波前，每一个环形上的厚度必须是波长的整数倍。这种波前阶跃的影响是理论分辨率比相同口径的普通透镜要低。

可以制造出产生连续球面波前或者平面波前的小的菲涅耳透镜。这种透镜的制造方

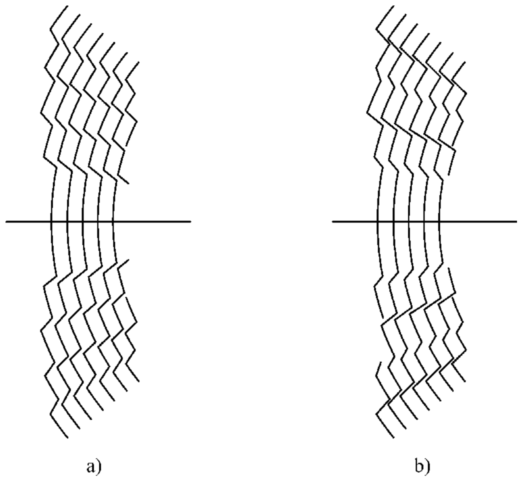


图 11-43　相干与非相干菲涅耳透镜中的波前
a）相干　b）非相干

法和普通菲涅耳透镜的完全不同，甚至得到一个不同的名字。它们被称为伽柏平板，相位衍射照片，或者，一般叫作衍射光学元件。这种元件可以产生非常高的衍射效率。

参考文献

[1] Coulman, C. E. and Petrie, G. R., "Some Notes on the Designing of Aspherical Magnifiers for Binocular Vision," *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 612 - 613 (1949).

[2] Cox, A., *A System of Optical Design*, Focal Press, New York (1964).

[3] Delano, E., "Primary Aberrations of Fresnel Lenses," *J. Opt. Soc. Am.*, **64**, 459 - 468 (1974).

[4] Delano, E., "Primary Aberrations of Meniscus Fresnel Lenses," *J. Opt. Soc. Am.*, **66**, 1317 - 1320 (1976).

[5] Delano, E., "Primary Aberration Contributions for Curved Fresnel Surfaces," *J. Opt. Soc. Am.*, **68**, 1306 - 1309 (1978).

[6] Delano, E., "Stigmats Using Two Fresnel Surfaces," *Appl. Opt.*, **18**, 4187 - 4190 (1979).

[7] Delano, E., "Stop and Conjugate Shift for Systems of Curved Fresnel Surfaces," *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 1828 - 1831 (1983).

[8] Fulcher, G. S., "Telescope Objective without Spherical Aberration for Large Apertures, Consisting of Four Crown Glass Lenses," *J. Opt. Soc. Am.*, **37**, 47 - 54 (1947).

[9] Gómez - Vieyra, A. and Malacara - Hernandez, D., "Methodology for Third Order Astigmatism Compensation in Off - Axis Spherical Reflective System," *Appl. Opt.*, **50**, 1057 - 1064 (2011).

[10] Gross, H., ed., *Handbook of Optical Systems*: *Vol.* 2, *Physical Image Formation*, Wiley - VCH, Weinheim (2007).

[11] Hilbert, R. S. and Rodgers, J. M., "Optical Design Issues in Electro – Optical Systems Integration," *Proc. SPIE*, **762**, 1 – 18 (1987).

[12] Hopkins, R. E., "Aspheric Corrector Plates for Magnifiers," *J. Opt. Soc. Am.*, **36**, 604 – 610 (1946).

[13] Hopkins, R. E., "Telescope Doublets," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 200 – 201 (1959).

[14] Hopkins, R. E., "Telescope Objectives," in *Military Standarization Handbook*: *Optical Design*, *MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962a).

[15] Hopkins, R. E., "Lens Relay Systems," in *Military Standarization Handbook*: *Optical Design*, *MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962b).

[16] Hopkins, R. E., "Geometrical Optics," in *Methods of Experimental Physics*, *Geometrical and Instrumental Optics*, Vol. 25, D. Malacara, ed., Academic Press, San Diego, CA (1988).

[17] Hopkins, R. E. and Lauroesch, T., "Automatic Design of Telescope Design," *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 992 (1955).

[18] Kidger, M. J., *Intermediate Optical Design*, SPIE Press, Bellingham, WA (2004).

[19] Kingslake, R., *Lens Design Fundamentals*, Academic Press, San Diego, CA (1978).

[20] Kingslake, R. an Johnson, R. B., *Lens Design Fundamentals*, Second Ed. Academic Press, SPIE, Burlington, VA (2010).

[21] Korones, H. D. and Hopkins, R. E., "Some Effects of Glass Choice in Telescope Doublets," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 869 – 871 (1959).

[22] Laikin, M., *Lens Design*, Marcel Dekker, New York (1990).

[23] Malacara, D., "Two Lenses to Collimate Red Laser Light," *Appl. Opt.*, **4**, 1952 – 1955 (1965).

[24] Mejía – Barbosa, Y. and Malacara – Hernández, D., "Object Surface for Applying a Modified Hartmann Test to Measure Corneal Topography," *Appl. Opt.*, **40**, 5778 – 5786 (2001).

[25] Nishihara, H. and Suhara, T., "Micro Fresnel Lenses," in *Progress in Optics*, Vol. XXIV, E. Wolf, ed., North Holland, Amsterdam (1987).

[26] Ray, S. F., *Applied Photographic Optics*, Focal Press, Oxford (2002).

[27] Rogers, P. J., "Biocular Magnifiers — A Review," *Proc. SPIE*, **554**, 362 – 370 (1985).

[28] Rosin, S., "A New Thin Lens Form," *J. Opt. Soc. An.*, **42**, 451 – 455 (1952).

[29] Rosin, S., "Eyepieces and Magnifiers," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. III, R. Kingslake, ed., Academic Press, San Diego, CA (1965).

[30] Sasian, J. M., "How to Approach the Design of a Bilateral Symmetric Optical System," *Opt. Eng.*, **33**, 2045 – 2061 (1994).

[31] Smith, W. J. and Genesee Optics Software, Inc., *Modern Lens Design. A Resource Manual*, McGraw – Hill, New York (1992).

第 12 章　复杂摄影镜头

12.1　引言

19 世纪末以来，人们设计出许多有趣的摄影镜头。这里我们只介绍其中的一部分，但是读者可以去查阅 Kingslake（1946，1963，1989）、Ray（2002）以及 Smith（2006）的富有趣味的书。其他的信息也可以从 Betensky（1980）和 Cook（1965）的文章中找到。Aklin（1948）详细地描述了一般情况下摄影镜头的玻璃选择需要考虑的一些问题。从历史的角度来看，这里描述的系统是相当重要的，而且大多数设计都能从这些基本的形式中推导出来。然而，计算机出现以后，一些更精密、更复杂、更好的系统也随之发展起来。Wöltche（1993）描述了一些此类系统。

为了对大视场生成好的像，大多数摄影镜头都已消过像散。当一个镜头无像散且像面呈平面时，就称这个镜头为消像散镜头。为了设计一个消像散透镜系统，必须要有非常低的佩兹伐和，这只有在独立元件（薄透镜或表面）的屈光度之和为零时才有可能。这个条件可以由正负元件之间添加一个大的间隔来满足。空中摄影镜头在一个大的视场内都要求有高的分辨率（Kingslake，1942，1947）。

在摄影相机中，胶片或光电图像探测器上的辐照度正比于入瞳直径的平方，反比于焦距（放大率）的平方。换句话说，摄影物镜的曝光速度反比于焦比 F/D 或 F 数的平方。摄影物镜的相对孔径一般由可变直径的光栏来改变，根据表 12-1 所示的两个系统（Kingslake，1945）中的任何一个，光栏直径可以以固定步长变化到任意想要的值。从一个步长到下一个步长，光栏面积改变两倍。

表 12-1　摄影物镜的 *F* 数 *FN*

寸制	米制
1.0	1.1
1.4	1.6
2.0	2.3
2.8	3.2
4.0	4.5
5.6	6.3
8.0	9.0
11.3	12.5
16.0	19.0
22.6	25.0
32.0	36.0
45.0	50.0

摄影相机中的图像探测器可以是胶片，或者CCD图像探测器（数码相机中）。一些最常见尺寸的探测器特性见表12-2。一个典型的视场尺寸35mm、有效焦距50mm的物镜的成像平面对角线长43mm，这在矩形视场边角处对应的半视场角约22°。大焦距的物镜称作摄远镜头，更短焦距的称为广角镜头（Gardner和Washer，1948；Thorndike，1950）。给定传感器大小，为了找到与35mm胶片相机相当的等效焦距，镜头的焦距应该乘以乘数比，也叫作焦距转换系数。

表12-2　摄影镜头的典型像面探测器

像面探测器	画幅尺寸/mm	乘数比率	焦距/mm		
			广角镜	标准镜	摄远镜头
35mm film	36×24	1.0	28	50	80
APS－H（Canon）	28.7×19	1.3	22	40	64
APS－C（Nikon，Pentax，Sony）	23.6×15.7	1.5	18	33	55
APS－C（Canon）	22.2×14.8	1.6	17	31	50
Foveon（Sigma）	20.7×13.8	1.7	16	29	47
Four Thirds System	17.3×13	2.0	14	25	42
1/CX（Nikon）	13.2×8.8	2.7	10	18	30

12.2　不对称系统

人们已经设计出了许多不同形式的不对称去像散透镜。这里将描述一些更重要更有意思的不对称镜头。

12.2.1　佩兹伐镜头

佩兹伐镜头是系统地（不是凭经验）设计出来的最古老摄影镜头之一。这种镜头包括两个消色差的双胶合透镜，这两个透镜之间存在光阑。起初的佩兹伐镜头于1839年被设计出来，相对孔径大约为$F/5$。在经典的形式中，子午面光线在每一个透镜中都被弯曲大约相同的量，这样折射量被分成近似相等的部分。一个有效焦距为F的系统，包含一个焦距为$f_a=2F$的前双胶合透镜，和一个焦距为$f_b=F$的后双胶合透镜，它们之间的间隔为$d=F$。系统后焦距$f_B=F/2$。在原始设计中，光阑被放置在这两部分之间。

由于两部分都有正的屈光度，所以佩兹伐和是非常大的。因此，为了产生平的子午场曲，必须引入一些像散。由于孔径光阑位于中间，前双胶合透镜有一个向后弯曲的子午场曲。可以证明，为了使这个子午场变平，后面的双胶合透镜必须有更低的屈光度。为了能够校正球差和彗差，同时也要有一个平的子午场，冕牌玻璃和火石玻璃必须有大的阿贝数之差。球差和彗差可以通过后双胶合透镜的两个元件的单独弯曲来校正。

多年来，原始设计有了许多重要的改进。其中一个例子就是1860年Dallmeyer设计的镜头，他通过反转后双胶合透镜的方向，将正透镜部分放在前面。光轴附近的像得到了改善，但像散更为严重。

最近对佩兹伐设计的修改是将光阑移到前双胶合透镜。由于这些镜头主要用于电影放映机中，将在第 17 章中介绍。佩兹伐镜头如图 12-1 所示，它的设计数据列在表 12-3 中，轴向、子午和弧矢像差曲线如图 12-2 所示。这里我们可以看出，子午像差曲线是一条直线，没有彗差，主要的残余像差就是像散。

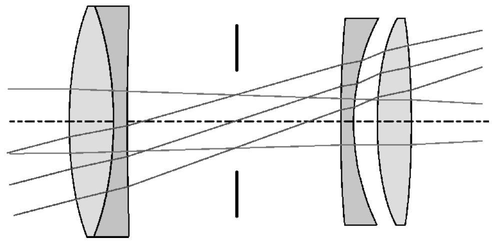


图 12-1 佩兹伐透镜

表 12-3 佩兹伐透镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
54. 0860	36. 0	7. 00	N – K5
–55. 9156	36. 0	2. 00	N – F2
598. 10	36. 0	16. 50	空气
Stop	8. 4	16. 50	空气
198. 3500	32. 0	2. 00	N – F2
36. 7541	32. 0	3. 60	空气
44. 3773	32. 0	5. 00	N – BK7
–83. 0216	32. 0	69. 35	空气

孔径（*F* 数）：10. 0mm（*F*/10. 0）。

焦距：100. 0mm。

后工作距离：69. 35mm。

物距：无穷远。

像高（半视场角）：26. 8mm（15°）。

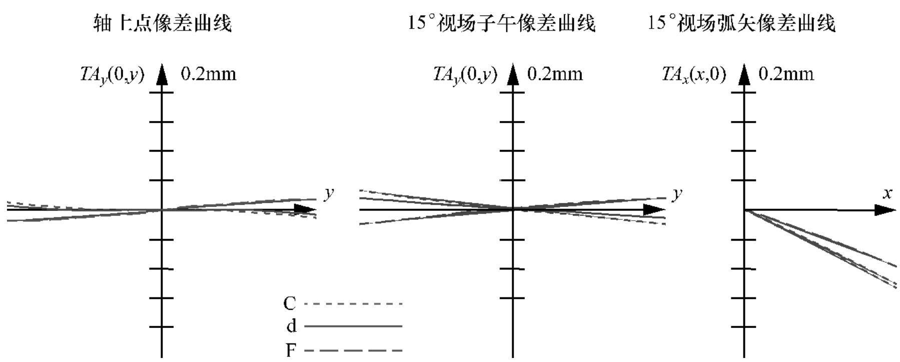


图 12-2 佩兹伐透镜的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

12. 2. 2 远摄镜头

远摄镜头有两个基本的单元：前面一个正透镜，后面一个负透镜。系统的有效焦距比它的总长度（从前透镜到焦平面）要更大。这种系统被用于满足紧凑系统的需要，这种紧凑是与它的焦距相比较而言的。长焦镜头等效于卡塞格林望远镜。远摄比定义为系统的总长度与有效焦距的比值，如下所示：

$$k=\frac{t+F_B}{F} \tag{12-1}$$

式中，t 是透镜间隔，F 是有效焦距，F_B 是后焦距。那么，前一单元的焦距可以写为

$$f_a=\frac{Fd}{F(1-k)+d} \tag{12-2}$$

第二单元的焦距为

$$f_b=\frac{(f_a-d)(kF-d)}{(f_a-kF)} \tag{12-3}$$

远摄比的典型值在 0.8 左右。

远摄镜头设计的常见问题就是存在畸变，但是按照 Kazamaki 和 Kondo 描述的，畸变是可以被减小的。由 Kingslake 设计，Hopkins 修改，Smith 和 Genesee 光学软件（1992）发布的一款远摄镜头已经经过我们重新设计，如表 12-4 和图 12-3 所示，它的像差如图 12-4 所示。

表 12-4　远摄镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
25.4974	22.0	5.0	N－BK7
－45.1544	22.0	2.0	N－F2
159.4354	22.0	12.3	空气
光阑	13.2	21.7	空气
－13.1599	14.0	2.0	N－BK7
－17.1417	14.0	4.0	N－F2
－18.6537	14.0	42.72	空气

孔径（F 数）：17.86mm（$F/5.6$）。
焦距：100.0mm。
后工作距离：42.72mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：7.33mm（4.19°）。

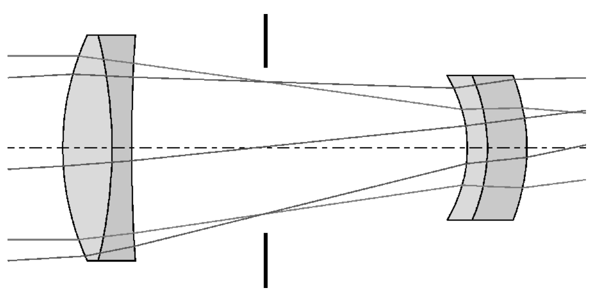


图 12-3　远摄透镜

反向远摄镜头通常被用于获得广角视场。当视场非常大的时候，这种镜头有时就称为鱼眼镜头。系统的强畸变可以通过在负透镜单元的前面引入一个正透镜来加以补偿。

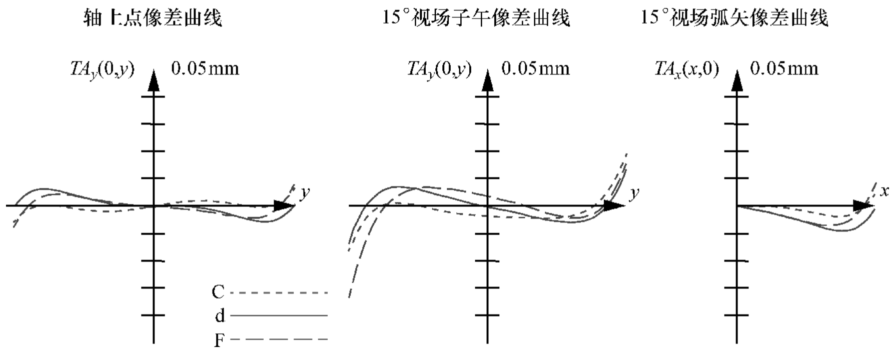


图 12-4　远摄透镜的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

这些镜头都有这种特性，它们的后焦距比有效焦距更长，这在某些应用中是有用的。

12.2.3　库克（Cooke）三片式镜头

工作于英国约克 Cooke and Sons 公司的 H. Dennis Taylor 于 1893 年发明了这个著名的设计。这个系统拥有足够的自由度来校正所有的 7 个初级像差以及获得想要的焦距。8 个自由度分别为 3 个焦距，3 个透镜弯曲以及 2 个空气间隔。为了达成他的设计，泰勒推理了以下几点：

1）为了使得佩兹伐和为零，元件的屈光度之和必须为零。

2）为了有低的畸变以及校正倍率色差，系统必须是近乎对称的。那么，可能的解决方案就是两个正透镜之间加一个负透镜，或者两个负透镜之间加一个正透镜。后来，他意识到第一个解决方案会有更好的像差校正。

3）为了校正轴向色差，中心的负透镜用火石玻璃制作，两个正透镜用冕牌玻璃制作。

对于这个系统，为了找到薄透镜解，我们将光阑放在负透镜处，然后我们使用 5 个变量，3 个透镜屈光度以及 2 个间隔，来解 5 个条件。这 5 个条件必须与透镜弯曲调整无关。下一步就是用 3 个弯曲来校正剩余的 3 个条件。系统的有效焦距、轴向色差、倍率色差以及佩兹伐曲率都与弯曲无关。与弯曲相关的 4 个条件分别是球差、彗差、像散以及畸变。

因此，焦距（3 个）和间隔（2 个）可以用 4 个与透镜弯曲调整无关的参数，外加另一个可以是透镜间隔比或者两个正透镜屈光度比的参数来确定。

接下来，要求出透镜弯曲，以校正球差、彗差以及像散。然后，我们计算畸变，如果它是不可接受的，就重复设计过程，选择一个新的间隔比或者两个正透镜的屈光度比。

当计算厚透镜的初级像差时，薄透镜近似可能带来一些误差。这个误差可以通过在薄透镜计算中将初级像差值设置为一些小的（非零）值来加以补偿。最好的目标值可以通过反复试验来获得，直到实际的像差变为零。

Conrady（1960），Cruickshank（1958，1960），Smith（1950）和 Stephens（1948）

具体地描述了库克三片式镜头的设计技术。从等式（3-5），我们可以发现透镜系统的总屈光度为

$$P = P_1 + \frac{y_2}{y_1}P_2 + \frac{y_3}{y_1}P_3 \tag{12-4}$$

如果像散为零，佩兹伐表面必须是平的。然而，Sharma 和 Rama Gopal（1982）指出，在初始设计中，假定一个小的非零残留值往往会更好。但是，从式（6-29），假设佩兹伐表面是平的，我们可以得到

$$\frac{P_1}{n_1} + \frac{P_2}{n_2} + \frac{P_3}{n_3} = 0 \tag{12-5}$$

从式（4-24），横轴色差可以写为

$$AchrT = \frac{1}{Py_1}\left(\frac{y_1^2 P_1}{V_1} + \frac{y_2^2 P_2}{V_2} + \frac{y_3^2 P_3}{V_3}\right) \tag{12-6}$$

从式（4-72），倍率色差为

$$Mchr = \frac{1}{Py_1}\left(\frac{y_1\ \bar{y}_1 P_1}{V_1} + \frac{y_2\ \bar{y}_2 P_2}{V_2} + \frac{y_3\ \bar{y}_3 P_3}{V_3}\right) \tag{12-7}$$

我们很方便地定义由前两个元件组成的系统的屈光度，如下所示：

$$\phi = P_1 + \frac{y_2}{y_1}P_2 \tag{12-8}$$

假设我们现在已经凭经验选择好了玻璃。三片式镜头（三合透镜）中玻璃的选择问题 Lessing（1958，1959a，1959b）已经研究过。然后，从等式（12-5），第一和第三块透镜采用同样的玻璃，我们发现，如果佩兹伐表面是平的，那么

$$P_1 + \frac{n_1}{n_2}P_2 + P_3 = 0 \tag{12-9}$$

如果横轴色差等于零，从式（12-6），我们有

$$P_1 + \frac{V_1}{V_2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 P_2 + \left(\frac{y_3}{y_1}\right)^2 P_3 = 0 \tag{12-10}$$

从式（12-7），如果倍率色差也等于零，则

$$P_1 + \left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\left(\frac{\bar{y}_2}{\bar{y}_1}\right)P_2 + \left(\frac{y_3}{y_1}\right)\left(\frac{\bar{y}_3}{\bar{y}_1}\right)P_3 = 0 \tag{12-11}$$

通过观察图 12-5，并假设光阑与中间透镜接触（$\bar{y}_2 = 0$），我们可以看到

$$\bar{y}_3 = -\frac{d_2}{d_1}\bar{y}_1 \tag{12-12}$$

因此，用这个表达式以及 $\bar{y}_2 = 0$，我们可以将等式（12-11）改写为

$$P_1 - \left(\frac{y_3}{y_1}\right)\left(\frac{d_2}{d_1}\right)P_3 = 0 \tag{12-13}$$

从图 12-5，我们可以得到

$$\frac{y_2}{y_1} = 1 - d_1 P_1 \tag{12-14}$$

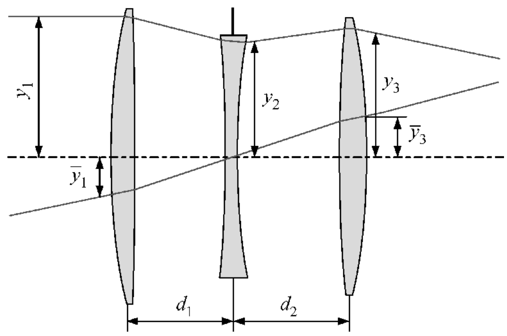


图 12-5　Cooke 三片式透镜的一些参数

类似地，假设 ϕ 是由前两个透镜组成的系统的屈光度，我们有

$$\frac{y_3}{y_1}=\frac{y_2}{y_1}-d_2\phi \tag{12-15}$$

从式（12-14）和式（12-15）替换 y_2/y_1 和 y_3/y_1 带入到式（12-4）、式（12-8）、式（12-9）、式（12-10）和式（12-13）之后，我们得到带 5 个未知量即 P_1、P_2、P_3、d_1、d_2 的 5 个等式。屈光度 ϕ 被当作一个常量，分配给它一个试探性的值。求解系统的五个等式不是那么简单的。

人们提出了几种求解这个方程组的方法。这里使用 Cruickshank（1958，1960）描述的求解方法。透镜屈光度和间距的解将由这个比值 y_2/y_1 表示这一项中。然后，一个二次方程将确定这个比值。首先，我们可以从等式（12-4）和式（12-8）得到

$$P-\phi=\left(\frac{y_3}{y_1}\right)P_3 \tag{12-16}$$

然后，从等式（12-14），第一个透镜间距 d_1 的值为

$$d_1=\frac{1-(y_2/y_1)}{P_1} \tag{12-17}$$

从式（12-13）、式（12-14）和式（12-16），第二个透镜间距 d_2 的值为

$$d_2=\frac{1-(y_2/y_1)}{P-\phi} \tag{12-18}$$

现在来求透镜屈光度，从式（12-15）和式（12-18），我们有

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)P-(P-\phi)\left(\frac{y_3}{y_1}\right)=\phi \tag{12-19}$$

另一方面，从式（12-8）、式（12-10）和式（12-16）：

$$\phi=P_2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)\left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right]-(P-\phi)\left(\frac{y_3}{y_1}\right) \tag{12-20}$$

然后，第二个透镜的屈光度可以从等式（12-19）和式（12-20）求出

$$P_2=\frac{P}{1-(V_1/V_2)(y_2/y_1)} \tag{12-21}$$

第三个透镜的屈光度可以从式（12-16）和式（12-19）求得

$$P_3=\frac{(P-\phi)^2}{(y_2/y_1)P-\phi} \tag{12-22}$$

最后，从式（12-8）和式（12-21），第一个透镜的屈光度为

$$P_1=\phi-\left(\frac{y_2}{y_1}\right)P_2 \tag{12-23}$$

现在最后一步是推导一个允许我们计算比值 y_2/y_1 的表达式。将等式（12-21）、式（12-22）和式（12-23）中透镜的屈光度值带入到等式（12-19），我们得到一个二次方程：

$$B_2\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 + B_1\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + B_0 = 0 \tag{12-24}$$

式中

$$B_2 = P + \phi\left(\frac{y_2}{y_1}\right) \tag{12-25}$$

$$B_1 = P\left[\left(\frac{y_2}{y_1}\right) - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)\right] - 2\phi\left[1 + \left(\frac{y_2}{y_1}\right)\right] \tag{12-26}$$

$$B_0 = \phi\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right) + 2\right] - P \tag{12-27}$$

二次方程的解得到之后，选择两个正透镜之间加入一个负透镜的方案中，三个透镜的屈光度和两个间距很容易求得。

下一步就是通过调整透镜弯曲来校正球差、彗差和像散。然后计算畸变。如果畸变不为零，则给屈光度 ϕ 赋予新的值，整个过程交替重复，直到畸变为零。Hopkins（1962）和 Wallin（1964）对库克三片式镜头做了完整的三阶、五阶分析。

我们要重视这一点，对于一个大中型孔径的三片式镜头，所有的6个初级像差都完美校正了的话，那是不够的。一个好的设计会用一些初级像差来补偿高级像差。

图12-6表示一个库克三片式镜头，数据列在表12-5中。透镜的像差图如图12-7所示。我们可以看到，倾斜的球差随视场角而增大。这是这个系统最重要的轴外像差。

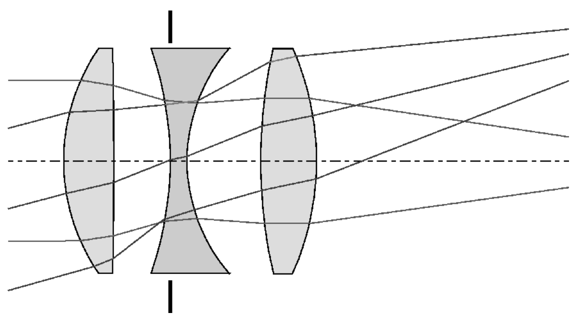


图12-6　库克三片式镜头

表12-5　库克三片式镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
34.94	40.0	5.0	N－SK4
－1164.00	40.0	2.0	空气
－60.369（光阑）	20.7	12.3	N－SF2
30.68	40.0	21.7	空气
－91.77	40.0	2.0	N－SK4
－49.08	40.0	4.0	空气

孔径（F数）：28.57mm（F/3.5）。
焦距：100.0mm。
后工作距离：75.98mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：26.79mm（15°）。

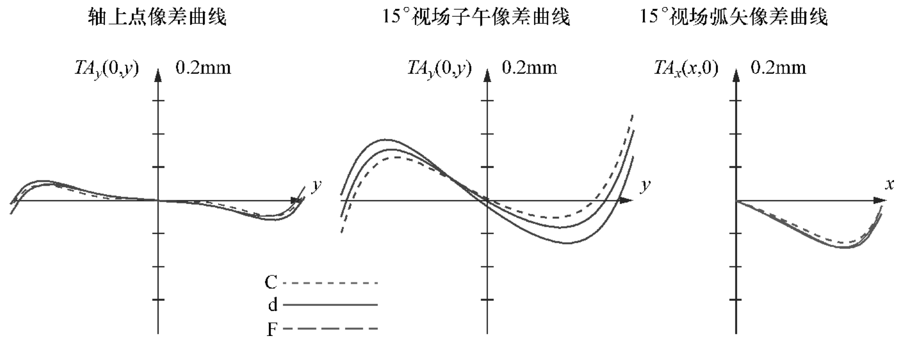


图 12-7　库克三片式镜头的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

12.2.4　天塞（Tessar）镜头

Tessar 镜头是 12.1 节中描述的对称双弯月面消像散透镜的改进形式。这种透镜由 Paul Rudolph 于 1902 年在蔡司光学公司设计出来。他命名这个设计为 Tessar，它源于希腊语 téssera，意思是四，因为这个设计有四块透镜。起初，这些透镜的最大相对孔径近于 *F*/6.3；现在，后续的设计已经得到 *F*/2.8 的相对孔径。

我们可以认为前面部分是空气间隔的双胶合透镜，后面部分是一个新的消色差透镜。因此，正如发明者们指出的那样，Tessar 镜头可以看作普塔（Protar）镜头的改型。但是它也可以看作 Cooke 三片式镜头的改型。以这个观点，只要将三合透镜中最后一个元件替换为双胶合透镜。双胶合透镜的负透镜部分比正透镜部分有更低的折射率和更大的色散。在这个系统中，玻璃的选择是尤其重要的。典型地，对于这种透镜，它的第一块和最后一块透镜所用玻璃为重钡冕牌玻璃，第二块为火石玻璃，第三块为轻火石玻璃。这种透镜相比三合透镜的小优势在于它有更小的带球差（在最大孔径 0.7 处的球差），在最大半视场角处也有更小的像散。在全视场，有明显的高阶彗差，但是球差曲线的斜率相当小。如果透镜的直径减小的话，高阶彗差的影响可以被减小，这样会引入渐晕，但是提高了成像质量，并可以将透镜做得更小。

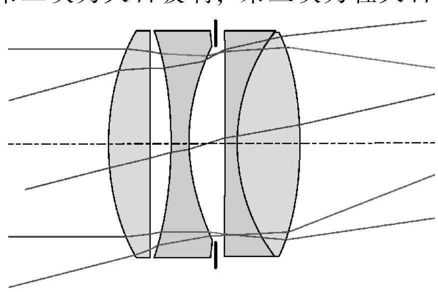


图 12-8　Tessar 镜头

图 12-8 表示 Tessar 镜头，设计数据列在表 12-6 中。

表 12-6　Tessar 镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔(中心厚度)/mm	介质
40.583	34.0	5.0	N－BaF10
791.539	34.0	3.5	空气
－53.424	34.0	2.5	N－F2
36.295	34.0	2.8	空气

（续）

曲率半径/mm	直径/mm	间隔(中心厚度)/mm	介质
光阑	26.1	2.8	空气
46342.000	34.0	2.0	LF5
29.206	34.0	9.5	N－BaF10
－39.333	34.0	99.4	空气

孔径（*F*数）：28.6mm（*F*/3.5）。

焦距：100.0mm。

后工作距离：99.4mm。

物距：无穷远。

像高（半视场角）：26.79mm（15.0°）。

12.3　对称去像散系统

许多去像散镜头都有一个关于光阑对称的结构，这样可以将彗差、畸变最小化，即使物体和像位置不对称，这里将描述的达戈（Dagor）镜头、分离镜头、双高斯镜头都是如此。另一个有趣的对称镜头是罗斯（Ross）镜头，它经常被使用在天体摄影中（Cornejo等，1970）。

12.3.1　Dagor镜头

Dagor镜头是最早的去像散镜头之一。这种镜头关于光阑对称或者几乎对称。风景镜头中，选择光阑和镜头弯曲来减小像散。有时候，设计的镜头要保证即使系统的一半被单独使用也能合理地工作。优点就是可以有两个不同的焦距，一个是整个系统的，另一个是半个系统的。如果这两半有不同的焦距，系统关于光阑就不完全对称，这就叫作半对称镜头。如果半对称镜头的每一半被单独使用，或者与另一半结合使用，那就可能有三个不同的焦距。像这样两个部分可以单独使用也可以作为一个完整系统的镜头被称为可组合的。

Dagor镜头中的两个玻璃－玻璃界面对佩兹伐和贡献很少，因为它们的屈光度很小。因此，两个外部表面就决定了焦距和佩兹伐和的大小。

三种玻璃是不一样的。将半个系统的中心负透镜分成两个部分，外面部分可以看作一个新的消色差镜头，里面的部分可以看作一个旧的消色差镜头。Smith（1958）对控制对称四元件消像差镜头设计中残余像差的方法做了研究。图12-9表示一个Dagor镜头，设计参数列在表12-7中。

图12-10和图12-11表示轴上、子午和弧矢像差曲线图。这里我们可以看到，如果物体是在无限远处，最重要的残余像差是彗差。另一方面，如果系统是完美对称的（放大率等于－1），那么彗差也完全被校正。然后，唯一剩余的像差就是像散，子午像面几乎是平的。

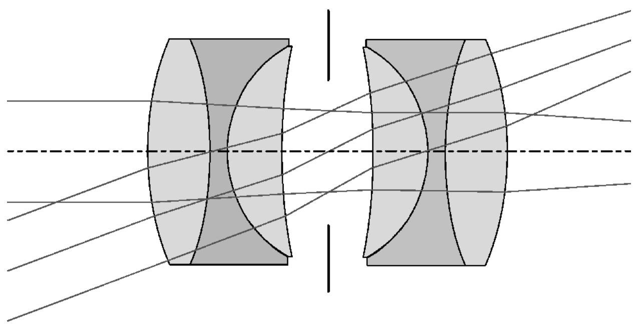


图 12-9　Dagor 镜头

表 12-7　Dagor 镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
36. 667	28. 0	8. 0	N－SK5
－38. 688	28. 0	2. 0	N－BaLF4
14. 699	26. 0	7. 0	N－K5
66. 740	26. 0	6. 0	空气
光阑	10. 0	6. 0	空气
－66. 740	26. 0	7. 0	N－K5
－14. 699	26. 0	2. 0	N－BaLF4
38. 688	28. 0	8. 0	N－SK5
－36. 668	28. 0	77. 99	空气

孔径（*F* 数）：12. 5mm（*F*/8. 0）。
焦距：100. 0mm。
后工作距离：77. 9mm（物在无穷远）。
像高（半视场角）：36. 4mm（20°）（物在无穷远）。
前、后工作距离（物像对称）：177. 98mm。
像高（mm）（半视场角）：72. 79mm（20°）（物像对称）。

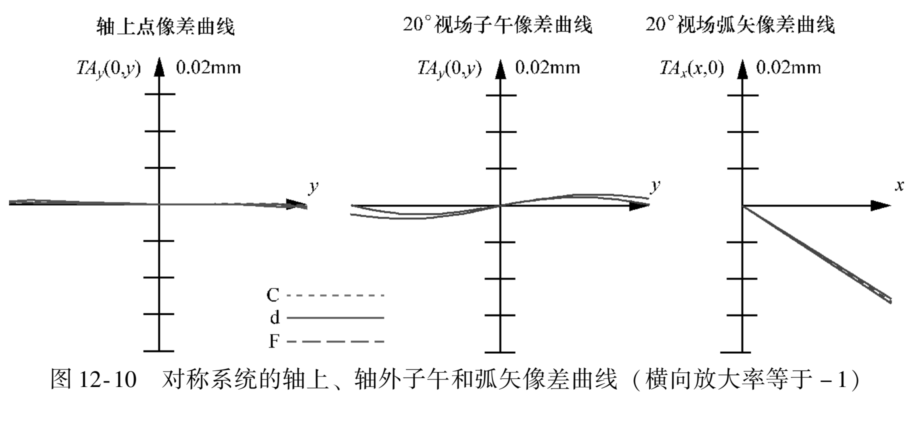


图 12-10　对称系统的轴上、轴外子午和弧矢像差曲线（横向放大率等于－1）

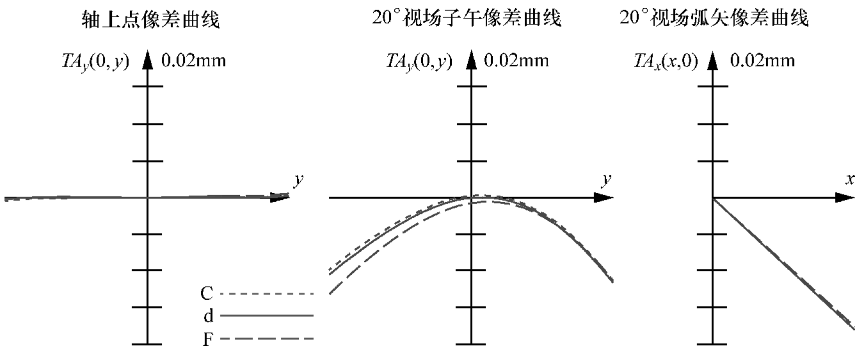


图 12-11　准对称系统的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线（物在无穷远）

12.3.2　分离镜头

这种镜头是一个由四个分离元件组成的系统，由 Goerz 和 von Höegh（1898）发明，如图 12-12 所示。起初它被命名为“双消像散 B 型 Goerz 镜头”，后来又称为“Celor”。Kingslake 和 Johnson（2010）在他们的书中对这种镜头有完整的描述，他们指出这些镜头相对孔径达 $F/3.5$，但是视场相对很小，半视场角接近 22°~24°。

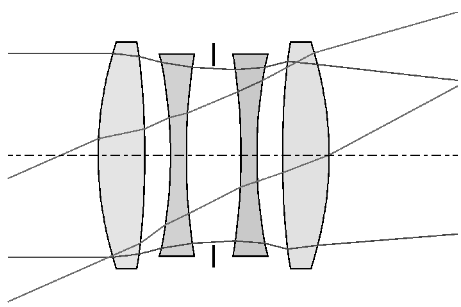


图 12-12　分离透镜

12.3.3　双高斯镜头

首先由 Karl Friedrich Gauss，后来由 Alvan G. Clark 于1988 年详细提出，带有两个弯月形部分的对称系统可以形成一个非常好的镜头设计。在两个正透镜之间有两个负透镜的对称镜头有 5 个自由度，即 2 个透镜屈光度，2 个弯曲，以及透镜之间的间距。这些变量被用于设置想要的焦距，并校正佩兹伐和、球差、轴向色差和像散。当两个半系统结合一起，反对称波前像差就可以被校正。

双高斯镜头可以看作三合透镜的改型，三合透镜中间的负透镜被分裂成两个透镜，它们中的每一个都是双胶合透镜。和 Tessar 镜头中后面的双胶合透镜一样，这个双胶合透镜的负透镜部分应该有更低的折射率和更高的色散。

为了定义透镜的屈光度和它们的间距，需要利用三个条件。从等式（3-5），我们可以发现，透镜系统总的屈光度为

$$P = P_1 + \frac{y_2}{y_1} P_2 \tag{12-28}$$

从等式（6-29），佩兹伐表面的曲率为

$$\frac{1}{r_{Ptz}} = -\frac{P_1}{n_1} - \frac{P_2}{n_2} \tag{12-29}$$

从等式（4-24），横轴色差可以写为

$$AchrT = \frac{1}{P y_1}\left(\frac{y_1^2 P_1}{V_1} + \frac{y_2^2 P_2}{V_2}\right) \tag{12-30}$$

从等式（12-28），光线高度 y_1 和 y_2 关系式为

$$y_2 = y_1 \frac{(P - P_1)}{P_2} \tag{12-31}$$

由于 y_1 是已知的，可以从这三个等式求解到两个透镜屈光度。然后，透镜间距可以从等式（3-45）得到，如下：

$$d = \frac{(P_1 + P_2 - P)}{P_2 P_1} \tag{12-32}$$

接下来就是求两个透镜的弯曲来校正球差和像散。对于这个系统，根据选择的玻璃不同，我们可以得到许多不同的解。

如果选择合适的玻璃，刚刚描述的系统就可以获得这种形状。这些玻璃在 $V-n$ 图上必须相隔很宽，例如，重火石玻璃和重钡冕牌玻璃。在最一般的情况下，物体位于无穷远处，这个设计可能不是精确的对称结构。

Kidger 和 Wynne（1967）对双高斯镜头做了一般性的研究和推导。双高斯等光程系统的数据列在表 12-8 中，双高斯透镜如图 12-13 所示。轴上、子午和弧矢像差曲线图如图 12-14 所示。

表 12-8　双高斯透镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
85.19	76.0	14.0	N - LaK10
166.44	76.0	1.0	空气
46.97	56.0	16.0	N - BaF10
128.67	56.0	4.0	N - LF5
28.45	34.0	10.0	空气
光阑	30.0	12.5	空气
-33.64	44.0	3.0	N - SF10
101.58	56.0	18.0	N - LaK10
-46.09	56.0	1.0	空气
128.54	64.0	12.0	N - LaK10
-115.30	64.0	76.4	空气

孔径（F 数）：35.71mm（$F/2.8$）。

焦距：100.0mm。

后工作距离：76.4mm。

物距：无穷远。

像高（半视场角）：26.8mm（15°）。

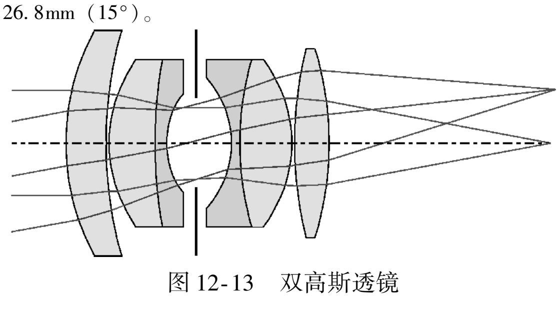


图 12-13　双高斯透镜

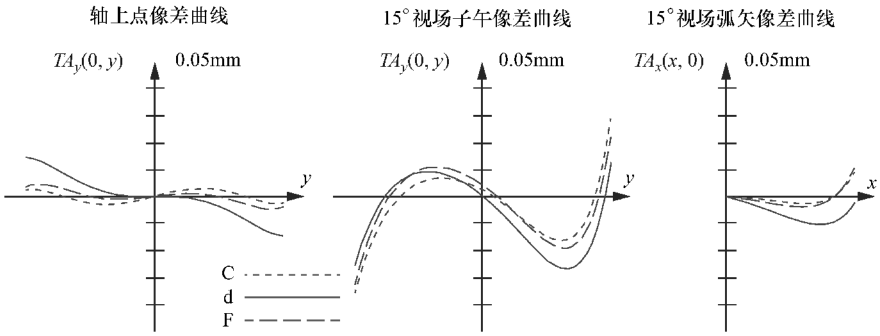


图 12-14　双高斯透镜的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

12.4　可变焦面镜头和变焦镜头

可变焦面镜头是有效焦距可变的镜头，但是每次变化之后焦点必须重新调整。这些镜头是有用的，例如，对于幻灯机。另外，变焦镜头也是有效焦距可以改变的镜头，但是当改变焦距的时候，镜头仍然保持清晰成像。这些镜头主要用于电影或电视摄影机。然而，过去这两种镜头都用变焦这个术语来命名。

人们对可变焦面镜头和变焦镜头已经进行了广泛研究，如 Back 和 Lowen（1954，1958），Bergstein（1958），Bergstein 和 Motz（1957，1962a，1962b，1962c），Clark（1973），Cook（1958），Kingslake（1960），Pegis 和 Peck（1962），以及 Wooters 和 Silvertooth（1965）。值得特别提出的是，Yamaji（1967）关于这个主题的一个完整章节以及 Mann（1993）的一本书中关于此方面的几页精彩节选。

当改变变焦镜头的放大率时，为了使焦平面相对于透镜座的位置不发生变化，系统必须加以补偿。焦点偏移可以通过光学或者机械方式来消除（补偿）。

变焦镜头的机械补偿通过同时移动系统中的两个透镜来执行，一个透镜用来改变焦距，另一个来维持像在固定平面上。一般地，这些移动相互之间是非线性的；因此，就需要一套复杂的齿轮或者凸轮。

当在变焦范围内至少有三个点有相同的焦平面（但是放大率不同）时，可以实现光学补偿。且这三个点之间的离焦量是小的。这种补偿需要三个成像过程，因此，如 Back 和 Lowen 所描述的那样，最少需要三个元件，如果不用三个而是四个透镜用来得到四个没有焦点偏移的点，这样得到的系统会更好。

有几种类型的变焦镜头，但是它们当中的大多数都是采用同样的基本原理来设计的。如图 12-15 所示的变焦镜头系统可以看作是由固定焦距的正常摄影镜头与一个在它前面有可变放大倍数（角放大率）的望远系统组成。这种最简单最基本的望远系统可以由两个焦距为 f_1 的正透镜和一个焦距为 f_2 的负透镜组成，如图 12-16 所示。负透镜屈光度的绝对值比正透镜的两倍还要大，以至于当它们相互接触的时候，整体的屈光度 F 是负的，绝对值比单独正透镜的还要高。从等式（3-46），这种透镜厚度为零的双胶

合透镜的屈光度由下式给出：

$$F = \frac{f_1 f_2}{f_1 + f_2} \tag{12-33}$$

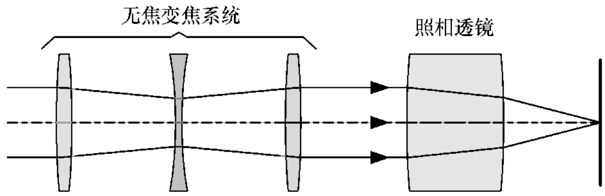


图 12-15　在固定焦距透镜前的无焦变焦透镜

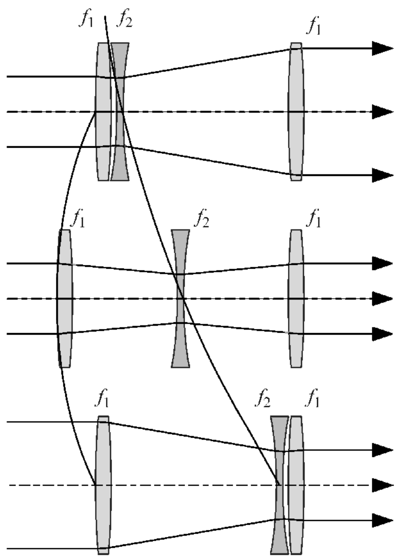


图 12-16　在无焦变焦透镜中的透镜移动

负透镜沿着光轴被放置在两个正透镜之间的位置。当负透镜与前面的正透镜相接触的时候，系统是放大倍数为 M_0 的伽利略望远镜，这个将在第 14 章中进行描述，放大倍数的表达式为

$$M_0 = -\frac{F}{f_1} \tag{12-34}$$

放大倍数是正的且小于 1，因为 F 是负数，绝对值小于 f_1。因此，将会产生一个直立缩小的像。当负透镜被移动到另外一个极端，与后面的正透镜相接触，角放大率则为 $1/M_0$，这个值是正的且大于 1。

由于伽利略望远镜是无焦的，两个正薄透镜之间的距离必须为

$$d = F + f_1 \tag{12-35}$$

从这两个表达式，我们发现正透镜的焦距 f_1 为

$$f_1 = \frac{d}{1 - M_0} \tag{12-36}$$

负透镜的焦距为

$$f_2 = -\frac{M_0 d}{1 - M_0^2} \tag{12-37}$$

因此，如果我们将负透镜移动到两个正透镜之间的位置，系统的放大倍数就在 M_0 和 $1/M_0$ 之间变化。但是，像仅仅聚焦在无穷远处，如图 12-17 所示。在中间位置，我们不得不利用前面透镜的微小平移来重新调整焦点位置。这就是所谓的机械补偿。现在让我们考虑图 12-18 中前面和中间的透镜。当负透镜被放置在离前面初始位置相距 ζ 的地方，前面的透镜必须移动一个小距离 η 来保持在焦点处成像。为保持虚像 P 在固定点位置，必须做这两个移动。那么，前面透镜和中间透镜的新间距为

$$\zeta = \eta + S \tag{12-38}$$

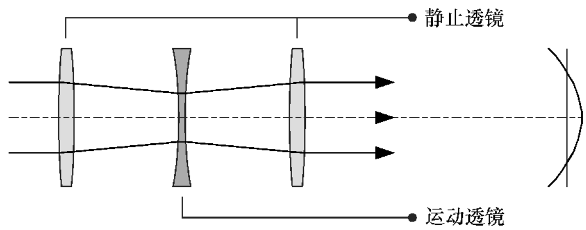


图 12-17　在三透镜无焦变焦系统中焦点位移

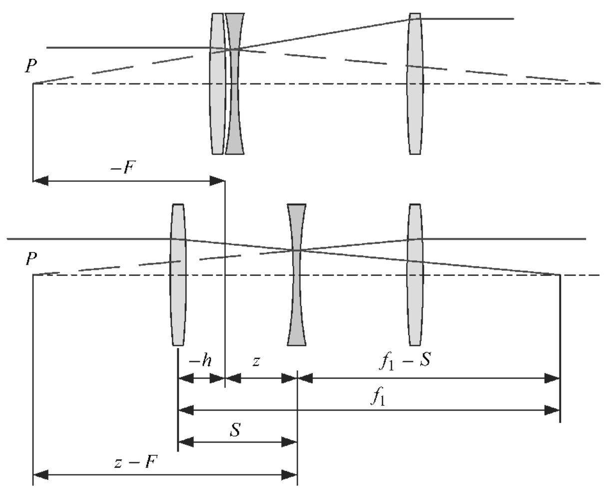


图 12-18　在三透镜无焦变焦系统中的一些参数和变量

对中间透镜使用等式（3-13），我们可得到

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F-\zeta}-\frac{1}{f_1-S} \tag{12-39}$$

从等式（12-38）替换 S 的值，经过一些代数运算，我们得到

$$\eta=\zeta\left[1-\frac{(f_1-f_2)^2}{f_1^2+(f_1+f_2)\zeta}\right] \tag{12-40}$$

写成最小放大倍数 M_0 的形式，式（12-40）变为

$$\eta=\zeta\left[1-\frac{d}{M_0^2 d+(1-M_0^2)\zeta}\right] \tag{12-41}$$

这个表达式给出了透镜位置 ζ 和 η 间的关系，但是对于给定的变焦放大率，我们不能计算出这些位置的值。通过等式（12-34）和式（3-46），可以求得中间负透镜任意位置的放大倍数 M 为

$$M=\frac{M_0 d}{d+(\eta-\zeta)(1-M_0^2)} \tag{12-42}$$

放大倍数等于 1 时的透镜位置为

$$\zeta_0=\frac{M_0 d}{1+M_0} \tag{12-43}$$

以及

$$\eta_0=\frac{1-M_0}{1+M_0}d \tag{12-44}$$

这也是 η 的最大值。

这个系统可以通过替换负透镜为两个负透镜之间放一个正透镜的形式来加以改进，如图 12-19 所示。当两个负透镜被放置到一个端点处，这个系统就与图 12-17 所示的系统一样是无焦的。因此，像在两个端点处很好地对焦。中间正透镜的屈光度是一个自由度，可以被用于满足当放大倍数为 1 时成像也对焦的条件。由于系统是对称的，所以焦点平移曲线也必须是对称的，如图 12-19 所示。因此，如果焦平面平移到虚线所示的位置，我们就有四个成像聚焦的位置。如果最大焦点偏移是可接受的，系统就不需要任何调焦凸轮，我们说系统有光学补偿。

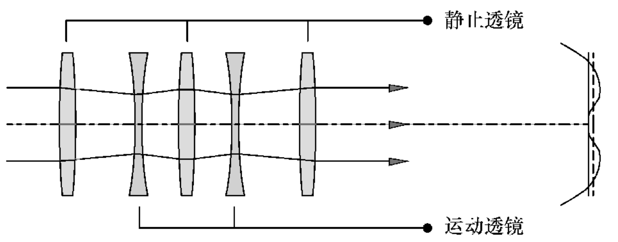


图 12-19　五透镜无焦变焦系统中的焦点位移

一般来说，如果无焦系统是像图 12-17 和图 12-19 中那样对称的，我们将 n 个交替正负对称的透镜移到一起，就有 $n+1$ 个焦点位置相同的不同的放大率。Bergstein

（1958）以及 Back 和 Lowen（1958）给出了预测相同聚焦点数目的变焦系统的一般理论。

我们描述过的变焦系统都是无焦点和对称的，是相对于焦平面固定的成像系统，如图 12-15 所示。如果我们的系统中包括最后的成像透镜，并将它相对于焦平面移动，那么变焦系统也可以是不对称的。不对称系统的一个例子如图 12-20 所示。Yamaji（1967）详细地描述了不同类型的变焦系统的演变。

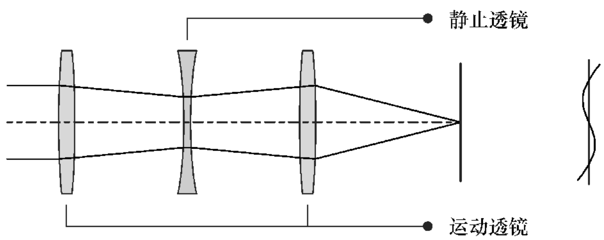


图 12-20　有两个能动透镜的三透镜有焦变焦系统

变焦系统中至少要对三个不同的焦点位置进行像差校正。这意味着我们必须校正三倍于定焦系统中的像差数。因此，我们需要更多的自由度，这就需要更多的元件数。

现代的变焦系统主要用于电视和电影摄影机，是极其复杂的，元件数超过了 15 个。

参考文献

[1] Aklin, G. H., "The Effect of High Index Glasses on the Field Characteristics of Photographic Objectives," *J. Opt. Soc. Am.*, **38**, 841－844 (1948).

[2] Back, F. G. and Lowen, H., "The Basic Theory of Varifocal Lenses with Linear Movement and Optical Compensation," *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 684－691 (1954).

[3] Back, F. G. and Lowen, H., "Generalized Theory of Optically Compensated Varifocal Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 154－171 (1958).

[4] Bergstein, L., "General Theory of Optically Compensated Varifocal Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 154－171 (1958).

[5] Bergstein, L. and Motz, L., "Third Order Aberration Theory for Varifocal Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 579－593 (1957).

[6] Bergstein, L. and Motz, L., "Two Component Optically Compensated Varifocal System," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 353－362 (1962a).

[7] Bergstein, L. and Motz, L., "Three Component Optically Compensated Varifocal System," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 363－375 (1962b).

[8] Bergstein, L. and Motz, L., "Four Component Optically Compensated Varifocal System," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 376－388 (1962c).

[9] Betensky, E. I., "Photographic Lenses," in *Applied Optics and Optical Engineering*, R. R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Vol. Ⅷ, Chap. 1, Academic Press, San Diego, CA (1980).

[10] Clark, A. D., *Zoom Lenses*, *Monographs on Applied Optics No. 7*, Adam Hilger, London (1973).

[11] Conrady, A. E. , *Applied Optics and Optical Design*, Part Two, Dover Publications, New York, (1960) .

[12] Cook, G. H. , "Television Zoom Lenses," *J. Soc. Mot. Pic. Tel. Eng.* , **68**, 25 – 28 (1958) .

[13] Cook, G. H. , " Photographic Objectives," in *Applied Optics and Optical Engineering*, R. Kingslake, ed. , Vol. Ⅲ, Chap. 3, Academic Press, San Diego, CA (1965) .

[14] Cornejo, A. , Castro, J. , and Malacara, D. , "Note on the Design of Two Ross Type Photographic Objectives," *Boletin de los Observatorios de Tonantzintla y Tacubaya*, **5**, 241 – 245 (1970) .

[15] Cruickshank, F. D. , "The Design of Photographic Objectives of the Triplet Family. Ⅰ: The Design of the Triplet Type 111 Objective," *Aust. J. Phys.* , **11**, 41 – 54 (1958) .

[16] Cruickshank, F. D. , "The Design of Photographic Objectives of the Triplet Family. Ⅱ: Initial Design of Compound Triplet Systems," *Aust. J. Phys.* , **13**, 27 – 42 (1960) .

[17] Gardner, L. and Washer, D. S. , "Lenses of Extremely Wide Angle for Airplane Mapping," *J. Opt. Soc. Am.* , **38**, 421 – 431 (1948) .

[18] Goerz, C. P. and von Höegh, E. , V. S, Patent 635, 472, filed July (1898).

[19] Hopkins, R. E. , "Third Order and Fifth Order Analysis of the Triplet," *J. Opt. Soc. Am.* , 52, 389 – 394 (1962) .

[20] Kazamaki, T. and Kondo, F. ,"New Series of Distortionless Telephoto Lenses," *J. Opt. Soc. Am.* , **46**, 22 – 31 (1956) .

[21] Kidger, M. J. and Wynne, C. G. , "The Design of Double Gauss Systems Using Digital Computers," *Appl. Opt.* , **6**, 553 – 563 (1967) .

[22] Kingslake, R. , "Lenses for Aerial Photography," *J. Opt. Soc. Am.* , **32**, 129 – 134 (1942) .

[23] Kingslake, R. , "The Effective Aperture of a Photographic Objective," *J. Opt. Soc. Am.* , **35**, 518 – 520 (1945) .

[24] Kingslake, R. , "A Classification of Photographic Lens Types," *J. Opt. Soc. Am.* , **35**, 251 – 255 (1946) .

[25] Kingslake, R. , "Recent Developments in Lenses for Aerial Photography," *J. Opt. Soc. Am.* , **37**, 1 – 9 (1947) .

[26] Kingslake, R. , "The Development of the Zoom Lens," *J. Soc. Mot. Pic. Tel. Eng.* , **69**, 534 – 544 (1960) .

[27] Kingslake, R. , *Lenses in Photography*, Barnes, New York (1963) .

[28] Kingslake, R. , *A History of the Photographic Lens*, Academic Press, New York (1989) .

[29] Kingslake, R. and Johnson, R. B. , *Lens Design Fundamentals*, Second Edition, SPIE Press, Bellingham, WA (2010) .

[30] Lessing, N. V. D. W. , "Selection of Optical Glasses in Taylor Triplets (Special Method)," *J. Opt. Soc. Am.* , **48**, 558 – 562 (1958) .

[31] Lessing, N. V. D. W. , "Selection of Optical Glasses in Taylor Triplets (General Method)," *J. Opt. Soc. Am.* , **49**, 31 – 34 (1959a) .

[32] Lessing, N. V. D. W. , "Selection of Optical Glasses in Taylor Triplets with Residual Chromatic

Aberration," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 872–877 (1959b).

[33] Mann, A., ed., *Selected Papers on Zoom lenses*, SPIE Press, Bellingham, WA (1993).

[34] Pegis, R. J. and Peck, W. G., "First–Order Design Theory for Linearly Compensated Zoom Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 905–911 (1962).

[35] Ray, S. F., *Applied Photographic Optics*, Focal Press, Oxford (2002).

[36] Sharma, K. D. and Rama Gopal, S. V., "Significance of Petzval Curvature in Triplet Design," *Appl. Opt.*, **21**, 4439–4442 (1982).

[37] Smith, F. W., "Comment on Design of Triplet Anastigmat Lenses of the Taylor Type," *J. Opt. Soc. Am.*, **40**, 406–407 (1950).

[38] Smith, G. H., *Camera Lenses, From Box Camera to Digital*, SPIE Press, Bellingham, WA (2006).

[39] Smith, W. J., "Control of Residual Aberrations in the Design of Anastigmat Objectives," *J. Opt. Soc. Am.*, **48**, 98–105 (1958).

[40] Smith, W. J. and Genesee Optics Software, Inc., *Modern Lens Design. A Resource Manual*, McGraw–Hill, New York (1992).

[41] Stephens, R. E., "Design of Triplet Anastigmat Lenses of the Taylor Type," *J. Opt. Soc. Am.*, **38**, 1032–1039 (1948).

[42] Thorndike, E. M., "A Wide Angle, Underwater Camera Lens," *J. Opt. Soc. Am.*, **40**, 823–824 (1950).

[43] Wallin, W., "Design Study of Air Spaced Triplets," *Appl. Opt.*, **3**, 421–426 (1964).

[44] Wöltche, W., "Major Landmarks from the Century of Anastigmatic Lens Design," *Opt. Eng.*, **32**, 1740–1749 (1993).

[45] Wooters, G. and Silvertooth, E. W., "Optically Compensated Zoom Lens," *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 347–351 (1965).

[46] Yamaji, K., "Design of Zoom Lenses," in *Progress in Optics*, Vol. VI, E. Wolf, ed., North Holland, Amsterdam (1967).

第 13 章　人眼和眼镜

13.1　人眼

人眼的第一次重要研究是由 Helmholtz 在他的书“Handbuch der Physiologischen Optik”中描述的。19 世纪末，人眼的研究在 Gullstrand 工作的基础上继续着。人眼的结构图如图 13-1 所示，它的主要光学常数列在表 13-1 中。眼睛最重要的光学组成部分如下：

眼角膜——这是眼球正前方的透明组织。它的理想形状近似球形，有 43D 的屈光力。任何与它理想形状的偏离都会产生折射误差。如果它呈螺旋状，沿两条相互垂直的直径有不同的曲率，就会出现角膜散光。如果垂直径上的曲率比水平径上的更大，散光就会出现，反之亦然。中心一个小的凸起导致角膜呈现近似圆锥状，是一种叫作圆锥形角膜的缺陷。这些缺陷用屈光计或者角膜地形图检测仪来测量。

瞳孔——这是眼球前面的圆形缺口，它被虹膜所包围。瞳孔通过增大或减小它的直径来控制眼睛的通光量。瞳孔的最大直径出现在低照度级（完全黑夜），大约 8mm，最小直径出现在高照度级（晴天），大约 1.5mm。它的平均直径为 3 ~ 4mm（照明良好的办公室）。

水状体——这是角膜后方与晶状体之间的液体。

眼睛——这是个柔性的透镜，也叫作晶状体，它的光学屈光度通过睫状肌来调节。它通过增加屈光度（适应度）来聚焦附近的物体，通过放松它的形状来聚焦远处的物体。这个透镜的中心比外部有更高的折射率。放松的晶状体有大约 15D 的屈光力，小孩能增加（调节幅度）约 15D，而老人能增加约 0.5D。晶状体会因许多原因失去它的透明性，患上所谓的白内障。为了治疗这种情况，晶状体不得不被去除，通常植入塑料透镜来替换晶状体。

玻璃体——这是填充眼球大部分的液体，位于晶状体和视网膜之间。有时，主要在中高度近视的眼睛中，小颗粒漂浮在这种介质中，会产生一些看似飘浮在空中的小图像。

视网膜——这是眼睛的感光表面，图像就成像在这上面。眼睛的视网膜由几层构成。最里面的一层与玻璃体相接触，由细胞和神经纤维组成，而最后一层是感光元件，由杆细胞和锥细胞组成。视神经进入眼球的区域会产生一个盲区，这个区域角直径接近于 5° ~ 7°，离鼻侧光轴 15°。视网膜的中央凹是靠近光轴的一个小区域，这里的视网膜变得更薄，且没有血管。它只包含在一个密集的随机阵列锥细胞当中。在它的外部，主要的感光元件是杆细胞，杆细胞主要负责暗视觉。与锥细胞相比，杆细胞对亮度更为敏

感，但是它们对颜色不敏感，有非常低的空间分辨率。使用自适应光学技术，David Williams 与来自罗切斯特大学的合作者已经能够从活生命体获得直径约 5μm 的锥细胞像（Liang 和 Williams，1997；Williams，1999）。

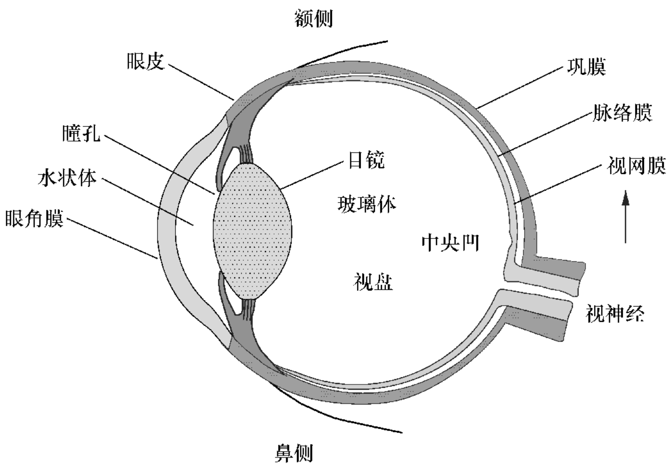


图 13-1　人眼的结构简图（有彩色插图）

表 13-1　人眼的光学常数

总长		24.75mm
入瞳直径		1.5～8.0mm
焦距		22.89mm
总光焦度（放松状态）		58.6 屈光度
晶状体光焦度（放松状态）		19 屈光度
角膜光焦度		43 屈光度
角膜曲率半径		7.98mm
水状体折射率		1.336
晶状体折射率	中间区域	1.406
	边缘区域	1.386
玻璃体折射率		1.337

与其他光学成像仪器一样，人眼也有限制其光学性能的像差（Gubisch，1967；Liang 和 Williams，1997）。由于像总是通过连续移动眼睛在轴上快速扫描得到的，所以眼睛的离轴像差不需要考虑。然而，轴上像差是重要的。

由于轴向色差，眼睛将不同的颜色聚焦在沿光轴的不同焦平面上。Köhler（1962）设计了一个简单有趣的实验来证明人眼轴向色差的存在。我们来做这个实验，两只手各拿一张卡片分别放在每只眼睛前面。每张卡片必须与覆盖半个瞳孔的眼睛前方的直边对齐。右手卡片的左边缘必须在右眼瞳孔的前方，左手卡片的右边缘必须在左眼瞳孔的前

方。现在我们看一个高度着色的图像，比如电脑屏幕。我们注意到不同的颜色区域出现稍微不同的深度。这种效应叫作立体视觉，对于有些人即使不拿卡片也能够观察到。这种效应的出现是因为眼睛瞳孔的中心不总是在光轴上。

轴向色差已经被好多位学者研究和测量过，例如 Wald 和 Grifflin（1947）以及 Bedford 和 Wyszecki（1957）。由于这个像差，频谱蓝色端的焦点平移高达 2D。

人眼出现球差是因为通过人眼的近轴光线和边缘光线聚焦在沿着光轴的不同平面上。人们设计了许多实验来测量人眼的球差（Ivanof，1956；Koomen 等，1949；Williams，1999）。

人眼的对比敏感度也曾是许多科学研究的主题。例如，Williams（1985）研究了分辨率极限附近的正弦干涉条纹的清晰度和对比度。

在光轴周围的一个小区域内，人眼的分辨力约为 1′。但是，光轴以外的成像质量随着角度的增大下降很快，如图 13-2 所示（Walker，2000）。因为这个缘故，眼睛不得不通过在颅骨腔内非常快速地移动眼睛来扫描被观察像。当发现有意思的目标时，眼睛会快速转动，将目标定位在光轴上。

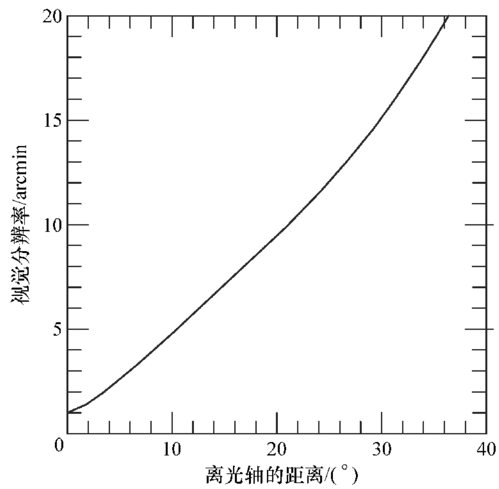


图 13-2　人眼的角分辨率

13.2　眼镜片

眼镜片是放在眼睛前面的薄弯月透镜，用来校正眼睛的折射率缺陷，如图 13-3 所

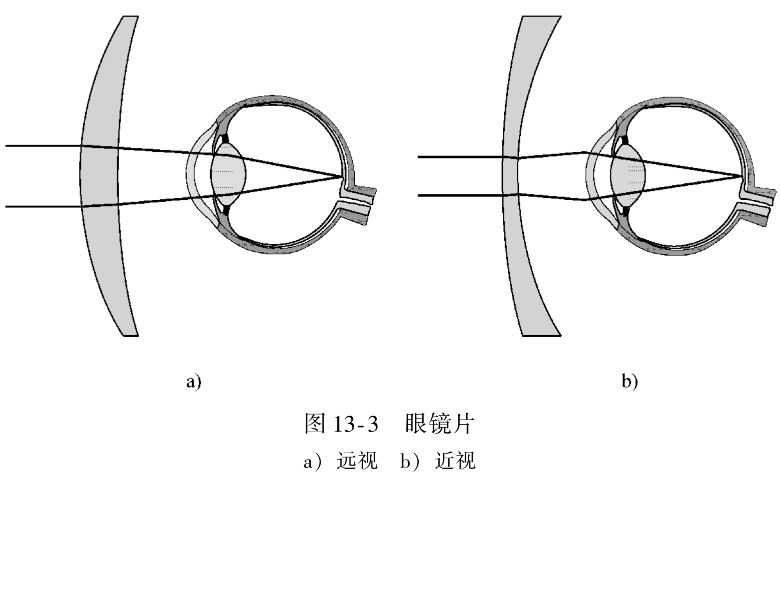


图 13-3　眼镜片

a）远视　b）近视

示。这个透镜装在一个镜框内，从凹表面的顶点到眼角膜的距离为14mm。这个透镜的作用就是在适当的距离处形成被观测物体的虚像，使得眼睛能够观察到它。因此，描述这个透镜的重要参数就是后焦距。以米为单位的后焦距的倒数被称作镜顶屈光度，单位表示为D。根据美国验光协会标准，特定屈光度的容限为±0.06D。国际标准化组织（ISO）对柔性焦距透镜组有一个完整的标准列表（ISO 8980－1）。ISO还指定了更宽松的屈光度容限，对于每一种屈光度的透镜都指定不同的容限。

如图13-4所示，有折射率缺陷的眼睛仅当从角膜到图像的距离为L时才能将一个非常远距离的物体聚焦成像（没有眼睛调节，即没有晶状体对远距离物体的聚焦）。如果距离L是正的（在眼睛后面），就是远视眼；如果距离L是负的（在眼睛前方），就是近视眼。为了在合适的位置成像，需要一个后焦距为F_V的透镜，$F_V=L+d_V$，其中d_V是从透镜后表面的顶点到眼角膜的距离。

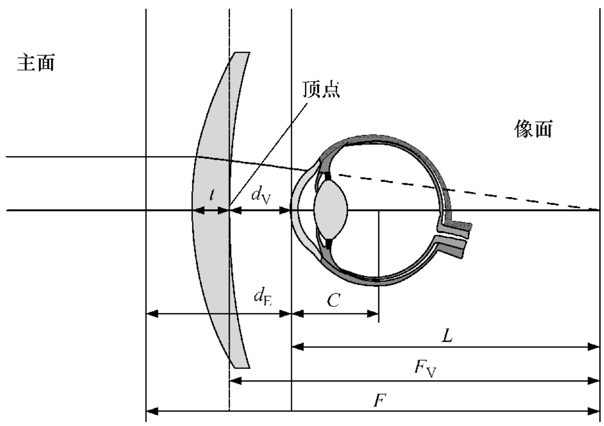


图13-4　眼镜片设计中使用的一些参数

如果透镜表面的曲率半径以米为单位来测量，透镜表面的屈光度以D为单位，屈光度为

$$P=\frac{(n-1)}{r} \tag{13-1}$$

它通过一个叫作视力计的仪器来测量（Coleman等，1951）。前（凸）表面的屈光度叫作基础屈光度。最一般的镜片的折射率为1.523。为了实用方便，对于曲率半径为r的眼镜片，研磨或抛光工具的标称屈光度定义为$P_n=0.530/r$。因此，标称屈光度为P_n的抛光表面的实际屈光度P为

$$P=\frac{(n-1)}{0.530}P_n \tag{13-2}$$

从等式（3-37），我们能够得到眼镜片的镜顶屈光度（定义为后焦距的倒数）：

$$P_V=\frac{P_1}{1-P_1(t/1000n)}+P_2 \tag{13-3}$$

式中，厚度t单位是mm。这个表达式可以用式（13-4）来近似：

$$P_V = P_1 + P_2 + \frac{P_1^2 t}{1000n} \qquad (13\text{-}4)$$

这个式子可以使得手动计算变得更简单。误差稍微大点，式（13-4）也可以写为

$$P_V = P_1 + P_2 \qquad (13\text{-}5)$$

为了对这些公式中的误差有一个了解，我们考虑一个玻璃透镜的例子，$P_1 = 9\text{D}$，$P_2 = -4\text{D}$，$t = 4\text{mm}$。那么我们有

从式（13-3）的准确公式，$P_V = 5.2179$

从式（13-4）的近似公式，$P_V = 5.2127$

从式（13-5）的近似公式，$P_V = 5.0000$

有效屈光度 P_e 是以 m 为单位的有效焦距的倒数。等式（3-39）可以写为

$$P_e = P_1 + \left(1 - \frac{P_1 t}{1000n}\right)P_2 \qquad (13\text{-}6)$$

在上述例子中的透镜的有效屈光度为 $P_e = 5.094$。因此，有效屈光度和镜顶屈光度之间的关系为

$$P_e = \left(1 - \frac{P_1 t}{1000n}\right)P_V \qquad (13\text{-}7)$$

当眼睛尺寸比正常的大时，而折射部分没有改变它们的性能，那么无穷远处物体的像就会离焦。这发生在近视眼中。对于远视眼，机制刚好相反。眼镜片通过将眼睛光学系统生成的实像转移到新的位置来校正折射缺陷。如果眼睛的光学系统与眼镜片结合起来保持原始的有效焦距，那么像的大小也会被保持下来。换句话说，在有效焦距相同的情况下，正常眼睛和矫正后的眼睛中所成像的大小是相等的。我们很容易得到，如果眼镜片位于眼睛的前焦点上，两者结合后的有效焦距仍然是一样的。这仅仅是近似正确的，因为眼睛有一个从角膜到前主平面的平均距离 16.0mm，而一般的眼镜距离为 14.5mm。

当眼睛通过眼镜片矫正时，像会明显改变它的大小。放大倍数的变化由式（13-8）给出：

$$\Delta M = \left(\frac{1}{1 - (dP_e/1000)} - 1\right) \times 100\% \qquad (13\text{-}8)$$

式中，d 是从透镜主平面到角膜的距离，单位是 mm。这个等式可以写作基础屈光度 P_1 和镜顶屈光度 P_V 的形式，如下：

$$M = \left(\frac{1}{(1 - (dP_V)/1000)(1 - (P_1 t)/1000n)} - 1\right) \times 100\% \qquad (13\text{-}9)$$

通常，分母中的第一项由于镜片的屈光度，第二项是由于它的形状。第一项的影响比第二项的更大。作为一个近似公式，镜片屈光度有约 1.4% 的放大。

眼镜片的一个重要性质是镜片的有效屈光度取决于它到眼睛的距离。如果镜片到眼角膜的距离增加，有效屈光度就会减小。令镜片到眼角膜的距离为 d_1，此时有效屈光度为 P_1，镜片到眼角膜距离为 d_2，此时有效屈光度为 P_2。则我们有：

$$\frac{P_2 - P_1}{P_1 P_2} = \frac{d_1 - d_2}{1000} \tag{13-10}$$

例如，如果一个5D的镜片被移动10mm，则有效屈光度改变0.25D。

13.3 眼镜片设计

一个用于眼镜片设计的光学布局如图13-5所示。眼睛近似球形，在眼腔内移动来观察不同方向的物体。因此，光阑位于眼睛瞳孔平面，它绕眼睛的旋转中心转动。实际的光阑可以被位于眼睛中心附近的物理光阑所取代。假设所有不同方向的被观测物体到眼睛的距离相等。因此，物面是球面，曲率中心近似位于光阑处。对物面上的任意物体，由眼镜片所成的像也应该是在恒定距离处。因此，像面也是球面，曲率中心在光阑处。

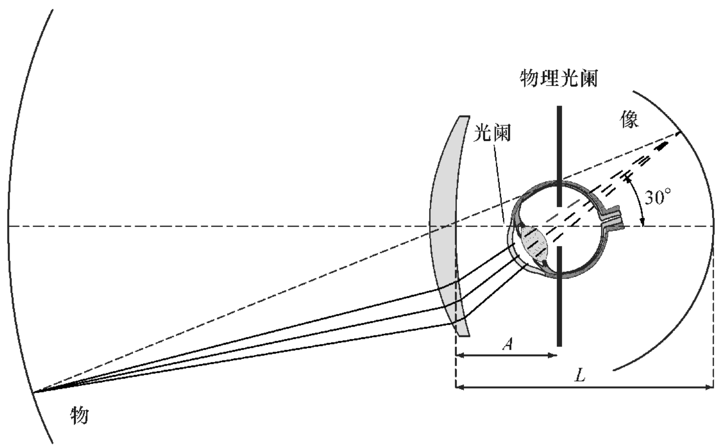


图13-5 带有眼镜的眼睛光学图示

从眼角膜到眼球中心的距离 C 叫作照准点归心距离，它是眼睛折射率误差的线性函数（Fry和Hill，1962），可以由式（13-11）表达：

$$C = -\frac{P_V}{6} + 14.5\text{mm} \tag{13-11}$$

从镜片顶到眼角膜的距离对于所有的观察者来说不是一样的，而是有小的变化，平均值约为14mm。

厚度 t 对于负透镜假设是常数，而对于正透镜则随屈光度线性增加，如图13-6所示。对于正透镜，边缘厚度近似为常数，等于1mm。厚度 t 由式（13-12）给出：

$$t = -\frac{D^2 P_V}{8000(n-1)} + 2.0\text{mm} \tag{13-12}$$

由于镜片的镜顶屈光度和光阑位置是固定的，校正像差的唯一自由度就剩下透镜弯曲。球差和轴向色差不成问题，因为眼睛瞳孔直径相比透镜焦距是非常小的。由于大视

场和小瞳孔直径，彗差相比像散也不是非常重要的，剩下要校正的像差是像散、场曲、畸变和倍率色差。畸变和倍率色差不能仅靠透镜弯曲来校正。因此，残留的像差有像散和场曲，有时也叫作周围屈光度误差。

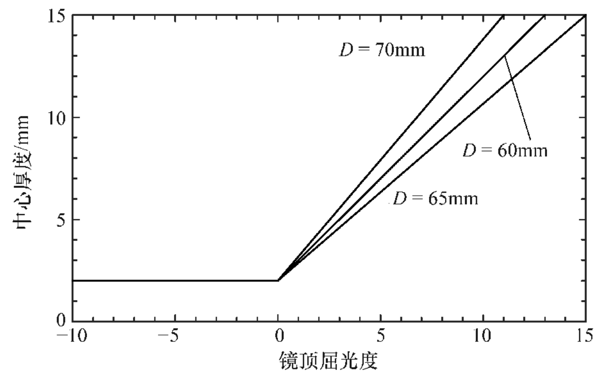


图 13-6　眼镜片的中心厚度

眼镜片和它们的设计技术已经有几位作者描述过了，如 Blaker（1983），Emsley（1956），Lueck（1965），Malacara 和 Malacara（1985a），以及 Walker（2000）。如果我们画出佩兹伐、子午、弧矢像面作为镜片前表面屈光度函数的曲线图，如图 13-7 所示，那么设计出一个眼镜片就是件相对容易的事了。图中薄透镜（$t=2$mm）的镜顶屈光度为 3D，有小视场（5°），通过透镜评价程序直接计算这些曲线。如果我们假设一个相对小的视场，以至于仅仅存在初级像差，那么弧矢像散是子午像散的三分之一。在图13-7中，垂直尺度的零点对应曲率中心位于光阑处的焦面的曲率。由于镜顶屈光度是常数，但有效焦距及佩兹伐和不是常数，我们可以看到佩兹伐曲线的微小变化。

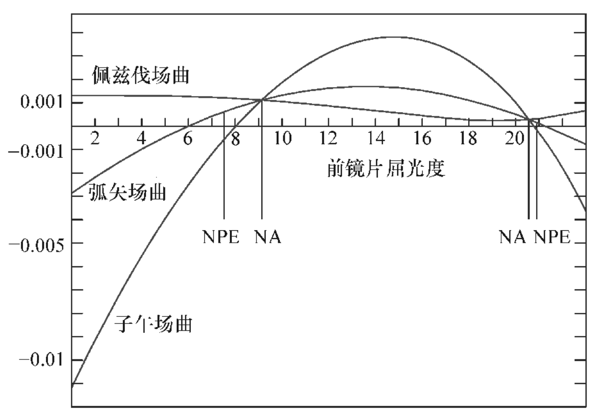


图 13-7　在眼镜片中的子午和弧矢曲率变化与前镜片屈光度关系

图 13-7 中三条曲线相交的点是无像散（NA）的解，子午和弧矢焦面曲线相对于水平轴对称，这些点是无屈光度误差（NPE）的解。

13.3.1　Tscherning椭圆

我们知道，通过调整弯曲，我们可以要么校正像散，要么校正场曲，但两者不能同时进行。这个缺陷会使得从镜片边缘观察物体产生离焦。观察者可以通过眼睛的调整来重新聚焦成像，但是这会带来眼睛视觉疲劳，眼睛疲劳经常是可以忍受的，尤其是年轻人。如果前镜片屈光度或者基础屈光度被用作一个弯曲参数，我们则可以画出总的镜顶屈光度作为基础屈光度的函数图，这个图给出了一个无像散无屈光度误差的镜片。因此，我们得到如图13-8所示的两个椭圆，叫作Tscherning椭圆。对于每一个椭圆，我们看到有两个解，一个前镜片屈光度低（Ostwald镜片），另一个前镜片屈光度高（Wollaston镜片）。Tscherning椭圆通过三阶理论得到，镜片有非常小的恒定厚度，有非常小的视场，从镜顶到光阑有29mm的恒定距离。

当厚度恒定、从镜顶到光阑的距离恒定、小视场这些限制条件被移除时，Tscherning椭圆变形为图13-9所示。

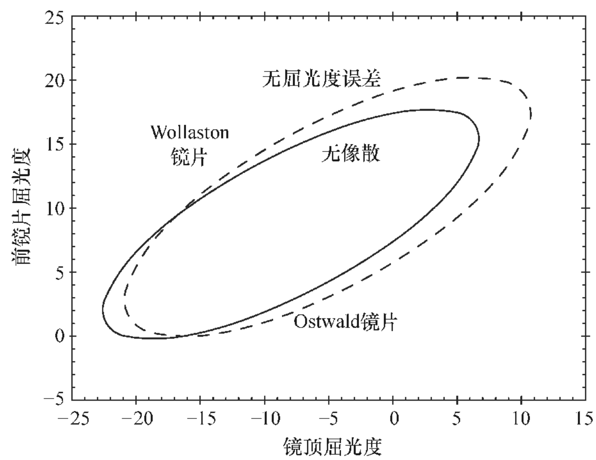


图13-8　对于无像散和倍率误差的眼镜片的Tscherning椭圆

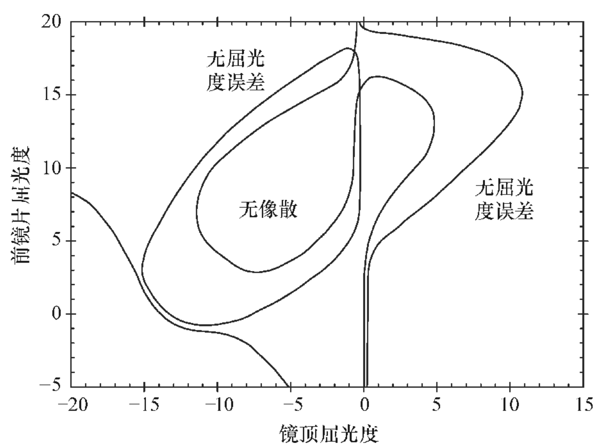


图13-9　引入有限透镜厚度后的Tscherning椭圆

13.3.2　非球面眼镜片

从 Tscherning 椭圆我们可以看到，对于高的镜顶屈光度，没有无像散或无边缘屈光度误差的解。在这种情况下，镜片前表面就可以使用非球面。使用非球面，Tscherning 椭圆会改变它们的形状，将求解范围延伸到更高的屈光度，图 13-10 显示的是像散的情形，图 13-11 是零屈光度误差的情形。Smith 和 Atchison（1983）、Sun 等（2000，2002）使用三阶理论，以及 Malacara 和 Malacara（1985b）使用精确的光线追迹研究了眼镜片的非球面。

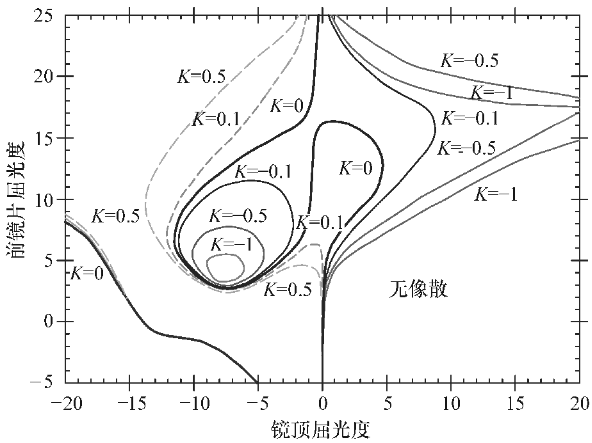


图 13-10　引入非球面无像散的 Tscherning 椭圆变形

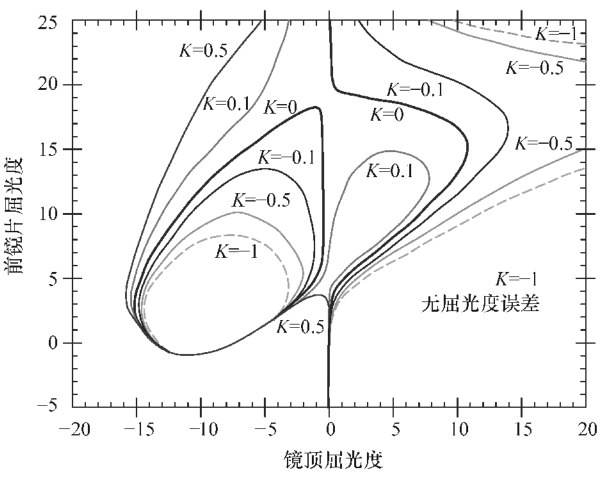


图 13-11　引入非球面无倍率误差的 Tscherning 椭圆变形

13.4　楔形镜片

镜片表面的两个曲率中心定义了光轴。因为表面是同轴的，仅当两个曲率中心一致时才不用定义光轴。如果光轴通过一个圆形镜片的中心，那么边缘厚度将恒定不变。

当光轴不通过镜片中心时，这种镜片称作楔形镜片，因为两个镜片表面在其中心会形成一个夹角。那么，通过镜片中心的一束光线将偏离一个角度 ϕ。如果楔形镜片将一束光线偏离角度 ϕ，如图13-12所示，则偏转屈光度 P_P（单位为D）为

$$P_P = 100\tan\phi \tag{13-13}$$

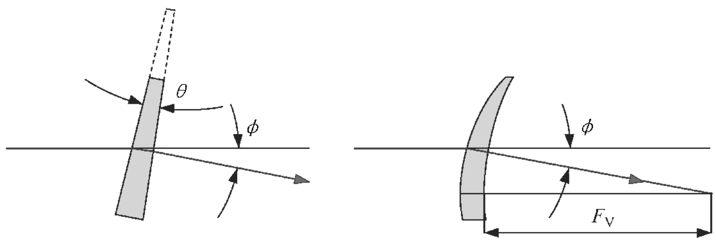


图13-12　棱镜和楔形镜片
a）棱镜　b）楔形镜片

因此，如果一束通过镜片中心的光在距离1m处偏离 $P_P$cm，那么该棱镜有 P_P 偏转屈光度。

如果镜片两个面之间的角度为 θ，则光线的角度偏离量为

$$\tan\phi = \frac{\sin\theta}{n - \cos\theta} \tag{13-14}$$

或者对于薄棱镜，可近似为

$$\phi = \frac{\theta}{n - 1} \tag{13-15}$$

如果偏转屈光度为 P_1 和 P_2 的两个薄棱镜叠加在一块，它们之间的夹角为 α，则合成的棱镜的偏转屈光度 P_R 为

$$P_R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos\alpha \tag{13-16}$$

它的方向为

$$\sin\beta = \frac{P_2}{P_R}\sin\alpha \tag{13-17}$$

这个结果也可以通过画图得出，如图13-13所示。

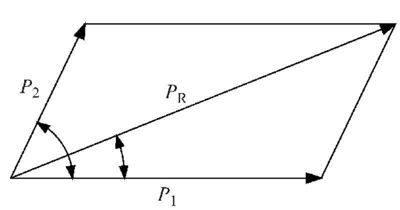


图13-13　棱镜偏转屈光度的矢量加法

对于镜顶屈光度为 P_V、棱镜偏转屈光度为 P_P 的镜片，它的光轴偏离透镜中心 Δy，有

$$P_P = \frac{P_V \Delta y}{10} \tag{13-18}$$

式中，轴偏量 Δy 单位是 mm。

13.5　球柱镜片

球柱镜片有轮胎面或者球柱形表面。那么，镜片没有旋转对称性，将会引入轴上点像散，以补偿眼睛的这种像差。光学上，这些镜片可以被看作一个球面透镜（有旋转对称性）和柱面透镜（仅仅一个平面上的屈光度）的叠加。如图 13-14 所示，一个球柱镜片由下面三点定义：①它的球面屈光度；②它的柱面屈光度；③柱面方向。如果一个镜片在与水平方向成 ϕ 角的直径上有一个屈光度 P_1，在与水平方向成 $\phi+90°$角的垂直于上述直径方向上有一个屈光度 P_2，我们可以指定这个镜片如下：

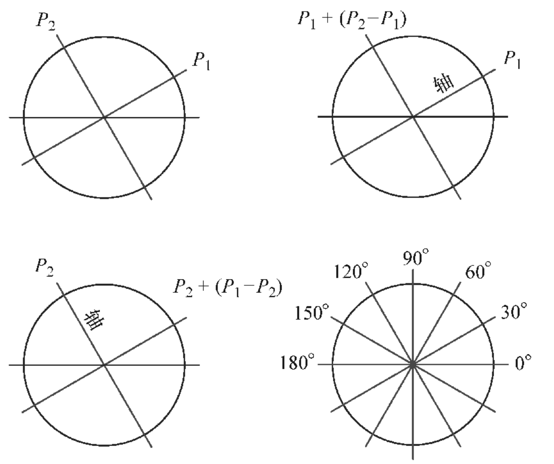


图 13-14　在球柱镜中的屈光度和轴向

球屈光度 $=P_1$

柱屈光度 $=P_2-P_1$

轴方向 $=\phi$

或者表示如下：

球屈光度 $=P_2$

柱屈光度 $=P_1-P_2$

轴方向 $=\phi+90°$

这两种描述是一样的。唯一的区别在于球屈光度在一种情况下被认为是 P_1，另一种情况下被认为是 P_2。这两种形式只是变换了下柱面的顺序。柱面转换以下面三个步骤进行：

1）通过增加球屈光度和柱屈光度的值来获得新的球屈光度值。

2）通过改变旧值的符号来获得新的柱屈光度值。

3）通过以 90°的角度旋转旧轴来获得新的轴方向。

球柱镜片沿着与水平方向成 θ 角的直径的屈光度 P_θ 由下式表示：

$$P_\theta = P_C \sin^2(\theta-\phi) + P_S \tag{13-19}$$

式中，P_C 是柱屈光度，P_S 是球屈光度，ϕ 是圆柱方向。如果两个球柱镜片叠加，合成的柱屈光度 P_{CR} 为

$$P_{CR}^2 = P_{C1}^2 + P_{C2}^2 + 2P_{C1}P_{C2}\cos^2(\theta_2-\theta_1) \tag{13-20}$$

轴方向为

$$\tan^2(\theta_R-\theta_1)=\frac{P_{C2}\sin^2(\theta_2-\theta_1)}{P_{C1}+P_{C2}\cos^2(\theta_2-\theta_1)} \tag{13-21}$$

球屈光度为

$$P_{SR}=P_{S1}+P_{S2}+\frac{P_{C1}+P_{C2}-P_{CR}}{2} \tag{13-22}$$

这些表达式可以通过图13-15形象地表达出来。

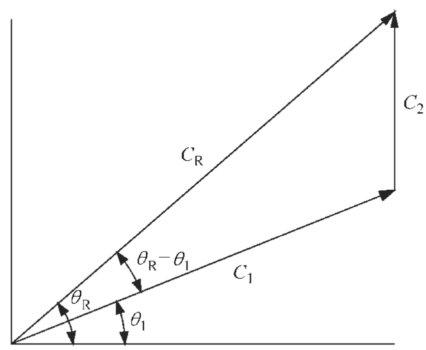


图13-15　球柱镜屈光度的矢量加法

参考文献

[1] Bedford, R. E. and Wyszecki, G., "Axial Chromatic Aberration of the Human Eye," *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 564－565 (1957).

[2] Blaker, J. W., "Ophthalmic Optics," in *Applied Optics and Optical Engineering*, R. R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Vol. IX, Chap. 7, Academic Press, San Diego, CA (1983).

[3] Coleman, H. S., Coleman, M. F., and Fridge, D. S., "Theory and Use of the Dioptometer," *J. Opt. Soc. Am.*, **41**, 94－97 (1951).

[4] Emsley, H. H., *Aberrations of Thin Lenses*, Constable and Co., London (1956).

[5] Fry, G. A. and Hill, W. W., "The Center of Rotation of the Eye," *Am. J. Optom. Arch. Am. Acad. Optom.*, **39**, 581－595 (1962).

[6] Gubisch, R. W., "Optical Performance of the Human Eye," *J. Opt. Soc. Am.*, **57**, 407－415 (1967).

[7] Ivanof, I,. "About the Spherical Aberration of the Eye," *J. opt. Soc. Am.*, **46**, 901－903 (1956).

[8] Köhler, I., "Experiments with Goggles," *Scientific American*, **206** (May), 63－72 (1962).

[9] Koomen, M. J., Tousey, R., and Scolnik, R., "The Spherical Aberration of the Eye," *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 370－376 (1949).

[10] Liang, J. and Willams, D. R., "Aberrations and Retinal Image Quality of the Normal Human

Eye," *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, 2873 – 2883 (1997).

[11] Lueck, I., "Spectacle Lenses," in *Applied Optics and Optical Engineering*, R. Kingslake, ed., Vol. Ⅲ, Chap. 6, Academic Press, San Diego, CA (1965).

[12] Malacara, Z. and Malacara, D., "Tscherning Ellipses and Ray Tracing in Ophthalmic Lenses," *Am. J. Opt. Phys. Opt.*, **62**, 447 – 455 (1985a).

[13] Malacara, D. and Malacara, Z., "Tscherning Ellipses and Ray Tracing in Aspheric Ophthalmic Lenses," *Am. J. Opt. Phy. Opt.*, **62**, 456 – 462 (1985b).

[14] Smith. G. and Atchison, D. A., "Effect of Conicoid Asphericity on the Tscherning Ellipses of Ophthalmic Spectacle Lenses," *J. Opt. Soc. Am.*, **73**, 441 – 445 (1983).

[15] Sun, W. – S., Chang, H., Sun, C. – C., Chang, M. – W., Lin, C. – H., and Tien, C. – L., "Design of High – Power Aspherical Ophthalmic Lenses with a Reduced Error Budget," *Opt. Eng.*, **41**, 460 – 470 (2002).

[16] Sun, W. – S., Tien, C. – L., Sun, C. – C., Chang, M. – W., and Chang, H., "Ophthalmic Lens Design with the Optimization of the Aspherical Coefficients," *Opt*, *Eng.*, **39**, 978 – 988 (2000).

[17] Wald, G. and Grifflin, D. R., "The Change in Refractive Power of the Human Eye in Dim and Bright Light," *J. Opt. Soc. Am.*, **37**, 321 – 336 (1947).

[18] Walker, B. H., *Optical Design for Visual System*, SPIE Press, Bellingham, WA (2000).

[19] Williams, D. R., "Visibility of Interference Fringes Near the Resolution Limit," *J. Opt. Soc. Am. A*, **2**, 1087 – 1093 (1985).

[20] Williams, D. R., "Wavefront Sensing and Compensation for the Human Eye," in *Adaptive Optics Engineering Handbook*, R. K. Tyson, ed., Marcel Dekker, New York (1999).

第 14 章　天文望远镜

14.1　分辨率和集光能力

已经有许多作者提到过天文望远镜这个主题。例如：Dimitroff 和 Baker（1945），Linfoot（1955a，1955b），Maxwell（1972），和 Schroeder（1987，1993）的书，都是很棒的参考资料。本章我们将要了解更多有关天文望远镜的知识。

首先，天文望远镜的分辨率受到如衍射、大气扰动等诸多因素的影响。集光能力是天文望远镜的另一个重要特性，首先我们来回顾一下这些重要的概念。

14.1.1　衍射效应和大气扰动

由于压强、气流和温度变化的影响，大气中存在不均匀的折射率。这种不均匀性是在持续不断变化的，并且会对来自恒星的光产生波前畸变，如图 14-1 所示。大气扰动对恒星图像产生的影响主要有两个：闪烁和视宁度。闪烁是光强的随机变化，视宁度是到达望远镜光线的方向的随机变化。

口径很小的时候才能观测得到大气闪烁，尤其是裸眼观测的时候，能看到通常所说的“闪烁”的现象。望远镜越大，大气闪烁的影响就越小。

视宁度的影响取决于孔径大小。通过图 14-1 的实验可以知道，对于小的孔径，不会看到波前畸变，只会看到波阵面传播方向的连续变化。因此，如果望远镜的孔径很小，大约小于 150mm，那么图像会在一个平均位置上快速移动，偏移大约为 1″。如果望远镜的孔径近似大于 1m，那么就看不到图像的移动。只能看到一个很大的模糊的图像。

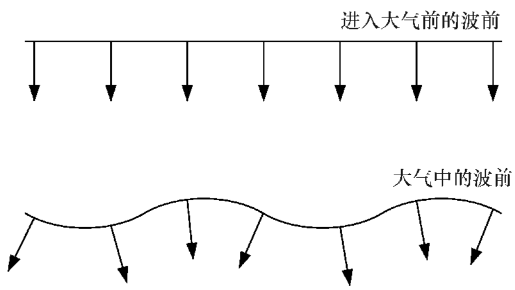


图 14-1　在大气中的非畸变与畸变波前的传输

由于视宁度而使图像扩大的直径取决于天体的天文学观测点。对于一个中型城市，可能达到 2″或 3″，甚至更多。在最好的天文学观测点，在一座高山上并且在最好的夜晚，这个偏差只有大约 0.1″。容易发现，在平均状况下，如果望远镜的孔径大于约 200mm，衍射图像的尺寸小于视宁度扩大的图像。也就是说，天文望远镜的角分辨率受到大气的限制，而不是折射。因此，天文望远镜不需要考虑折射限制条件，除非它不处于大气环境中，比如哈勃望远镜。另外一种不需要考虑的情况是用一些技术方法来补偿波前畸变，如自适应光学那样的新技术。

14.1.2　望远镜的视觉限制

星等表示行星的亮度。星等越大，行星越暗淡。行星的星等是希腊人人为定义的一个标量。根据他们的设定，天空最亮的行星为一级星等，最暗淡的行星为六级星等。现在星等仍在使用同样简单的定义，但是具有更正式和更精确的意义。现在我们知道，根据 Fetchner 的精神物理学定律，人眼对光的感知度正比于光激发的对数。在这个效应的基础上，John Herschel 在 1830 年规定，一级星等要比六级星等亮 100 倍。因此，行星的星等每高一级，亮度增加 $(100)^{1/5}=2.512$ 倍。

如果两颗分别为 m 级星等和 n 星等的行星亮度分别为 B_n 和 B_m，则有：

$$\frac{B_n}{B_m}=2.512^{m-n} \tag{14-1}$$

对上式两边同取对数，有：

$$\log B_n-\log B_m=(m-n)\log 2.152=0.4(m-n) \tag{14-2}$$

因此，两恒星的星等差正比于两恒星亮度对数的差值。当一颗行星的亮度接近最亮的行星时，人为将它定义为一等星。

当用目视望远镜观测行星时，亮度会增加，因为视网膜上的成像的通光量增加，但是图像大小没有增加。通光量随望远镜直径的二次方 D_t 和裸眼眼瞳直径二次方 D_0 的比例增加，如下：

$$\log\left(\frac{B_t}{B_0}\right)=-2\log\left(\frac{D_t}{D_0}\right)=0.4(m_0-m_t) \tag{14-3}$$

式中，m_0 是人眼能观测到的最高星等，m_t 是用望远镜观测到的最高星等。因此，我们可以写出：

$$m_0-m_t=-5\log\left(\frac{D_t}{D_0}\right) \tag{14-4}$$

不同观测者的瞳孔直径是不同的，即便是同一观测者，瞳孔直径也会随射入眼中的通光量的变化而变化。然而，我们可以假设 D_0 的平均值为 6mm。这样，通过望远镜观察到的极限星等为

$$m_v=7.10+5\log D_t \tag{14-5}$$

14.1.3　望远镜的拍摄和 CCD 限制等级

天文拍摄中的极限星等要比视觉观测的极限星等大，这不仅取决于望远镜的孔径，还取决于曝光时间。感光乳胶的灵敏度也是一个因素，但并不是很重要，因为一般灵敏度变化的范围不是很大。这是因为分辨率和感光度成反比例。假定对于一般的乳胶，极限摄影星等的经验关系式为

$$m_f=4+5\log D+2.15\log t \tag{14-6}$$

式中，D 是望远镜镜径，t 是曝光时间。容易看出，当曝光时间为 28min 时，极限目视星等约等于极限照相星等。

天空背景不是绝对黑暗的，所以理想曝光时间的最大值应该使得感光片背景的黑化不会超过一个限制。望远镜成像的天空亮度与焦距比例 FN 的二次方成反比例。

由于大气扰动，对于一个固定的天文观测点，所有行星的角直径对于所有的望远镜都一样。因此，图像大小正比于有效焦距。另外，成像光能的大小正比于孔径的二次方。于是，图像单位面积上的能量也和焦比 *FN* 的二次方成反比。然而，感光片上的颗粒至少和行星图像一样大。乳胶颗粒的暗化并不取决于光强在颗粒上的分布，而是取决于照射在上面的总光能。因此，如果所有光线集中在一个单个颗粒上，图像为一个点。我们可以得出结论，行星图像的有效亮度与背景亮度之比只与 *f* 数 *FN* 有关。

一个很重要的结论是，*f* 数决定了最大曝光时间，使得背景暗化达到最大允许值。有如下近似经验关系式：

$$\log t = 0.6 + 2.325\log FN \tag{14-7}$$

曝光时间的单位为 min。显然，最大连续曝光时间不能大于 300min。这说明曝光时间为 5h，最佳 *f* 数为 6.4。于是，容易看出，极限摄影星等为

$$m_{\mathrm{f}} = 7.29 + 5\log F \tag{14-8}$$

式中，曝光时间为 5h。这说明，焦距要尽可能大，但是由于相对孔径是固定的，口径也很大。

几位作者（Schroeder，1987）给出了一个更普遍处理极限星等问题的方法。望远镜的孔径要尽可能大，观测点的能见度要尽可能好，且没有视宁度干扰。

为了完成这部分，我们必须要知道新式的天文望远镜已经不再使用感光乳胶，而是使用一种更好的感光器件，称为电荷耦合器件（CCD）。这是一种光电探测器，利用半导体制造技术使得望远镜达到灵敏度的最大理论值（Mallama，1993）。

14.2 双反射式相机镜头和望远镜

一个双反射镜望远镜或者相机镜头由一个称作主镜的凹透镜和一个称作次镜的凹透镜或者凸透镜组成，次镜在主镜之前，将从主镜射出的光线反射回去。光线穿过主镜中间的一个小孔在主镜之后成像。如果次镜是凸透镜，则如图 14-2 所示，即为卡塞格林望远镜，如果次镜是凹透镜，即为格雷戈里反射式望远镜，见 14.4.5 节。卡塞格林望远镜是法国的 Guillaume Cassegrain 在 1672 年发明的。卡塞格林望远镜的有效焦距为正，格雷戈里望远镜为负。Bouwers（1946），Yoder 等（1953a，1953b），Jones（1954），Baker（1963），DeVany（1963），Malacara（1965），Schulte（1966a，1966b），Bowen（1967），Wynne（1968），Meinel（1969），Wetherell 和 Rimmer

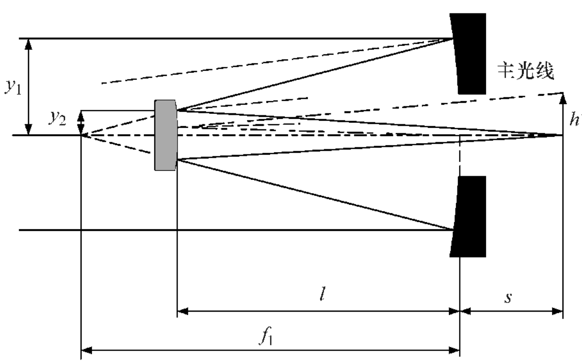


图 14-2　在双反射镜望远镜中的一些重要参数

(1972), Cornejo 和 Malacara (1973, 1975), Gascoigne (1973), Shafer (1977), Schroeder (1978, 1987), Toyoda (2011) 已经对这些望远镜进行了细致的研究和描述。

14.2.1　双反射镜系统的一阶近似设计

我们先来回顾一下这些望远镜的一些知识，以基本的卡塞格林望远镜为例。首先利用一阶理论计算两反射镜的曲率和间隔。可以看出，主镜和次镜的焦距 f_1 和 f_2 与曲率半径 r_1 和 r_2 之间的关系为

$$r_1 = \frac{1}{c_1} = -2f_1 \tag{14-9}$$

$$r_2 = \frac{1}{c_2} = 2f_2 \tag{14-10}$$

根据符号规则，两个曲率半径均为负，因此，f_1 为正，f_2 为负。主镜成的像，作为次镜的物，经次镜成像后，在第二个焦点上得到一个放大的图像。由次镜引入的横向放大率 m_s 为

$$m_s = \frac{F}{f_1} = \frac{l+s}{f_1-l} \tag{14-11}$$

式中，F 是望远镜的有效焦距，s 是主镜的顶点到次级焦点的距离。对于任何双镜系统，我们都可以得到关于有效焦距的关系式，如式 (3-43)。可以简化为

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{F}{l+s} = \frac{f_1}{f_1-l} = \pm\frac{D_1}{d_2} \tag{14-12}$$

式中，l 是两透镜之间的距离，$y_1 = D_1/2$ 是主镜上子午面光线的高度（即主镜的半径），$y_2 = \pm d_2/2$ 是次镜上子午面光线的高度（即次镜上的锥形反射光线的半径，卡塞格林望远镜取正号，格雷戈里望远镜取负号）。由式 (14-12) 的第二项和第三项，我们可以分离出两透镜距离 l

$$l = \frac{F-s}{1+F/f_1} = \frac{m_s f_1 - s}{1+m_s} \tag{14-13}$$

带回式 (14-12)，有

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{f_1+F}{f_1+s} \tag{14-14}$$

另一方面，对次镜应用式 (2-13)，有

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{l+s} - \frac{1}{f_1-l} \tag{14-15}$$

由式 (14-14)，光线高度 y_2 为

$$y_2 = y_1\left(\frac{f_1+s}{f_1+F}\right) = \frac{D_1}{2}\left(\frac{f_1+s}{f_1+F}\right) \tag{14-16}$$

如果次级焦平面上的像高为 h'，初级焦面上的图像大小为 $h'/m_s = h'f_1/F$。于是，次镜上的主光线高度为

$$\bar{y}_2 = h'm_s\left(\frac{l}{f_1}\right) = h'\left(\frac{l}{f}\right) = \frac{f_1(F-s)}{F(f_1+F)}h' \tag{14-17}$$

由式（14-12）和式（14-15），可得次镜的焦距为

$$\frac{1}{f_2}=\frac{y_1}{y_2}\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{f_1}\right) \tag{14-18}$$

利用式（14-14），焦距 f_2 可以写成

$$f_2=\left(\frac{F}{f_1}\right)\left(\frac{f_1+s}{1-(F/f_1)^2}\right)=\frac{m_s(f_1+s)}{1-m_s^2} \tag{14-19}$$

次镜的直径为

$$D_2=2(\bar{y}_2+y_2)=\frac{(f_1-l)D_1}{f_1}+2\left(\frac{l}{F}\right)h' \tag{14-20}$$

为了完成双反射镜望远镜的一阶分析，当研究一些特殊系统的像差时，需要算出一些参量的表达式。例如，次镜上主光线高和子午光线高的比，由式（14-16）和式（14-17），可得

$$\frac{\bar{y}_2}{y_2}=\left(\frac{f_1(F-s)}{y_1F(f_1+s)}\right)h' \tag{14-21}$$

主镜上子午光线的入射角为

$$i_1=-\frac{y_1}{2f_1} \tag{14-22}$$

因为到达透镜的光线在法线上方，所以式（14-22）为负。主镜上主光线的入射角为

$$\bar{i}_1=\frac{h'}{F} \tag{14-23}$$

因为到达主镜的光线在法线下方，所以式（14-23）为正。次镜上子午光线的入射角如下：

$$i_2=y_2\left(\frac{1}{(l+s)}-\frac{1}{2f_2}\right) \tag{14-24}$$

由于光线从正面到达透镜，在法线上方，所以式（14-24）为正。同样可得，次镜上主光线的入射角为

$$\bar{i}_2=-\bar{y}_2\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{2f_2}\right) \tag{14-25}$$

由于光线从正面到达透镜，在法线下方，所以式（14-25）为负。通过一些三角函数计算，可以得到上面两个角的表达式如下：

$$i_2=-\frac{(f_1+F)}{2f_1F}y_1 \tag{14-26}$$

$$\bar{i}_2=\frac{(f_1+F)(F+s)}{2F^2(f_1+s)}h' \tag{14-27}$$

一个双球面反射镜的系统可以设计成无像散系统，即球差、彗差和像散都被修正。这个由两个同心球面反射面组成的系统（Erdös，1959）被用来观测有限远的物体。因此，这种结构不能用于望远镜，但是可以用于一个相对距离较近的小物体成像。

14.2.2　双反射镜望远镜遮光罩

在双反射镜望远镜系统中，为了避免来自天空或者背景的光线直接入射到焦平面上，需要适当的遮挡。为双反射镜望远镜系统设计一套好的遮光系统，很多科学家已经研究过这个问题，例如 Young（1967），Cornejo 和 Malacara（1968），Prescott（1968），Davies（1987），LaVaughn Hales（1992），Song 等（2002）。遮挡范围过大会引入两个问题：渐晕和中心遮拦。中心遮拦是由次镜上遮光罩直径过大导致的。边缘渐晕是由两个遮光罩共同作用的结果。我们需要找到一个折中的办法使光损失最小化。

假设全视场角为 2α。如图 14-3 所示，从行星发出的光线 AB 以一个与光轴非常小的夹角 α 进入望远镜（夹角太小没有在图上表示出来）。当反射到主镜上时，这条光线沿路径 BC 和 CD，到达焦平面上一点像高为 h'。在初级焦平面上像高为 h_p。一条来自外部光源的光线 ED 也到达焦点 D，经过遮光罩的边缘点 M 和点 N。这两点 M 和 N 确定了遮光罩的尺寸。这里没有给出计算遮光罩的几何方法，有兴趣的读者可以查阅参考资料。

举个例子，本章中提到的卡塞格林望远镜的遮光罩的尺寸见表 14-1。

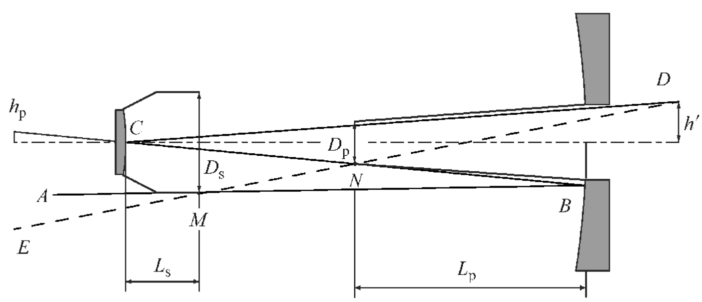


图 14-3　双反射镜望远镜的遮光罩（卡塞格林或 RC 系统）

表 14-1　双反射镜望远镜（卡塞格林或 RC 系统）的遮光罩

	主镜遮光罩	次镜遮光罩
直径/mm	376.0	689.0
长度/mm	2247.0	562.0
中心遮拦（面积）：10.77%		

14.3　折反相机镜头

在天文拍摄中，通常需要一个大的孔径。因为这个原因，大部分的天文相机镜头不是反射的就是折反射的。折反射望远镜由反射镜和透镜构成（Churilovskii 和 Goldis，1964；Maxwell，1972；Villa，1968），其中最有名的是施密特和马克苏托夫相机镜头。本书中，我们要通过焦比来区分天文相机镜头和天文望远镜。相机镜头的焦比相对较

小，大概 2 ~ 3。望远镜的焦比在 8 ~ 16。

14.3.1　施密特相机镜头

Bernard Schmidt 1930 年在爱沙尼亚发明了施密特相机镜头，它在大视场、高速相机中非常受欢迎，许多的作者对它进行了充分的描述，例如，Baker（1940b），Lucy（1940，1941），Synge（1943），Benfor（1955a，1955b），Linfoot 和 Wolf（1949），Wormser（1950），Bowen（1960），Cornejo 等（1970），Buchreoder（1972）。我们已经知道，曲率中心有光阑的球面镜可以消除彗差、散光和畸变，很容易看出这是由于系统关于曲率中心对称的原因。这种对称性也解释了为什么视场是弯曲的，并且和反射镜的曲率中心是同心的。大孔径的相机镜头只有一个问题，即存在球差和色球差。如果把反射镜做成抛物线形，球差就能够被修正，但是系统关于曲率中心的球对称性就会失去。于是，施密特通过在光阑处引入一个非球面的修正板来修正球差，如图 14-4 所示。由于修正板的放大率很小，且位于光阑处，由它产生的轴外像差是可以忽略的。

有许多方法可以计算这个修正板的形状，一个简单的估算方法是，考虑一个平顶波的畸变来得到这种形状。

$$W(S)=(n-1)Z(S) \tag{14-28}$$

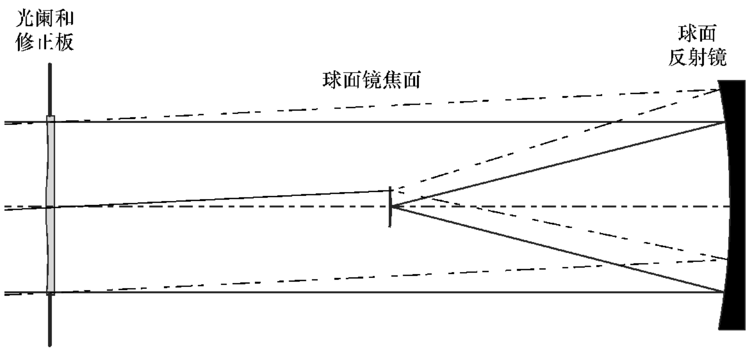


图 14-4　施密特相机镜头

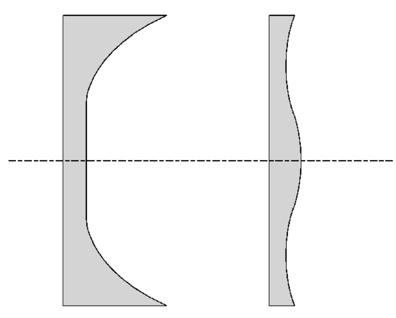


图 14-5　施密特修正板。相对于它的直径的非球面变形被夸大
a）修正前　b）修正后

波片的表面为 $Z(S)$。另一方面，这种波前畸变与球面波对于球面镜的波前畸变是相反的，如式（11-26），因此

$$Z(S)=\frac{S^4}{4(n-1)r_M^3} \tag{14-29}$$

式中，r_M 是球面镜的曲率半径。这种表面形状如图 14-5a 所示。但是由于存在与参考波长明显不同的球差，这并不是最佳的形状。通过在玻璃片上引入一个小曲率（散焦项）来使修正板表面的最大斜率降到最低，可以使这种像差最小化，如图 14-5b 所示。于是，新的矢高为

$$Z(S)=\frac{S^4}{4(n-1)r_M^3}+\frac{S^2}{2r_p} \qquad (14\text{-}30)$$

式中，r_p 是玻璃片的曲率最大值，r_M 是球面镜的曲率半径。通过令

$$\left(\frac{dZ(S)}{dS}\right)_{0.707S_{max}}=0 \qquad (14\text{-}31)$$

式中，S_{max}是在矫正板边缘（半径）的 S 值，由矫正板的曲率半径可以得到

$$\frac{1}{r_p}=\frac{S_{max}^2}{2(n-1)r_M^3} \qquad (14\text{-}32)$$

则波片的形状为

$$Z(S)=\frac{S^2}{4(n-1)r_M^3}(S^2-S_{max}^2) \qquad (14\text{-}33)$$

如图 14-5b 所示。以上结果是在假设修正板与球面镜接触的情况下得到的，实际的光线追踪可以使结果更加完善。

表 14-2 给出了一种孔径为 300.0mm 的施密特相机镜头。我们注意到图 14-6 所示的相差图中，离轴图像的像差比轴上图像要大。离轴图像存在球差过矫正。

表 14-2　施密特相机镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
53，680.0	300.0	13.40	N－BK7
0.0	300.0	1184.40	空气
－1193.0	310.0	－593.05	

孔径（F 数）：300.0mm（2）。
焦距：600.0mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：31.3mm（3°）。
像面弯曲的半径：－592.6mm。
施密特矫正板的玻璃材料：N－BK7。
施密特矫正板的非球面系数：$A_4=-2.79\times10^{-10}$，$A_6=-2.56\times10^{-16}$。

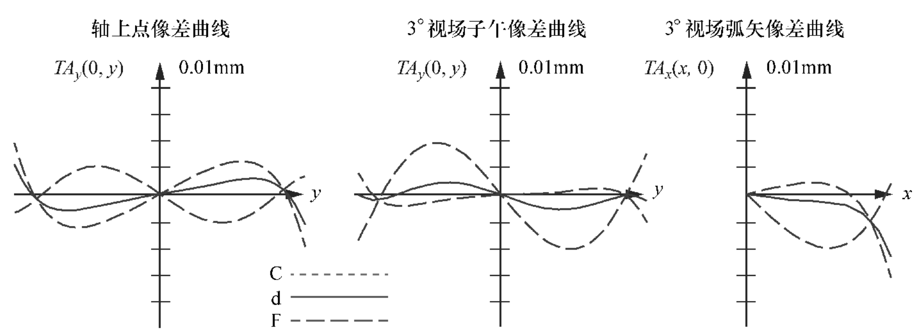


图 14-6　施密特相机镜头的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

由于焦平面是弯曲的，且它的半径等于系统的焦距，必须采用下面两种方法中的一种：通过从背面挤压感光片的中心使其弯曲，或者通过透镜使像面变平。

14.3.2 鲍沃斯（Bouwers）相机镜头

在第二次世界大战期间，Baker（1940a）、Bouwers（1946）和 Maksutov（1944）分别发明了与施密特相机镜头原理相似的相机镜头。这些相机镜头光阑都在曲率中心，但是他们有两个主要的区别：①校正器件不在光阑上；②校正器件是弯月形球面和光阑中心重合，如图14-7所示。

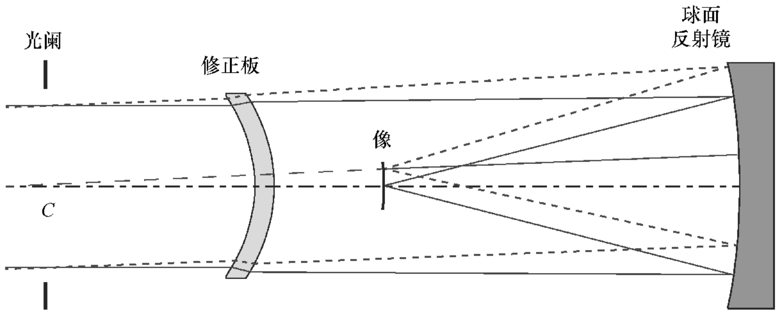


图14-7 鲍沃斯 - 马克苏托夫共轴相机镜头

我们可以从式（5-34）中得到校正板的球差，并且只对厚透镜有效。然而，即使校正透镜有很大的曲率，但是与有效焦距相比厚度也很小。因此，我们把它当成一个薄透镜来得到近似值。取物距为无穷大（$v_1=0$），根据式（5-35）可得

$$SphT = F\kappa S^3(G_1\kappa^2 - G_2\kappa c_1 + G_4 c_1^2) \tag{14-34}$$

式中，F 是校正透镜的有效焦距（不是整个系统的），由式（3-35）得到。由于透镜表面曲率很大，焦距也很大，我们可以假定 $\kappa >> c_1$。因此，我们可以忽略前两项，于是得到

$$SphT = \frac{(n+2)S^3}{2nr_1^2} \tag{14-35}$$

然后，利用式（7-5），波像差 $W(S)$ 为

$$W = \frac{1}{F}\int_0^S SphT\ \mathrm{d}S = \frac{(n+2)S^4}{8Fnr_1^2} \tag{14-36}$$

在施密特相机镜头中，期望的波前畸变必须要和球面镜的球面波前畸变相反。因此，令式（14-36）与式（11-26）中球面镜的波像差相等，可得到校正透镜必须满足如下条件：

$$Fr_1^2 = \frac{(n+2)r_M^2}{2n} \tag{14-37}$$

式中，r_M是校正透镜的曲率半径。透镜的厚度 t 没有被定义，可以作为一个额外的自由度。

Bouwers 选取了一个厚度 t 和一个 r_1，以保证整个系统是以曲率 C 的中心为中心的，

如图 14-7 所示，关系如下式：

$$r_2 = r_1 - t \tag{14-38}$$

唯一的约束条件是整个系统的中心要重合。于是，校正的半月板可以放在从 r_1 到光阑之间的任意位置。曲率半径 r_1 与校正片的厚度 t 相关，反之亦然。这个选择最终确定半月板的位置。半月板越靠近曲率中心，它的曲率就越大并且越薄。Schroeder（1987）和 Wilson（2007）提出了一种描述半月板厚度与其前表面曲率半径的近似关系的理论。图 14-8 描绘出了对于相对孔径为 $F/3$ 的相机镜头的这种相关曲线。对于任意一组 t 和 r_1 都可以从图上选取。r_1 的取值越大，半月板就越厚，相应的色差就越大。

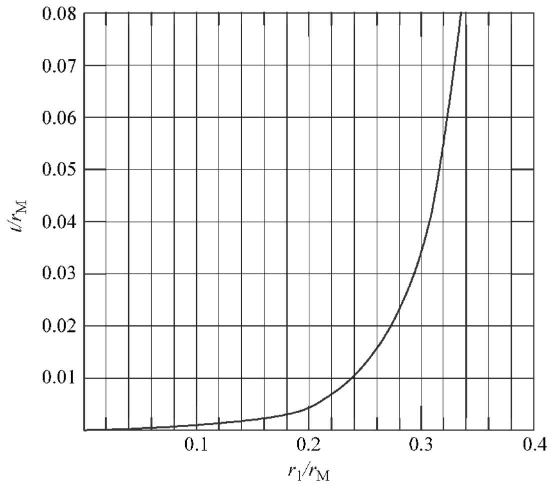


图 14-8　半月板前表面曲率半径（r_1）和它的厚度（t）之间的关系图表。反射镜的曲率半径是 r_M

值得注意的是，带状球差对于不同的 y 值，有不同的校正值。想要得到最好的校正视野和轴向色差，有时候需要在光阑处放置一个弱透镜器件（或零放大率的双胶合透镜）。一般的相机镜头相对孔径为 $F/1.0$，视场角为 30°。

14.3.3　鲍沃斯 – 马克苏托夫相机镜头

Maksutov（1944）设计了一种和 Bouwers 相机镜头不太一样的系统。它一样是基于同心原理的。不同的是，Maksutov 的设计轻微偏离中心，来校正消色差。所有表面的中心重合能够有效地校正倍率色差，但仍然存在一个很小的轴上色差。Maksutov 提出可以通过选择恰当的曲率来校正。半月板的有效焦距需为恒量，考虑折射率，半月板如式（4-40）中规定的：

$$t = \frac{n^2(r_2 - r_1)}{(n^2 - 1)} \tag{14-39}$$

式中，t 是厚度，r_2 和 r_1 是校正板的曲率半径。从中我们可以看出，如果以这种方式校正色差，则系统的各个中心并没有精确重合。当这样校正轴向色差时，校正好的视野要比用同心系统校正的视野小。所以，有时候会用一对半月板来代替校正片。

该系统的球差校正没有施密特相机的校正好，但是最大的好处是所有的表面都是球面。如果为了校正色差而使系统的中心不完全重合，就会出现彗差。

14.3.4　去像散同心施密特 – 卡塞格林相机镜头

这种相机镜头为双镜或者卡塞格林结构，包括双镜并且加入一个施密特修正板来消除球差。这种相机镜头有几种不同的基本结构。

施密特 – 卡塞格林系统是严格消球差的，根据定义，球差和彗差是被同时校正的。

Linfoot（1955b）设计了一种施密特－卡塞格林系统，存在很小的彗差和像散，并且最佳的焦面是平的。我们称这种系统为消像散系统。对于两个镜面都是球面镜的系统如果消像散，只能采用同心结构，但是佩兹伐曲面就会弯曲。一个同心施密特－卡塞格林相机镜头由两个同心球面镜，一个施密特修正板和光阑组成，修正板和光阑位于面镜的曲率中心（见图14-9）。这种同心结构能够避免除场曲以外所有的轴外像差、彗差和像散。修正板的作用同其在施密特相机镜头中一样，能够消除球差。总之，这个相机镜头中存在的像差只剩下佩兹伐场曲和色球差。

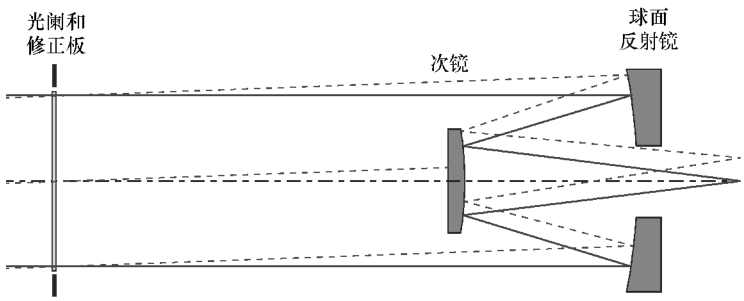


图14-9　消像散共轴施密特－卡塞格林相机镜头

同心条件可以写为

$$f_1 + f_2 = \frac{l}{2} \tag{14-40}$$

但是由式（14-19），f_2 的值由式（14-41）给出

$$f_2 = \frac{l}{2} - f_1 = \frac{m_s(f_1 + s)}{(1 + m_s^2)} \tag{14-41}$$

将 l 的值带入式（14-13），得

$$\left(m_s - \frac{s}{f_1} - 2\right)(m_s + 1) = 0 \tag{14-42}$$

有两个 m_s 的值满足上述关系式，但是 $m_s = -1$ 没有意义。因此，同心相机镜头的次镜放大率为

$$m_s = \frac{F}{f_1} = 2 + \frac{s}{f_1} \tag{14-43}$$

于是在一个同心双镜相机镜头中，系统的有效焦距和主镜焦距的比大概比2稍微大一点，这取决于 s 的值。这种系统的一个缺点是次镜的直径相对较大，另外一个缺点是它的修正板的非球量比具有相同有效焦距的传统施密特相机镜头的要大五倍。

14.3.5　平面场去像散施密特－卡塞格林相机镜头

如果施密特－卡塞格林相机镜头偏离同心结构，就会出现离轴像差。但是，这些可以通过把球面镜改成圆锥常数是非零的非球面来校正。这种方法并不能完全消除球差，我们还是要用到修正板。佩兹伐平面的条件为

$$f_1 = -f_2 \tag{14-44}$$

利用式（14-19），以及一些简单的代数计算，可得

$$-f_1=\frac{m_s(f_1+s)}{(1-m_s^2)} \tag{14-45}$$

解为

$$m_s=\frac{(1+s/f_1)+\sqrt{5+2(s/f_1)+(s/f_1)^2}}{2} \tag{14-46}$$

大约为

$$m_s=\left(\frac{F}{f_1}\right)=1.618+0.723\left(\frac{s}{f_1}\right) \tag{14-47}$$

以上次镜的放大率的值比 1.6 稍大，可以保证一个平的佩兹伐曲面，但是我们现在要校正球差、彗差和像散。由于这种类型相机镜头的有效焦距相对较小，所以与施密特相机镜头相似，而不是卡塞格林望远镜或者 RC 望远镜。由于施密特修正板的放大率小，不会引入像散或者彗差。这样，球差可以放到最后通过薄板修正。所以，我们要通过三个自由度——两个圆锥常数和光阑坐标，来修正两种像差，即像散和彗差。James G. Baker（1940a）对这种平面场施密特－卡塞格林相机镜头做了非常详细的研究。在他所著的书中，简单描述了四种不同的结构，施密特修正板处在距次镜三个不同距离的位置上。由于他给出的所有结构次级放大率都很低，他把像平面放在两个面镜之间，主镜之前。接下来，我们简单来描述下这四种 Baker 相机镜头。这些相机镜头的半视场角在 3°～5°，相对孔径接近 $F/3$。从 Baker（1940a）的文章与 Schroeder（1987）和 Wilson（2007）的书中可以找到更多详细的描述。Schroeder（1978）给出了一种只利用一个反射修正板改进 Baker 相机镜头的系统。

光阑在次镜和初级焦平面之间（Baker A）

在这种结构中，如图 14-10a 所示，光阑固定在主镜焦点所在的平面附近。由于系统不是同心的，而存在彗差、像散和佩兹伐场曲。调整圆锥常数可以校正彗差以及使子午像差曲线反对称来消除彗差，但是这样做会引入球差。于是，需要再次调整施密特修正板的非球面常数来再次消除球差。这个步骤要被重复至少两次。两个反射镜的表面都会变成椭圆形。这是最紧凑型的 Baker 望远镜，但是由于它需要一个非球面修正板，所以存在很大的色差。

光阑在距离焦平面大约 1.4f_1 的位置（Baker B 和 C）

这两种结构（见图 14-10b）的修正板在同一位置，比 Baker A 中距次镜的距离远。这两种结构的不同点是，B 型次镜为球面，主镜轻微椭圆化。而 C 型的主镜为球面，次镜轻微椭圆化。这两种结构的色差比 A 型小得多，因为修正板的修正量不是很大，但是有系统比较长的缺点。

光阑靠近初级焦平面（Baker D）

这种结构中（见图 14-10c），不仅为了校正彗差和像散，更为了校正畸变，主镜和次镜都要制作成非球面的。

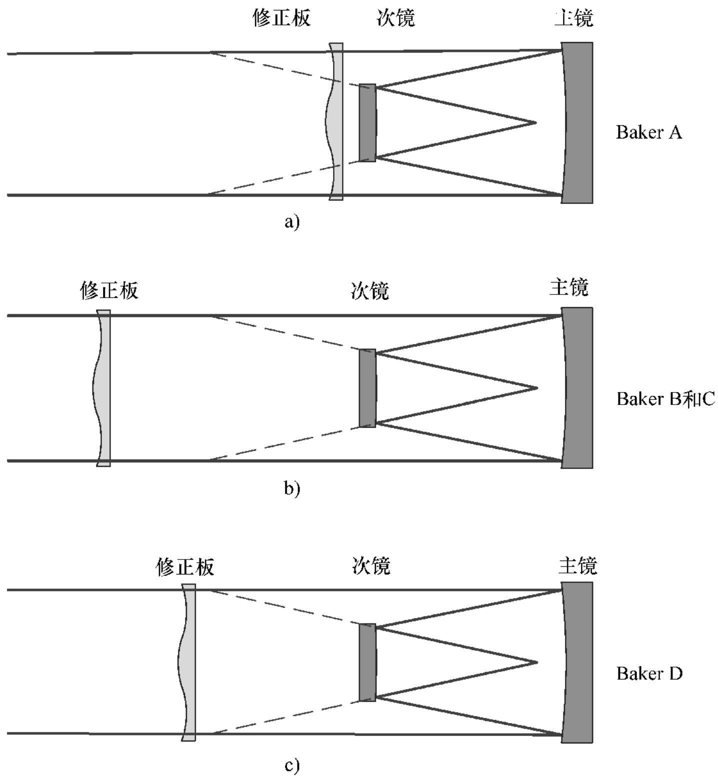


图 14-10　Baker 平场消像散施密特－卡塞格林相机

14.4　天文望远镜

14.4.1　牛顿望远镜

牛顿望远镜，如图 14-11 所示结构，为一个抛物面镜和一个在其焦点附近的小倾斜镜，使光束偏到系统的一边。这种望远镜只存在由抛物面引起的像差，如前面 11.8.3 节中提到的那样。

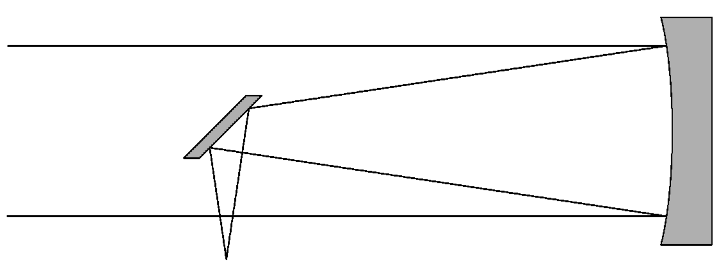


图 14-11　牛顿望远镜

如果焦距与直径比值很大（即大的焦比，$FN = F/D > 10$），球面镜的球差就可以忽略不计。于是，就可以用球面镜代替抛物面镜。如果考虑衍射极限的望远镜，什么时候使用球面镜一定要参考 5.7 节中提到的标准。这种情况应用于小口径的望远镜（镜径大约小于 20cm）；否则，限制因素就变成了大气扰动和视宁度。下面我们将给出一些常见的反射天文望远镜结构，它们大部分是共轴系统，但是离轴系统也有研究（Buchroeder，1970）。

14.4.2　卡塞格林望远镜

我们下面要用 5 种赛德尔像差来分析卡塞格林望远镜。

1. 球差

卡塞格林望远镜的球差在每个面镜上单独校正，进而在整个系统中得到校正。主镜为抛物面镜，并且，由于它的离心率为 1，它的圆锥常数为

$$K_1 = -1 \tag{14-48}$$

次镜为双曲面型。通过几何分析可得，这个抛物面的离心率 e 为

$$e = \frac{f_1 + s}{2l - f_1 + s} \tag{14-49}$$

于是，圆锥常数为

$$K_2 = -\left(\frac{f_1 + s}{2l - f_1 + s}\right)^2 = -\left(\frac{m_s + 1}{m_s - 1}\right)^2 \tag{14-50}$$

通过用圆锥常数将镜面修正成非球面的，引入的非球面的影响和球面的影响互相抵消，可以校正球差。计算由球面镜引起的球差很有用，由式（5-29），因为后面计算其他像差的时候要多次用到球差。对于一个球面的主镜，利用式（14-22）中角 i_1 的值，可得其对像差的贡献为

$$SphTC_1 = -\left(i_1 + \frac{y_1}{f_1}\right)Fi_1^2 = -\frac{y_1^3 F}{8 f_1^3} \tag{14-51}$$

同样的，对于球面型次镜，利用式（14-14）和式（14-26），可得

$$SphTC_2 = \frac{y_2}{y_1}(Fi_2 - y_1)i_2^2 = \frac{(f_1 + s)(F + f_1)(F - f_1)}{8f_1^3 F^2}y_1^3 \tag{14-52}$$

2. 彗差

卡塞格林望远镜的彗差可以通过把两个镜面中球面和非球面对彗差的影响加起来得到

$$Coma_S = Coma_S C_1 + Coma_S C_2 + Coma_S C_{asph1} + Coma_S C_{asph2} \tag{14-53}$$

现在，利用式（6-41）和式（6-91）以及条件 $\bar{y}_1$（靠近主镜的光阑）和 $SphTC + SphTC_{asph} = 0$（每个面镜单独的对球差进行校正），可得

$$Coma_S = SphTC\left(\frac{\bar{i}_1}{i_1}\right) + SphTC_2\left[\left(\frac{\bar{i}_2}{i_2}\right) - \left(\frac{\bar{y}_2}{y_2}\right)\right] \tag{14-54}$$

现在我们考虑式（14-51）和式（14-52）中球差的影响，并将其他值带入上述表达式。经过一些代数计算，可以证明，卡塞格林望远镜的弧矢彗差为

$$Coma_S = \left(\frac{y_1}{2F}\right)^2 h' \tag{14-55}$$

式（14-55）等于一个有相同有效焦距的抛物面镜的弧矢彗差。所以，卡塞格林望远镜的主平面为一个焦距等于望远镜有效焦距的抛物面镜。又由于主平面是双曲面，由式（11-36）可得

$$Coma_S = OSCh' = \left(\frac{F_m}{F} - 1\right)h' \tag{14-56}$$

式中，F_m 是抛物面镜边缘的有效焦距。

也可以直接证明，主平面是焦距为 F 的抛物面。于是，可以马上得出结论，卡塞格林望远镜的彗差等于与之等效的抛物面的彗差。

3. 像散

与弧矢彗差对应的，卡塞格林望远镜的横向弧矢像散为

$$AstL_S = AstL_S C_1 + AstL_S C_2 + AstL_S C_{asph1} + AstL_S C_{asph2} \tag{14-57}$$

利用式（6-49）和式（6-96）以及条件 $\bar{y}_1$ 和 $SphTC + SphTC_{asph} = 0$，通过和弧矢彗差同样的计算，可得

$$AstL_S = -SphTC_1\left(\frac{\bar{i}_1}{i_1}\right)^2\left(\frac{F}{y_1}\right) - SphTC_2\left[\left(\frac{\bar{i}_2}{i_2}\right)^2 - \left(\frac{\bar{y}_2}{y_2}\right)^2\right]\left(\frac{F}{y_1}\right) \tag{14-58}$$

于是，通过一些代数计算，可以证明卡塞格林望远镜的像散如下：

$$AstL_S = \frac{1}{2F}\left[\frac{m_s^2 + s/f_1}{m_s(1 + s/f_1)}\right]h'^2 \tag{14-59}$$

如果 S/f_1 与 m_s 相比非常小，卡塞格林望远镜的像散就等于等效的抛物面镜的像散乘以次镜的放大率。但是，图像大小的限制因素是彗差不是像散。

4. 佩兹伐场曲

轴向佩兹伐像差 Ptz 如下：

$$Ptz = \left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right)\frac{h'^2}{2} = -\left[\frac{m_s(m_s - s/f_1) - (m_s + 1)}{m_s(f_1 + s)}\right]\frac{h'^2}{2} \tag{14-60}$$

这个佩兹伐场曲和像散可以得到最理想的弯曲焦平面，从观察者一侧来看，是凸出的。最理想表面的曲率为

$$c_{best} = -\frac{(m_s^2 - 2)(m_s - s/f_1) + m_s(m_s + 1)}{m_s^2(f_1 + s)} \tag{14-61}$$

可以看出，曲率随着次镜放大率的增大而增大，但是为了弥补曲率的增大，视场的尺寸就减小了。

5. 畸变

畸变通常来说都很小，大约为1″的几百分之一。这个等级比大气视宁度小得多，因此通常不需要考虑。

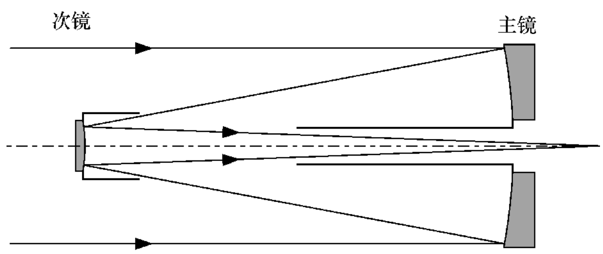


图14-12　卡塞格林望远镜

图14-12给出了一台特性如表14-3所示的卡塞格林望远镜

（Cornejo 和 Malacara，1973）。这台望远镜的光斑图如图 14-13 所示，像高为 11cm。我们可以看出图像不仅包含很大的彗差，还有一些像散。左手边的图与平坦的焦平面对应，右手边的图与最理想的焦平面对应。

表 14-3　卡塞格林望远镜和 RC 望远镜

曲率半径/mm	卡塞格林系统的圆锥常数	RC 系统的圆锥常数	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm
-11，340.00	-1.0000	-1.02737	2115.0	-4463.27
-3114.16	-2.4984	-2.77476	530.0	5363.27

孔径（F 数）：2115.0mm（12）。
焦距：25200.0mm。
主镜焦距：5670.0mm。
次镜横向放大率 m_s：4.44。
主镜顶点到次镜焦点的距离：900.0mm。
物距：无穷远。
最佳焦面的曲率半径：-1295.0mm。
像高（半视场角）：114.0mm（15′）。

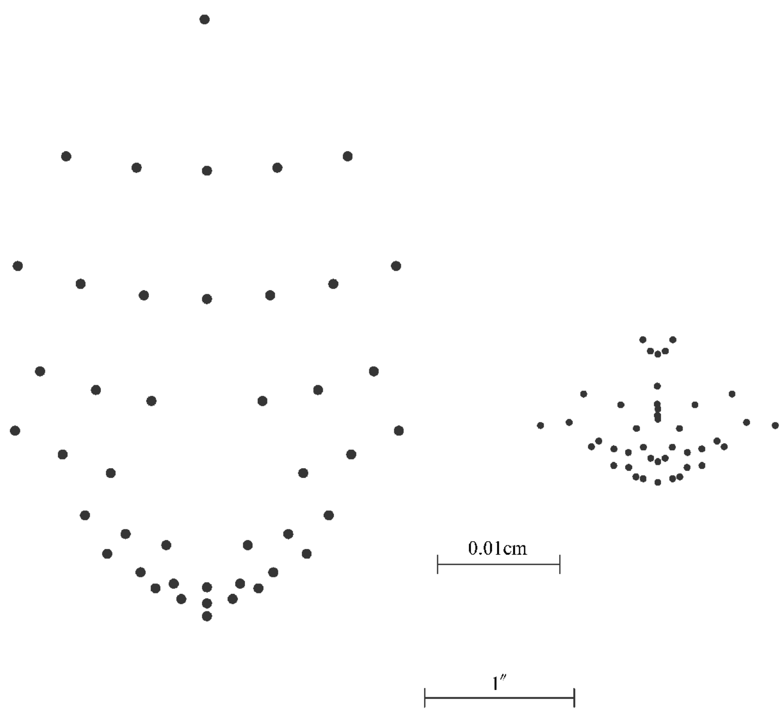


图 14-13　卡塞格林望远镜的点列图

14.4.3 RC望远镜

RC望远镜可以对球差和彗差进行校正。这样做的代价是两个面镜都为双曲面型，因此球差在主焦点上不被校正。大多数新式的天文望远镜都是这个结构的。

在保证球差校正的同时，以卡塞格林望远镜作为出发点，修正圆锥常数的值来校正弧矢彗差，可以用来计算圆锥常数的值。整个望远镜的横向球差为

$$SphT = SphTC_1 + SphTC_2 + SphTC_{\text{asph1}} + SphTC_{\text{asph2}} = SchTC_{\text{cassegrain}} + \Delta SphT = \Delta SphT \tag{14-62}$$

式中，下标1表示的是主镜，下标2表示的是次镜。最后一项为面镜圆锥常数改变而引入的球差。为了修正球差，这项必须为零。于是，由式（5-51），将 S 写作 y，可得

$$\Delta SphT = -\left(\frac{y_1^4 c_1^3}{u'_2}\right)\Delta K_1 + \left(\frac{y_2^4 c_2^3}{u'_2}\right)\Delta K_2 = 0 \tag{14-63}$$

利用式（14-9）、式（14-13）和式（14-19），可得双反射镜望远镜球差修正的条件为

$$\Delta K_2 = -\frac{f_1 f_2^3}{(f_1 - l)^4}\Delta K_1 = \frac{m_s^3\ (m_s + 1)^4}{(m_s^2 - 1)^3\ (1 + s/f_1)}\Delta K_1 \tag{14-64}$$

式中，ΔK_1 和 ΔK_2 是在卡塞格林望远镜中相应圆锥常数的改变量。这是对任何双镜系统的球差校正的一般条件，不仅仅是在RC望远镜中。

双镜系统的弧矢彗差如下

$$\begin{aligned} Coma_S &= Coma_S C_1 + Coma_S C_2 + Coma_S C_{\text{asph1}} + Coma_S C_{\text{asph2}} \\ &= Coma_{S\text{cassegrain}} + \Delta Coma_S \end{aligned} \tag{14-65}$$

式中，$\Delta Coma_S$ 是由圆锥常数的改变引起的弧矢彗差的改变量，由式（6-91）和式（14-63）可得

$$\Delta Coma_S = -\left(\frac{y_1^4 c_1^3}{u'_2}\right)\left(\frac{\bar{y}_1}{y_1}\right)\Delta K_1 + \left(\frac{y_2^4 c_2^3}{u'_2}\right)\left(\frac{\bar{y}_2}{y_2}\right)\Delta K_2 \tag{14-66}$$

由于光阑是与主镜相切的，第一项为零，再加上式（14-55）中卡塞格林望远镜的弧矢彗差，可得对于双镜望远镜有

$$Coma_S = \left(\frac{y_1}{2F}\right)^2 h' + \left(\frac{y_2^4 c_2^3}{u'_2}\right)\left(\frac{\bar{y}_2}{y_2}\right)\Delta K_2 \tag{14-67}$$

利用式（3-2），式（14-10）和式（14-12）可得

$$Coma_S = \left(\frac{y_1}{2F}\right)^2\left[h' - \frac{(l+s)^3}{2f_2^3}\bar{y}_2\Delta K_2\right] \tag{14-68}$$

再利用式（14-17）得

$$Coma_S = \left(\frac{y_1}{2F}\right)^2\left[1 - \frac{l(l+s)^3}{2f_2^3 F}\Delta K_2\right]h' \tag{14-69}$$

再根据式（14-11）和式（14-19），最终可得

$$Coma_S = \left(\frac{y_1}{2F}\right)^2\left[1 + \frac{(m_s - s/f_1)(m_s - 1)^3}{2m_s(m_s + 1)}\Delta K_2\right]h' \tag{14-70}$$

对于 RC 望远镜的特殊情况，$Coma_S=0$；于是，由这个关系式，我们可以计算出

$$\Delta K_2=\frac{2F(f_1+f_2-l)^3}{l(f_1-l)^3}=-\frac{2m_s(m_s+1)}{(m_2-s/f_1)(m_2-1)^3} \tag{14-71}$$

因此，RC 望远镜次镜的圆锥常数为

$$K_2=-\left(\frac{f_1+s}{2l-f_1+s}\right)^2+\frac{2F(f_1+f_2-l)^3}{l(f_1/l)^3}=-\left(\frac{m_s+1}{m_s-1}\right)^3-\frac{2m_s(m_s+1)}{(m_s-s/f_1)(m_s-1)^3} \tag{14-72}$$

把圆锥常数的增加量从式（14-41）带入式（14-37），可得

$$K_1=\frac{2(f_1-l)f_1^2}{F^2l}-1=\frac{2(f_1+s)}{m_s^2(m_sf_1-s)}-1 \tag{14-73}$$

望远镜的像散等于

$$AstL_S=\frac{1}{2F}\left[\frac{(2m_s+1)m_s+s/f_1}{2m_s(1+s/f_1)}\right] \tag{14-74}$$

最佳曲面的曲率为

$$c_{\text{best}}=-\frac{(m_s+1)}{m_s^2(f_1+s)}\left[m_s^2-(m_s-1)\left(\frac{s}{f_1}\right)\right] \tag{14-75}$$

图 14-14 给出了和卡塞格林望远镜尺寸相同的 RC 望远镜的光斑图，圆锥常数为

$$K_1=-1.02737$$
$$K_2=-2.77476$$

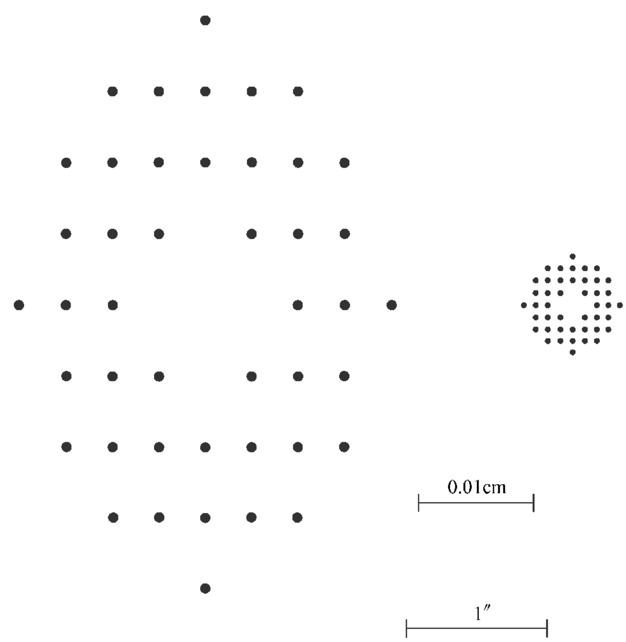


图 14-14　RC 望远镜的点列图

最佳曲面的曲率等于 -0.00806。光斑图对应的像高为 11cm。左图为焦平面的光斑图，右图为在弧矢和子午焦平面之间最佳曲面的光斑图。表 14-3 给出了这种望远镜的参数设计。

14.4.4 达-客（Dall-Kirkham）望远镜

制作像卡塞格林望远镜和 RC 望远镜中那样的双曲面次镜并不容易，其中存在很多问题，尤其对于业余的望远镜制造商。Dall-Kirkham 望远镜采用凸球面次镜代替双曲面镜，解决了这个问题。为了校正球差，主镜被做成椭球型。椭球型透镜比双曲型透镜更容易测试，这是一个优点。还有一个很重要的好处是，球形的次镜可以使望远镜对轴线未对准不是很敏感。

次镜的圆锥常数 $K_2=0$，因此，ΔK_2 等于卡塞格林结构中 K_2 的负值，如下

$$\Delta K_2=\left(\frac{m_s+1}{m_s-1}\right)^2 \tag{14-76}$$

将这个值带入式（14-63），可得

$$K_1=-1+\frac{(m_s^2-1)(1+s/f_1)}{m_s^2} \tag{14-77}$$

经计算，可得此望远镜的弧矢彗差为

$$Coma_S=\left(\frac{y_1}{2F}\right)^2\left[1+\frac{(m_s-s/f_1)\ (m_s^2-1)}{2m_s}\right]h' \tag{14-78}$$

假设 $m>>s/f_1$，上式可近似为

$$Coma_S=\left(\frac{y_1}{2F}\right)^2\left[\frac{(m_s^2+1)}{2}\right]h' \tag{14-79}$$

这种望远镜有一些缺点。这种结构与其他望远镜相比彗差和像散非常大。比如，彗差是卡塞格林望远镜中彗差的$(m_s^2+1)/2$ 倍。由于这个原因，有效视场的直径会减小。另外一个缺点是次镜会产生一些高阶球差，而主镜的圆锥常数不足以补偿。图 14-15 给出了与卡塞格林望远镜参数相同的 Dall-Kirkham 望远镜在焦平面的光斑图，圆锥常数如下

$$K_1=-0.7525$$
$$K_2=0.0000$$

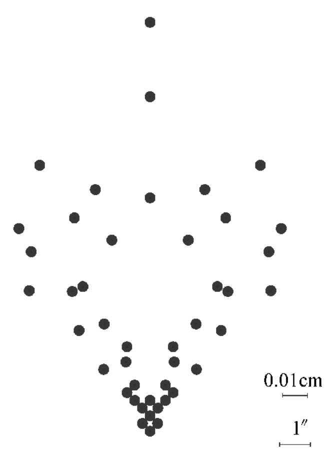


图 14-15 Dall-Kirkham 望远镜的点列图

14.4.5 格里（Gregory）望远镜

Gregory 望远镜，如图 14-16 所示，采用一个凹椭球次镜代替双曲型透镜。好处是凹椭球镜相对于双曲面凸镜更容易制造和测试。其最主要的缺点是，给定一个主镜的焦距，Gregory 望远镜的长度要比卡塞格林望远镜和 RC 望远镜长得多。

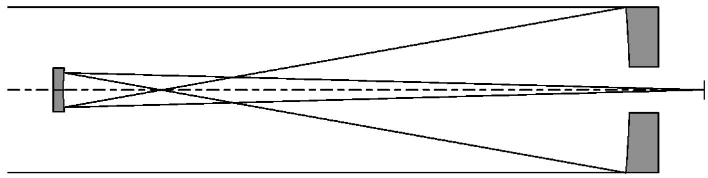


图 14-16　Gregory 望远镜

与卡塞格林望远镜类似，Gregory 望远镜可以通过适当地选择两个面镜的圆锥常数从而达到消球差的效果。这种情况下，主镜可以选择椭球型，而不是 RC 望远镜中的双曲型。

三反射镜的望远镜也有一些设计和运用，Robb（1978）在他的著作中曾经提到过。

14.4.6　施密特 – 卡塞格林望远镜

施密特 – 卡塞格林望远镜具有很大的次级放大率（约为 5），并且球面镜存在彗差、像散和佩兹伐场曲。次镜的曲率大于主镜的曲率而产生了一个负的佩兹伐曲率。如果施密特修正板沿光轴移动，像散几乎是不变的，但是彗差是变化的，会在某一位置穿过零点。在这个位置上，只存在像散和佩兹伐场曲。

如果修正板离次镜很近，为了使望远镜结构尽可能紧凑，次镜为椭球形（接近双曲形）可以使彗差减小到一个非常小的值。像散虽然不大但也不能忽略。修正板的曲率和非球面常数，以及次镜的圆锥常数需要通过光线追迹迭代的方法来获得。

图 14-17 和表 14-4 给出了一个直径 200mm 的施密特 – 卡塞格林望远镜。轴上像差图和离轴像差图如图 14-18 所示。离轴像差图是在最佳像面上测得的。

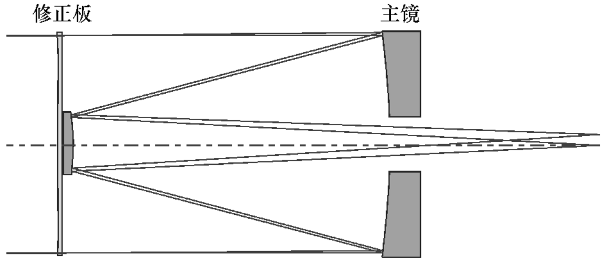


图 14-17　施密特 – 卡塞格林望远镜

表 14-4　施密特 – 卡塞格林望远镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
50，000.00	200.00	4.00	N – BK7
平面	200.00	308.80	空气
–800.00	202.62	–298.80	空气

（续）

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
-248.81	53.78	498.19	空气
-163.93			

孔径（F数）：200.0mm（10）。

焦距：2000.0mm。

主镜焦距：400.0mm。

次镜横向放大率 m_s：5.0。

主镜顶点至次镜焦点之间的距离：199.39mm。

物距：无穷远。

最佳焦面的曲率半径：-163.0mm。

像高（半视场角）：10.47mm（0.5°）。

施密特修正板的玻璃材料：N-BK7。

施密特修正板的非球面系数：$A_4=-7.83\times10^{-10}$，$A_6=8.00\times10^{-18}$。

次镜的圆锥常数：-0.84。

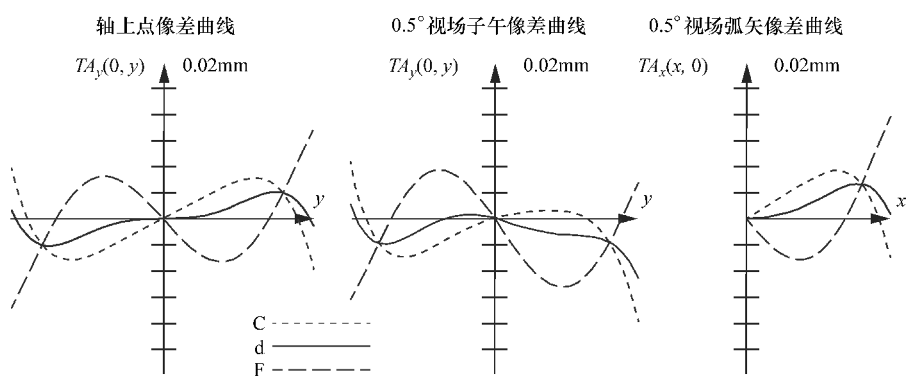


图14-18 施密特-卡塞格林望远镜的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

14.4.7 马克苏托夫-卡塞格林望远镜

马克苏托夫-卡塞格林望远镜与施密特-卡塞格林望远镜类似，不同点在于前者的修正板与马克苏托夫相机镜头中的一样，为一弯月形透镜（见图14-19）。次镜为在弯月形透镜凸面中心的一独立器件或者是修正板凸面中心一小块反射区域。如果系统是同心的，并且光阑位于所有光学面的曲率中心，那么该系统就不存在彗差。这种情况下，次镜放大率大约为2，如前面提到过的那样。因此，这个系统可以被当作相机镜头。然而，如果是一个次镜放大率大约为5的望远镜，它的光阑与修正板相切，系统就不是同心的，并且存在很大的彗差。可以移动修正板上的光阑来减小彗差，但是这会使系统非常长。这种系统的另外一个缺点是，除非弯月形透镜是非球面镜，否则带状球差非常大。

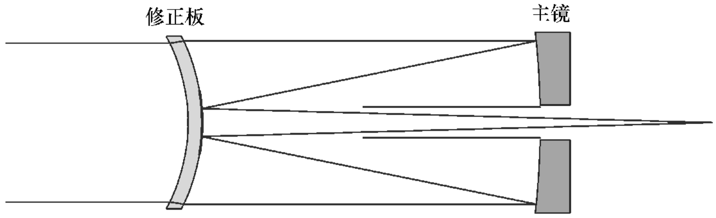


图 14-19　马克苏托夫–卡塞格林望远镜

14.4.8　折轴焦点结构和内氏焦点结构

在大型天文望远镜中，当观测不同行星时，二次焦点的位置会绕望远镜移动。在超大型的望远镜中，将次级焦点固定在一个空间位置上会比较方便。如果距离 S 非常大，光线可通过反射镜转到转轴上，如图 14-20 所示。唯一不方便的地方是，有些情况下有效焦距会非常大。另外一个缺点是，当望远镜随着行星移动时，图像会旋转。

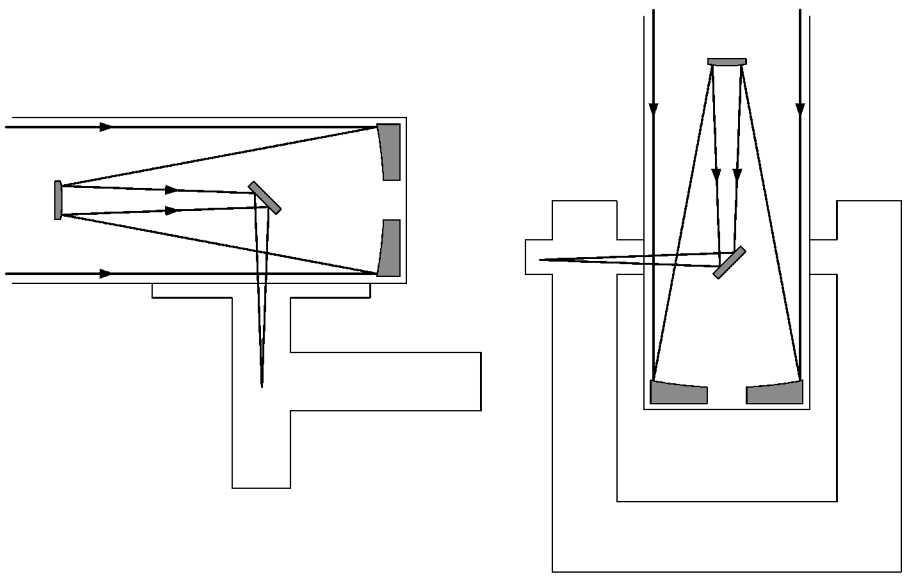


图 14-20　折轴焦点和内氏焦点结构

与此类似，如果望远镜有角距装置，光线可以转到横轴上，与折轴焦点有相同的缺点和优点。

14.5　像场校正镜

望远镜的像场校正镜是放置在焦面附近修正一部分像差，改善成像质量的校正镜。已经有许多学者研究过这种校正镜，例如 Ross（1935），Rosin（1961，1964，1966），

Wynne（1965）和 Schulte（1966b）。

14.5.1　单视场致平器

场镜是放置在像平面上的单个正透镜或者负透镜。这个透镜对像差的贡献除了佩兹伐场曲之外，非常小，几乎为零。可以看出，对于一个薄透镜系统的佩兹伐曲率为

$$\frac{1}{r_{Ptz}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n_j f_j} \tag{14-80}$$

通常，由于像散的存在，我们不希望佩兹伐曲面是平坦的。通常的需要是在最佳曲面尽量平坦。如果分别用 r_{end} 和 r_{sys} 表示佩兹伐曲面曲率半径的期望值和初始值，则有

$$\frac{1}{r_{\text{end}}} = \frac{1}{r_{\text{sys}}} + \frac{1}{nf} \tag{14-81}$$

式中，n 和 f 是场镜的折射率和焦距。图 14-21 给出了一种为 RC 望远镜设计的场镜，它的设计参数在表 14-5 中列出。

图 14-22 给出了带有这种场镜的 RC 望远镜的光斑图。我们可以清楚地看到场镜引入的一个很小的倍率色差。

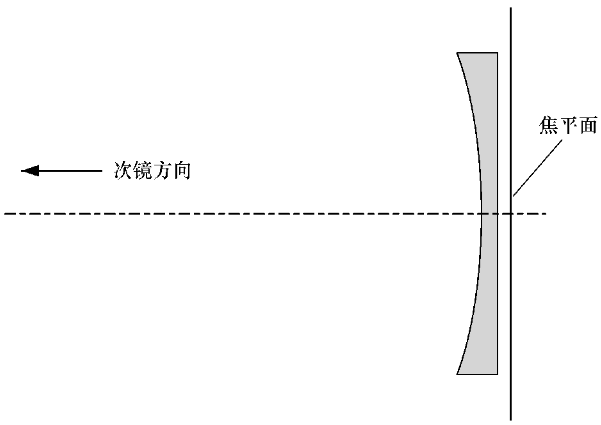


图 14-21　单片场镜

表 14-5　RC 望远镜的场曲校正板

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
-420.2	250.0	12.7	熔融石英
平面	250.0	10.0	空气

至望远镜次镜的距离：5344.8mm。
像高：110.0mm。

14.5.2　罗斯（Ross）校正器

Ross（1935）提出，抛物镜或者卡塞格林望远镜的彗差可以通过在焦点处放置一对透镜来消除。这个透镜是一个屈光度几乎为零的双分离式透镜，如图 14-23 所示。这个

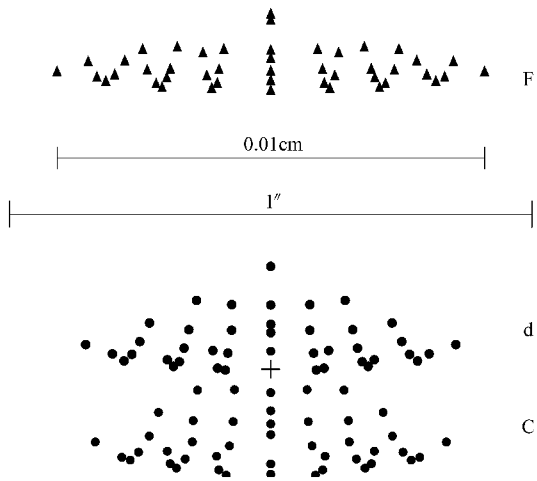


图 14-22　单片场镜的点列图（有彩色插图）

系统中的彗差和场曲被极大地减少，同时不会引入太多球差。由于屈光度几乎为零，两个透镜使用相同的材质可以得到很好的色散修正。通过使整个系统向焦平面靠近，可以减少球差。然而，随着透镜向焦点靠近，透镜曲率就会变大，就会引入高阶像差。Wynne（1965）提出采用三片透镜的系统是一种解决方法，可以得到很好的校正球差。

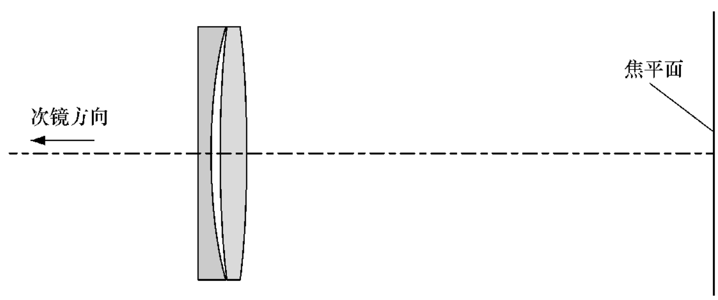


图 14-23　Ross 校正器

14.5.3　韦恩（Wynne）校正器

RC 望远镜在次级焦点处成的像没有球差和彗差，但是存在像散和相对较大的场曲。Wynne 通过采用一个屈光度几乎为零的双透镜系统的方法，在不引入其他像差的情况下校正了像散和场曲。如图 14-24 所示，复合透镜后面跟着一个发散透镜，中间为半月形。表 14-6 给出了 RC 望远镜中的这种类型的校正器，图 14-25 为对应的点列图。

14.5.4　非球面校正器

前面已经解释过，在 RC 望远镜中，唯一明显的像差是像散和场曲。Schulte（1966b）和 Gascoigne（1973）指出，在靠近二次焦点放置一个与施密特修正板类似的非球面修正板，可以在不引入任何彗差和球差的情况下，消除像散和大部分的场曲。这

种系统比 Wynne 校正器要简单，但是更难制造。

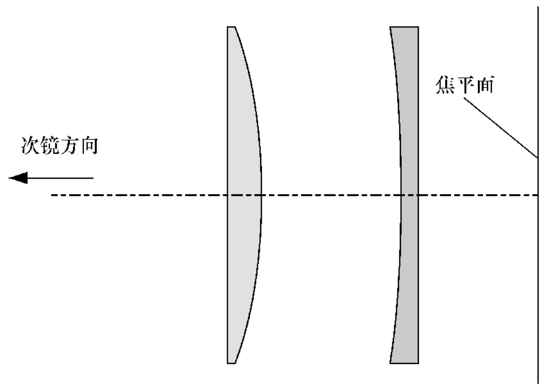


图 14-24 RC 望远镜的 Wynne 校正器

表 14-6 RC 望远镜中的 Wynne 校正器

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
平面	250.0	25.4	熔融石英
-948.9	250.0	103.8	空气
-404.5	250.0	12.7	熔融石英
-14797.9	250.0	79.3	空气

至次镜的距离：5143.8mm。
像高：110.0mm。

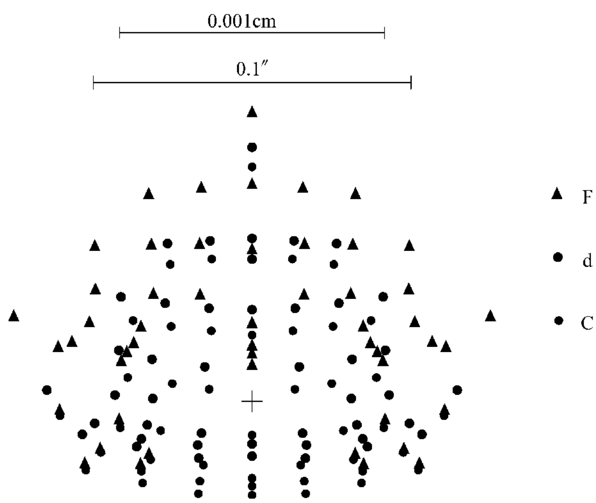


图 14-25 Wynne 校正器的点列图（有彩色插图）

14.6 多镜面望远镜

不同于使用一个单独的又大又厚重的面镜，多镜面望远镜是由小面镜阵列组成，如图 14-26 所示。这种望远镜的聚光能力等于一个单独面镜的集光能力乘以面镜数量。来自这些面镜的光线汇聚于这些小平面镜的公共焦点，如图 14-27 所示。

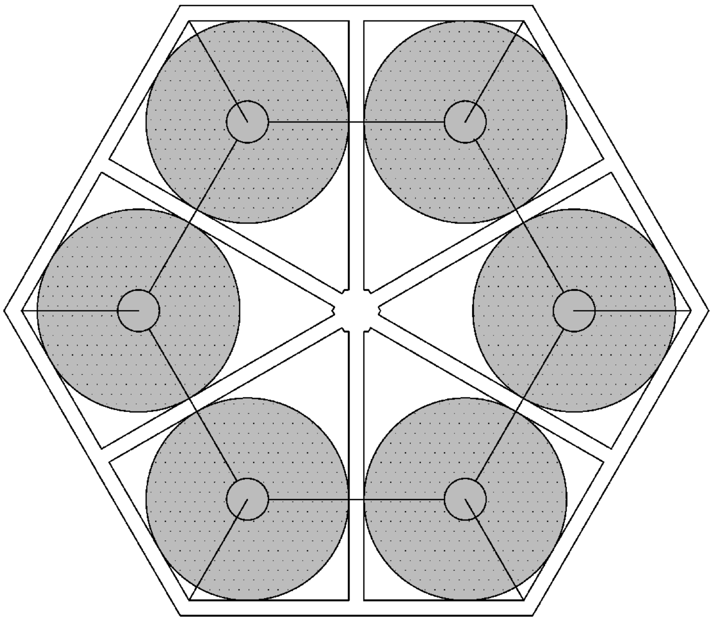


图 14-26 在多面反射镜望远镜中的反射镜阵列

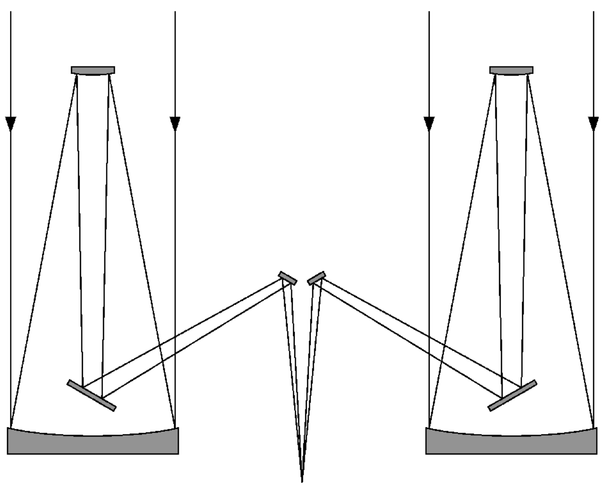


图 14-27 在多面反射镜结构中的光路结构

每个面镜都产生它自己的衍射像。当这些像重叠的时候，它们的振幅相加。但是这些叠加的振幅的波阵面之间可能是等相位或非等相位的。如果不精确控制这些波阵面的相位，结果图像就近似为所有光强的总和。于是，最终的图像尺寸就近似等于每个面镜单独成像的尺寸，这就是非相干多镜面望远镜。这种望远镜的分辨力不会比单个面镜的分辨力大，但是集光本领是对应区域内所有面镜的总和。

然而在一些情况下，我们需要相干望远镜，能够把同相位的光束进行叠加。这可以通过在波长范围内，采用机械方式调整这些反射镜的相位，实现光束同相位叠加。于是，叠加的图像就比单个反射镜的图像要小，这就提高了望远镜的分辨力，分辨力大约为单个镜面直径等于面镜阵列直径的大型望远镜的分辨力。大部分新式的多镜面望远镜都是这个类型的。Meinel 等（1983）已经发表了关于各种类型的相干孔径阵列的衍射成像详细完整的研究。读者可以自行查阅研究。

14.7　主动光学和自适应光学

由于光学器件的缺陷和大气扰动，点光源成像的波前可能发生变形。这种波前畸变可以通过引入相反的变形来消除，这个过程称作主动光学或者自适应光学。这个学科是非常新的，但是已经被很多研究者仔细研究过，例如 Tyson 和 Ulrich（1993），可以找到许多其他的参考资料。

为了引入合适的补偿，测量波前的形状，我们需要引入一个靠近观测物的点光源作为参考波阵面。这样，需要在观察点附近有一颗单独的明亮的恒星，这种条件不可能总是满足，但是可以通过望远镜向所指的方向发射一束强激光来人为地制造这样一个点光源。激光束在上层大气制造一个荧光点，作为需要的参考光源。我们需要等间隔地发射脉冲激光，以达到足够的频率测量波阵面。

图 14-28 给出了用来补偿大气扰动的自适应光学器件的简易图。来自参考光源的光线穿过望远镜，进入一个特殊的光学系统以校准光线。这个光学系统也使望远镜的出瞳成像在补偿面镜上。

波前变形经由翻转倾斜镜和变形镜组成的系统得到补偿。这些面镜可以通过改变位置来补偿波前变形，但是不能轻易补偿波前倾斜。这时就需要翻转倾斜镜。

进入系统的光线产生的红外参考波前经分色镜反射，送到波前测量器件中。此器件得到的信息再传入计算机。于是，计算机通过数字－模拟控制单元控制变形镜和翻转倾斜镜补偿波前畸变。

显而易见，变形镜不仅能够补偿大气扰动还能补偿光学缺陷。如果系统存在一个很大的时间常数，不能够快速补偿大气扰动，那么就只能补偿光学系统的缺陷。于是，这个系统就只能称作自适应光学系统，而不能称作主动光学系统。

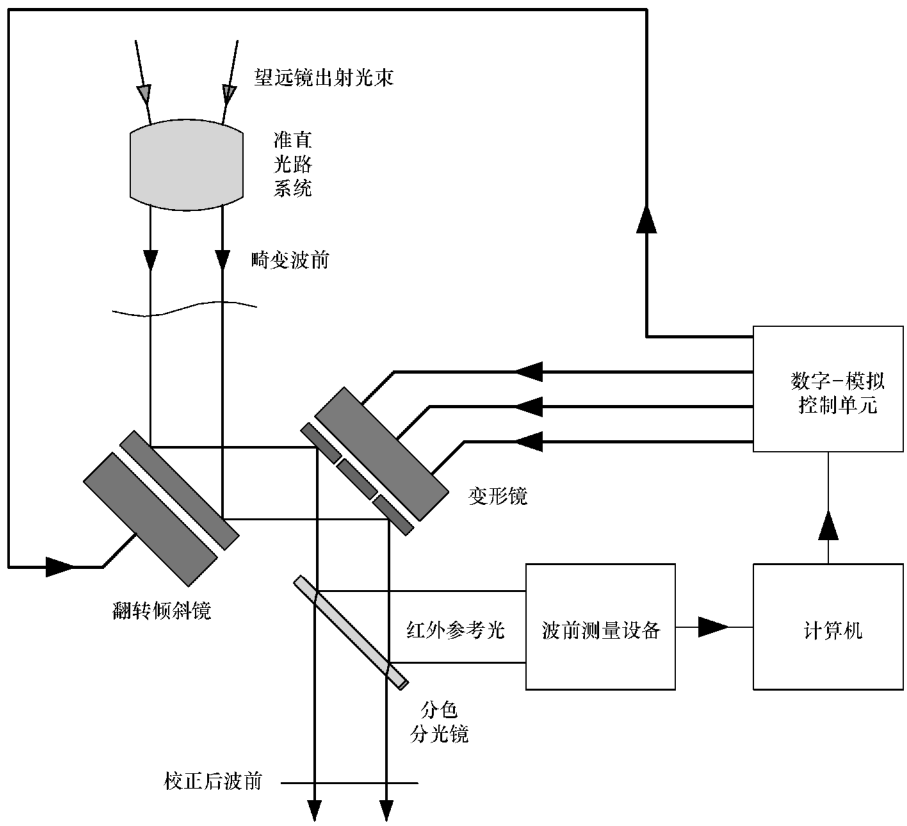


图 14-28　自适应光学系统的基本结构

参考文献

[1] Baker, J. G., "A Family of Flat – Field Cameras, Equivalent in Performance to the Schmidt Camera," *Proc. Am. Philos. Soc*, **82**, 339 – 349 (1940a).

[2] Baker, J. G., "The Solid – Glass Schmidt Camera and a New Type Nebular Spectrograph," *Proc. Am. Philos. Soc*, **82**, 323 – 338 (1940b).

[3] Baker, J. G., "Planetary Telescopes," *Appl. Opt.*, **2**, 111 – 129 (1963).

[4] Benford, J. R., "Design Method for a Schmidt Camera with a Finite Source," *J. Opt. Soc. Am.*, **34**, 595 – 596 (1944).

[5] Bouwers, A., *Achivements in Optics*, Chap. 1, Elsevier, Amsterdam (1946).

[6] Bowen, I. S., "Schmidt Cameras," in *Stars and Stellar Systems*, *I. Telescopes*, G. P. Kuiper and B. Middlehurst, eds., University of Chicago Press, Chicago, IL (1960).

[7] Bowen, I. S., *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, Vol. 5, p. 45, Annual Reviews, Pola Alto, CA (1967).

[8] Buchroeder, R., "Tilted – Component Telescopes. Part 1 Theory," *Appl. Opt.*, **9**, 2169 – 2171 (1970).

[9] Buchroeder, R., "Proposed 131 cm. f/3.5 Achromatic Schmidt Telescopes," *Appl. Opt.*, 11, 2968 – 2971 (1972).

[10] Churilovskii, V. N. and Goldis, K. I., "An Apochromatic Catadioptric System Equivalent to a Parabolic Mirror," *Appl. Opt.*, **3**, 843 – 846 (1964).

[11] Cornejo, A. and Malacara, D., "Direct Design Solution for Cassegrain Shields," *Boletín de los Observatorios de Tonantzintla y Tacubaya*, **4**, 246 – 252 (1968).

[12] Cornejo, A. and Malacara, D., "Design of a Ritchey – Chrétien Telescope for the INAOE," *Boletín del Instituto de Tonantzintla*, **1**, 35 – 44 (1973).

[13] Cornejo, A. and Malacara, D., "Required Accuracy in the Radius of Curvature of a Primary Astronomical Telescope Mirror", *Boletín del Instituto de Tonantzintla*, **1**, 293 – 294 (1975).

[14] Cornejo, A., Malacara, D., and Cobos, F., "A Schmidt Cassegrain Camera for Use with an Image Intensifier Tube", *Boletín de los Observatorios de Tonantzintla y Tacubaya*, **5**, 319 – 323 (1970).

[15] Davies, P. K., "Baffle Design for Telescopes with Tiltable Secondary Mirrors," *Proc. SPIE*, **766**, 163 – 168 (1987).

[16] DeVany, A. S., "Optical Design for Two Telescopes," *Appl. Opt.*, **2**, 201 – 204 (1963).

[17] DeVany, A. S., "Schmidt – Cassegrain Telescope System with a Flat Field," *Appl. Opt.*, 4, 1353 (1965).

[18] Dimitroff, G. Z. and Baker, J. J., *Telescopes and Accessories*, Blakiston, Philadelphia, PA (1945).

[19] Erdös, P., "Mirror Anastigmat with Two Concentric Spherical Surfaces," *J. Opt. Soc. Am.*, 49, 877 – 886 (1959).

[20] Gascoigne, S. C. B., "Recent Advances in Astronomical Optics," *Appl. Opt.*, **12**, 1419 – 1429 (1973).

[21] Jones, R. C., "Coma of a Modified Gregorian and Cassegrainian Mirror System," *J. Opt. Soc. Am.*, 44, 623 – 630 (1954).

[22] LaVaughn Hales, W., "Optimum Cassegrain Baffle Systems," *Appl. Opt.*, **31**, 5341 – 5344 (1992).

[23] Linfoot, E. H., "The Schmidt Camera," in *Recent Advances in Optics*, Chap. Ⅲ, Oxford University Press, London (1955a).

[24] Linfoot, E. H., "Plate Diagram and its Analysis," in *Recent Advances in Optics*, Chap. IV, Oxford University Press, London (1955b).

[25] Linfoot, E. H. and Wolf, E., "On the Corrector Plates of Schmidt Cameras," *J. Opt. Soc. Am.*, 39, 752 – 756 (1949).

[26] Lucy, F. A., "Exact and Approximate Computation of Schmidt Cameras: Ⅰ. Classical Arrangement," *J. Opt. Soc. Am.*, **30**, 251 – 254 (1940).

[27] Lucy, F. A., "Exact and Approximate Computation of Schmidt Cameras: Ⅱ. Some Modified Arrangements," *J. Opt. Soc. Am.*, **30**, 358 – 361 (1941).

[28] Maksutov, D. D. , "New Catadioptr ic Meniscus Systems," *J. Opt. Soc. Am.* , 34, 270 – 284 (1944) .

[29] Malacara, D. , "Design of Telescopes of the Cassegrain and Ritchey – Chrétien Types," *Boletín de los Observatorios de Tonantzintla y Tacubaya*, **4**, 64 – 72 (1965) .

[30] Malacara, D. , "Design of a Cassegrain – Maksutov Telescope," *Boletín del Instituto de Tonantzintla*, **1**, 221 – 225 (1975) .

[31] Mallama, A. , "The Limiting Magnitude of a CCD Camera," *Sky and Telescope*, 84 (1993) .

[32] Maxwell, J. , *Catadioptric Imaging Systems*, American Elsevier, New York (1972) .

[33] Meinel, A. B. , "Design of Reflecting Telescopes," in *Stars and Stellar Systems*, *I. Telescopes*, G. P. Kuiper and B. Middlehurst, eds. , University of Chicago Press, Chicago, IL (1960) .

[34] Meinel, A. B. , "Astronomical Telescopes," in *Applied Optics and Optical Engineering*, R. Kingslake, ed. , Vol. V, Chap. 6, Academic Press, San Diego, CA (1969) .

[35] Meinel, A. B. , Meinel, M. P. , and Woolf, N. J. , "Multiple Aperture Telescope Diffraction Images," in *Applied Optics and Optical Engineering*, R. R. Shannon and J. C. Wyant, eds. , Vol. IX, Chap. 5, Academic Press, San Diego, CA (1983) .

[36] Prescott, R. , "Cassegrainian Baffle Design," *Appl. Opt.* , **7**, 479 – 481 (1968) .

[37] Robb, P. , "Three Mirror Telescopes," *Appl. Opt.* , **17**, 2677 – 2685 (1978) .

[38] Rosin, S. , "Optical Systems for Large Telescopes," *J. Opt. Soc. Am.* , **51**, 331 – 335 (1961) .

[39] Rosin, S. , "Corrected Cassegrain System," *Appl. Opt.* , **3**, 151 – 152 (1964) .

[40] Rosin, S. , "Ritchey – Chrétien Corrector System," *Appl. Opt.* , **5**, 675 – 676 (1966) .

[41] Ross, F. E. , "Lens Systems for Correcting Coma of Mirrors," *Astrophys. J.* , **81**, 156 – 172 (1935) .

[42] Schroeder, D. , "All Reflecting Baker – Schmidt Flat – Field Telescopes," *Appl. Opt.* , **17**, 141 – 144 (1978) .

[43] Schroeder, D. , *Astronomical Optics*, Academic Press, San Diego, CA (1987) .

[44] Schroeder, D. , *Selected Papers on Astronomical Optics*, SPIE Milestone Series, Vol. MS 73, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, WA (1993) .

[45] Schulte, D. , "Anastigmatic Cassegrain Type Telescopes," *Appl. Opt.* , **5**, 309 – 311 (1966a) .

[46] Schulte, D. , "Prime Focus Correctors Involving Aspherics," *Appl. Opt.* , **5**, 212 – 217 (1966b) .

[47] Shafer, D. R. , "New Types of Anastigmatic Two – Mirror Telescopes," *J. Opt. Soc. Am.* , 66, 1114 (1976) .

[48] Song, N. , Yin, Z. , and Hu, F. , "Baffles Design for an Axial Two – Mirror Telescope," *Opt. Eng.* , **41**, 2353 – 2356 (2002) .

[49] Synge, J. L. , "The Theory of the Schmidt Telescope," *J. Opt. Soc. Am.* , **33**, 129 – 136 (1943) .

[50] Toyoda, M. , "Closed – Form Representations for Third Order Aberrations of Two – Aspherical Mirror Aplanats with the Mirror Tilt and Decenter", *Opt. Review*, **18**, 441 – 447 (2011) .

[51] Tyson, R. K. and Ulrich, P. B. , "Adaptive Optics," in *The Infrared & Electro – Optical Systems*

Handbook, Vol. 8: *Emerging Systems and Technologies*, Chap. 2, S. R. Robinson, ed., Infrared Information Analysis Center, Ann Arbor, MI; SPIE, Optical Engineering Press, Bellingham, WA (1993).

[52] Villa, J., "Catadioptric Lenses," *Spectra*, 1, 57 (March - April), 49 (May - June) (1968).

[53] Waland, R. L., "Flat Field Maksutov - Cassegrain Optical Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, 51, 359 - 366 (1961).

[54] Wetherell, W. B. and Rimmer, M., "General Analysis of Aplanatic Cassegrain, Gregorian and Schwarzchild Telescopes," *Appl. Opt.*, **11**, 2817 - 2832 (1972).

[55] Wilson, R. N., *Reflecting Telescope Optics I*, 2nd Ed., Springer, Berlin (2007).

[56] Wormser, E. M., "On the Design of Wide Angle Schmidt Optical Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **40**, 412 - 415 (1950).

[57] Wynne, C. G., "Field Correctors for Large Telescopes," *Appl. Opt.*, 4, 1185 - 1192 (1965).

[58] Wynne, C. G., "Ritchey - Chrétien Telescopes and Extended Field Systems," *Astrophys. J.*, **152**, 675 - 694 (1968).

[59] Yoder, P. R., Patrick, F. B., and Gee, A. E., "Analysis of Cassegrain - Type Telescopic Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **43**, 1200 - 1204 (1953a).

[60] Yoder, P. R., Patrick, F. B., and Gee, A. E., "Permitted Tolerance on Percent Correction of Paraboloidal Mirrors," *J. Opt. Soc. Am.*, **43**, 702 - 703 (1953b).

[61] Young, A. T., "Design of Cassegrain Light Shields," *Appl. Opt.*, **6**, 1063 - 1067 (1967).

第 15 章　目视系统和无焦系统

15.1　目视光学系统

在目视光学系统中，最终的图像探测器是人的眼睛。在设计这些系统的时候，必须有一些特殊的考虑。例如，人眼的分辨率在视网膜中央凹处近似为 1′；另一个重要的特征是眼睛可以在眼窝中转动；第三，眼睛有聚焦的能力，叫视觉调节。本章将研究这些系统。在 Walker（2000）的书中可以找到更多详细的内容。

15.1.1　在目视光学系统中出瞳的位置

在目视仪器中的最终像是在人的视网膜上形成的。如果眼睛屈光正常，也就是说，如果眼睛没有折射误差，仪器产生的虚像一定在无穷远处。目视仪器与眼睛的结合是通过将眼睛靠近仪器的出瞳，出瞳到系统最后光学面的距离叫作出瞳距离。

出瞳距离应该至少为 10mm 以便为睫毛提供足够的空间，20mm 将是更舒适的观察距离，或者针对戴眼镜的人需要甚至 30mm 的出瞳距离。对于步枪瞄准，给步枪后坐力留下空间，出瞳距离应该更大，至少为 60mm。较大的出瞳距离需要较大的目镜，这将让仪器更加昂贵。

另一个要考虑的是，目视系统的出瞳应在眼睛的最佳观测位置。通常规定仪器的出瞳应该与观察眼睛的瞳孔在同一个平面。然而，在一些仪器中，最佳位置是在眼球的中心。

为了研究这个问题，如图 15-1 所示，展示了目视系统的出瞳和观察眼睛的位置图。在图 15-1a 和图 15-1b 中，系统的出瞳和眼睛的瞳孔是在同一个平面。如果被观测的物体很小，被放在视场的中心，整个视场都可以被看到，但仅有中心的物是清楚的。当物在边缘时，眼球围绕其中心转动后才能观察到它，如图 15-1b 所示。现在，物在视场的边缘能被清楚地看到但更暗了，除非头稍微侧向移到中心，眼睛的瞳孔再次对准系统的出瞳。因此，如果引起兴趣的物很小，在光轴邻近区域，那么观察眼睛与出瞳对应的位置是正确的。一个典型的例子就是目视天文望远镜。

考虑一个例子，当感兴趣的观测物体在整个视场中是均匀分布的，系统的出瞳在眼球的中心，如图 15-1c 和图 15-1d 所示。现在，眼睛在眼眶中必须在规定的时间内连续移动去观察物。视场内任何位置可观察的物的有效亮度都相同。然而，放在观测光轴相反方向的物将非常暗，甚至看不清。如果眼睛转到该方向观察，该物体又变得明亮清楚。这种出瞳的位置对于眼镜和观测物遍布整个视场的广角系统，是非常合适的。如果光学系统的出瞳比人眼的瞳孔小，沿着光轴眼睛位置的容许范围很大。

所有先前考虑的前提是假设目视光学仪器的出瞳与观察者的瞳孔无关。在一些光学

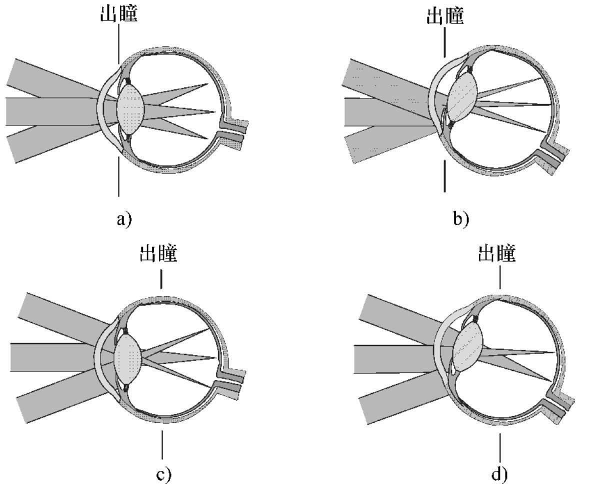


图 15-1 相对于目视系统的出瞳，眼睛观察的不同位置
a）位置一 b）位置二 c）位置三 d）位置四

系统中这个并不准确，在这些系统中系统的光阑是观察者的瞳孔，如放大镜、眼镜片或伽利略望远镜。在这些情况中，出瞳的位置明显应该在眼球的旋转中心。

15.1.2 人眼的光学模型

在目视光学系统的光学设计的计算分析中，结合人眼模型有时是可取的。Walker（2000）已经描述了这样的一个模型，如图 15-2 所示，数据在表 15-1 中，瞳孔直径的变化范围近似为 2~6.0mm，与光的强度有关，但在这个模型中，假设一个固定的平均值为 4.0mm。眼睛晶状体的折射率并不是完全一样的，在这个模型中，取眼睛晶状体的背面为一个双曲面形，二次曲线常数为 −4.5，用以模拟眼睛晶状体非均匀的折射率。

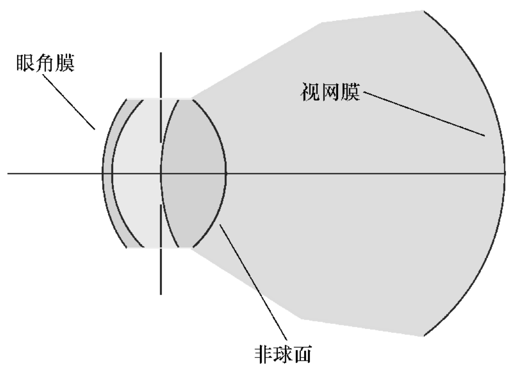


图 15-2 人眼的光学模型

当计算机用数值追踪光线分析目视系统的轴外性能时，需要加上眼睛模型，且人眼模型必须绕所分析系统的出瞳中心旋转。

一个可供选择避免在每个离轴点旋转人眼模型的方法是使用一个眼睛模型系统，这个系统在轴上和离轴都能产生高质量的光学像。这个眼睛模型的主要要求是像的大小有一个远小于 1′的角直径。例如一个光阑在曲率中心的凹面镜形成与镜子同心的球形焦面，如图 11-31a 所示。这个系统的球差必须足够小，以便像的角直径小于 1′。一个曲率半径为 30.184mm（$f = 15.092$mm），直径为 4mm 的反射镜产生的横向球差为 1′的像。曲率半径为 687.4mm 的反射镜，产生的球差为 0.044′，0.1mm 的横向球差对应的角像

差为 1′。

表 15-1　人眼的光学模型

曲率半径/mm	锥度系数	间隔（中心厚度）/mm	折射率（V_d = 55.0）
7.8	0.0	0.6	1.377
6.4	0.0	3.0	1.336
10.1（5.95）	0.0	4.0	1.411
−6.1（−4.50）	−4.5	17.2	1.337
−12.5	0.0	—	—

入瞳直径（平均值）：4.0mm。
括号里的数值表示人眼调节后的数值。

15.2　望远系统的基本原理

一个目视望远镜由两个透镜组成，如图 15-3 所示。靠近物的透镜叫作物镜，靠近眼睛的透镜叫作接目镜或目镜。物镜在它的焦平面上形成了一个物的实像。然后，接目镜扮演了一个放大镜，形成了一个被眼睛观察的虚像。如果物裸眼观察张角为 α，通过望远镜观察的张角为 β。这时，望远镜的角放大率为

$$M = -\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} \tag{15-1}$$

式中，如果角 α 和 β 的斜率是正的（见图 15-3），那么它们是正的。式（15-1）可以通过第 1 章角放大率的定义推出。假设望远镜的瞳孔与物镜紧密接触。如果物镜的焦距为 f_1，目镜的焦距为 f_2，l 为目镜到出瞳的距离，可以写为

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{l} - \frac{1}{f_1 + f_2} \tag{15-2}$$

假设被观察的物在无穷远，这样物镜和目镜分开的距离等于两个透镜焦距的和，于是

$$l = \frac{f_2}{f_1}(f_1 + f_2) \tag{15-3}$$

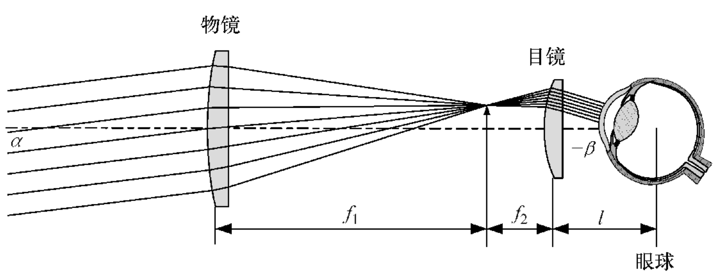


图 15-3　望远镜系统的基本结构

现在，从图 15-3 中，可以看出角的放大率为

$$M = -\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = -\frac{f_1 + f_2}{l} \tag{15-4}$$

因此，消去表达式中l的值，可以得到

$$M = -\frac{f_1}{f_2} \tag{15-5}$$

如果物镜（入瞳）的直径为D_1，出瞳的直径为D_2，从图15-4中可以得出放大率的大小为

$$|M| = \frac{D_1}{D_2} \tag{15-6}$$

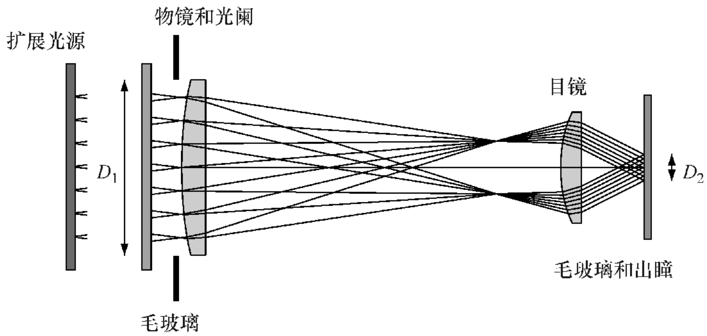


图15-4　望远镜出瞳的尺寸测量

式中，通过定义直径D_1和D_2的符号分别与α和β的符号一致。目镜到望远镜出瞳的距离是一个非常重要的参数，叫作出瞳距离。如在目镜中（如13-2节），观察者转动眼眶中的眼球能浏览整个像。因此，理想地，望远镜的出瞳不是与观察者眼睛的瞳孔保持一致，而是与眼球转动的中心一致。出瞳距离必须足够大以为睫毛留下空间。在望远镜瞄准具中，出瞳距离必须足够大以避免枪后坐反弹过程中撞击眼睛。可以在物镜的像平面上放置一个聚光镜，即向场透镜，以减小出瞳距离，如图15-5所示。如果假设物镜的焦距比目镜的焦距大很多，出瞳的位置大致在目镜的焦点处。焦点到目镜的距离或出瞳距离应等于场镜与接目镜组合的后焦距。值得注意的是，如果场镜被准确地置于像平面上，后焦距将减小但有效的焦距并没有被这个透镜改变，如式（3-38）和式（3-42）。

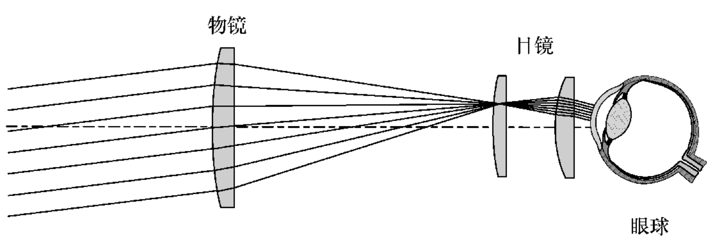


图15-5　目镜前有场镜的望远镜系统

接目镜和场镜合在一起称为目镜。我们将在 15.5 节学习。

15.3　无焦系统

无焦系统是一个有效焦距等于无穷大的系统。Wetherell（1987）发表了一个很好的关于这种系统的综述。一个望远镜聚焦在一个置于无穷远的物上，虚像也在无穷远，物镜和目镜之间的距离为两个透镜焦距之和。因此，它是一个独特的无焦系统。通过无焦系统，可以对实物形成一个（虚或实）像。考虑一个如图 15-6 所示的无焦系统。出瞳是入瞳的实像。对于系统的放大率，角 α 和 β 满足式（15-4）。如果在离入瞳（直径为 D_1）X 远处有一个物 H，它的实像为 H'，离出瞳（直径为 D_2）的距离为 X'。于是，可以得到放大率为

$$M=\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{D_2X}{D_1X'}=\frac{1}{M}\ \frac{X}{X'} \tag{15-7}$$

因此，

$$M^2=\frac{X}{X'} \tag{15-8}$$

如果物在入瞳的右边，距离 X 是正的，如果物在出瞳的右边，距离 X' 是正的。值得注意的是，X 和 X' 有相同的符号。假设入瞳与出瞳之间的距离为 L_P。于是，可以得到物和像之间的距离 L_I 为

$$L_I=L_P+X'-X=L_P-X\left(1-\frac{1}{M^2}\right) \tag{15-9}$$

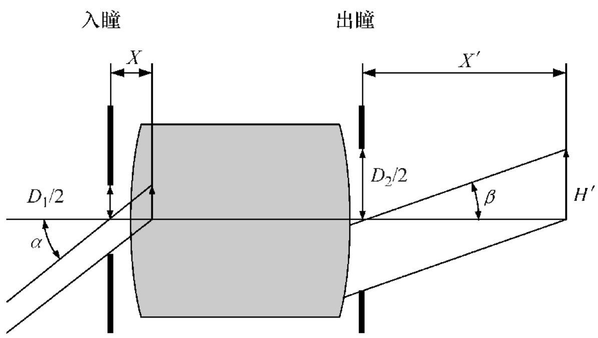


图 15-6　无焦系统成像

由于在图 15-6 中，有 $H=D_1/2$ 和 $H'=D_2/2$，可以得到横向放大率是系统放大率的倒数。无焦系统非常有趣，如 Wetherell（1987）指出，它们有三个重要的性质：

1）如果光阑是在中间的焦点处，如图 15-7 所示，系统具有物方和像方都是远心。于是，即使像是离焦的，但横向放大倍数是一个常数。

2）如果放大率 M 等于 ±1，因为 X 等于 X'，则 L_I 等于 L_P。这时，如果无焦系统在物和像之间沿着光学坐标移动，横向放大倍数一直是不变的，像的位置保持不变。

3）如果放大率 M 不等于 ±1，则 L_1 不等于 L_p，除非物在入瞳位置。然后，横向放大倍数为常数，如果物和像被固定，通过移动无焦系统，像的聚焦可以被调整，并不会改变横向放大率。

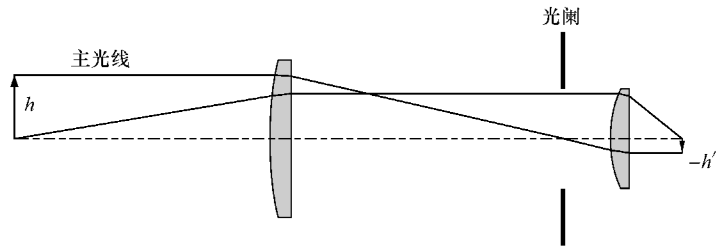


图 15-7　光阑在目镜和物镜焦面上的无焦系统的成像

这些性质有重要的实际应用，尤其在光刻投影系统中。下面将检验无焦系统的两个其他有趣的性质。

发散光束通过望远镜将变得更加发散。发散角增加率等于望远镜的放大倍数。如果通过望远镜观察一个近物（在入瞳前 X 处），观察的眼睛必须聚焦在无焦系统形成的像上（在出瞳前 X'处）。因此，如果 M 大于 1，视距 X'小于实距 X。另一方面，如果 M 小于 1，视距 X'大于实距 X。总之，通过望远镜观看景深将减小。明显地，当使用一个倒置的望远镜观看，景深将增加。由于这个原因，一个戴着无接触眼镜的近视的人比同龄正常视力的人有明显更大的景深（Malacara 和 Malacara，1991）减少老花眼的影响。

另一个有趣的感受是，当通过望远镜观看时，物看起来并不是更大更近而是更薄了。沿着视线方向压缩明显，与放大率的平方成正比。因此，如果放大率大于 1，物看起来在深度方向压缩了。

双镜无焦系统可以由双镜望远系统相似的组合构成，使用一个凹面镜和一个凸面镜，如图 15-8 所示。梅逊系统由两个抛物面组成，可以看作一个有效焦距无穷大的卡塞格林望远镜。根据式（14-47）和式（14-51）得出，在卡塞格林望远镜中，彗差和像散与有效焦距成反比例。因此，无焦系统没有球差、彗差和像散。畸变很小，仅有佩兹伐场曲仍保留。

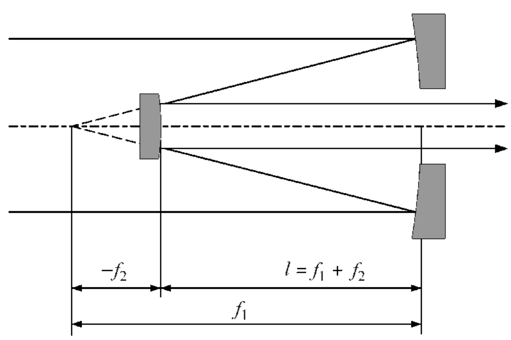


图 15-8　双反射镜无焦系统

Puryayev（1993）考虑了这个无焦系统的改进，用一个球面镜取代两个抛物面镜中的一个。然后修改其他镜面的形状来纠正系统的球差。严格地说，经过修改后的镜子的形状并不是一个双曲面，尽管非常接近。Puryayev 指出这个镜面的结构与一个抛物面有相同的渐屈线，这个虚抛物面的位置在沿着光轴的一些点上。

考虑一个球面次镜的情况，这个虚的抛物面与凹的非球面镜有相同的渐屈线，它的焦距等于两个镜子的分开距离，它与主镜同心，如图 15-9 所示。设想非球面镜的面是一个波前。当这个非球面波前在空间中传播时，它的形状将沿着它的轨迹改变，但在空间中的一些点，它形成了准确的抛物面形，这个是虚的抛物面。

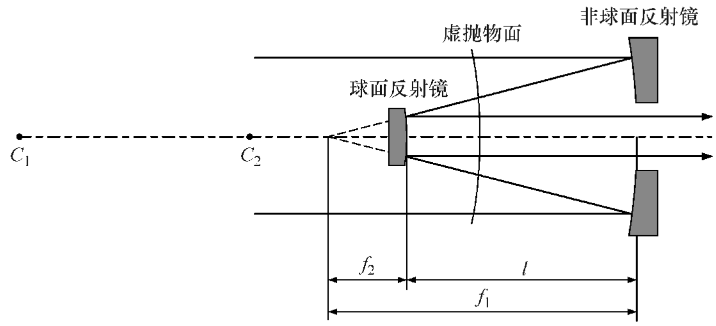


图 15-9　球面次反射镜和非球面主反射镜组成的双反射镜无焦系统中的虚抛物面

15.4　目视望远镜

不像专业的天文望远镜，业余的天文望远镜有一个目镜可以目视观察。专业的天文学者几乎从不用眼睛直接观察。

可以看出，入瞳与出瞳的比值等于系统的角放大率。假设望远镜的出瞳存在一个直径等于眼睛瞳孔的直径，在晚上近似为 6mm。根据这个条件，望远镜角放大率等于 $D_1/6$，其中 D_1 是入瞳的直径（开普勒望远镜物镜直径）。然而，在大多数望远镜中没有这种情况，因为角的放大率可能更大或更小，如下：

1）如果角放大率比这个值更大，出瞳的尺寸将变得比眼睛的瞳孔更小。然后，一个星星的亮度在任何放大的情况下都是一样的，因为并没有光损失。在第 14 章中，极限值仅是入瞳直径的函数，前提是没有光损失。然而，放大率越大，视场越小，减少了视场内星星的数量。

2）如果角放大率比这个值更小，出瞳的尺寸比眼睛的瞳孔更大，不是所有光都进入了物镜到达观察者的视网膜。然后，有效的入瞳的直径减小。这个条件增加了视场但减小了望远镜的分辨率和星星的亮度。结论是，当放大率等于最佳值 $D_1/6$ 时，可以观察到星星的数量最多。一个放大率为该值的望远镜有时也叫作全视场望远镜。

望远镜也必须给观察者呈现一个直立的像。这是通过一个棱镜或透镜装置实现的。最简单和最普遍的透镜装置形式是使用一个倒置的目镜，这个将在本章后面介绍。其他具有高成像质量的正像系统都采用了正像棱镜系统，在第 10 章中有介绍。

典型的目视折射天文望远镜比先前章节设计的双胶合透镜有更大的焦比（Fulcher，1947；Hopkins，1959，1962a，1962d；Hophins 和 Lauroesh，1955；Kinglahe 和 Johnson，2010；Korones 和 Hopkins，1959；Rosin，1952）。如图15-10所示，一个 $f/10$ 望远镜物镜，参数见表15-2。图15-11给出了这个望远镜目镜的轴上点、子午和弧矢像差曲线图。有趣的是将这个物镜与11.6.3节中的物镜比较，光学玻璃一样，但 f 数不同。

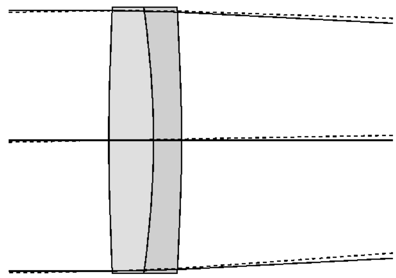


图15-10 目视折射天文望远镜的 $f/10$ 物镜

表15-2 物镜 F 数为 $F/10$ 的目视天文望远镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
826.43（光阑）	102.0	16.00	N－BK7
－374.93	102.0	10.00	N－SF5
－847.25	102.0	992.13	空气

孔径（F 数）：100.0mm（$F/10.0$）。
焦距：1000.0mm。
后工作距离：992.13mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：17.45mm（1°）

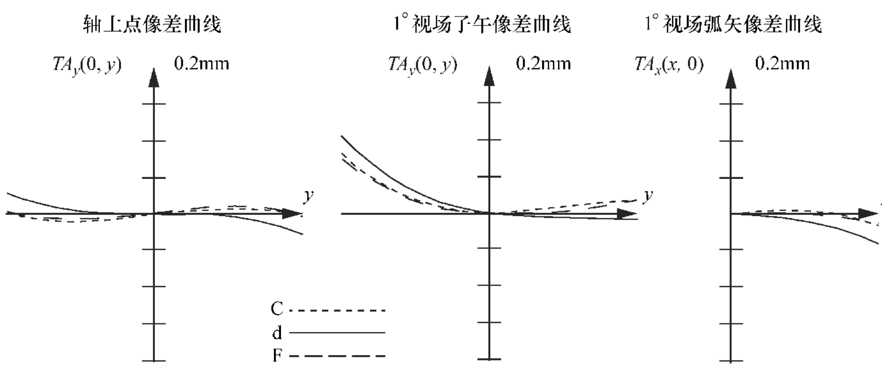


图15-11 $F/10$ 望远物镜的轴上点、轴外点子午和弧矢像差曲线

15.4.1 伽利略望远镜

尽管伽利略望远镜的首次使用是伽利略本人直接用于天文观察，但现在仅仅是用于地面观察。

伽利略望远镜现在主要用作剧院的双筒望远镜和提高低视力人的视力。关于这个主题的光学资料很稀少（Bertele，1972；Kidger，2002；Menchaca 和 Malacara，1988；

Rusinov 等，1983）。现在，将简要地介绍这些系统。

如图 15-12 所示，在伽利略望远镜中，根据望远镜的放大率和物镜的直径，瞳孔可能在观察者的眼睛或物镜。如果望远镜有一个小直径的物镜和一个大的放大率，在伽利略制作的原始望远镜中，光阑是在物镜的平面，如图 15-12a 所示。在这种情况中，出瞳远离观察者的眼睛，因此，视场的尺寸非常小，被观察者的瞳孔限制。在这类望远镜中，观察者有种通过长而狭窄的管子观察的感觉。

如果比值 d_{in}/M 远大于眼睛瞳孔的直径，或者，换句话说，如果望远镜有更大的物镜和一个小的放大率，光阑将在观察者的眼睛，如图 15-12b 所示。在这种情况中，入瞳不在物镜处，它的尺寸与物镜没有关系，但它等于瞳孔直径乘以望远镜的放大率。物镜的直径决定了视场的直径。因此，要有一个合适的视场，物镜应该是大的。根据本章开始的说明，由观察者眼睛位置定义的出瞳应该被认为是眼球转动的中心，而不是眼睛的瞳孔。

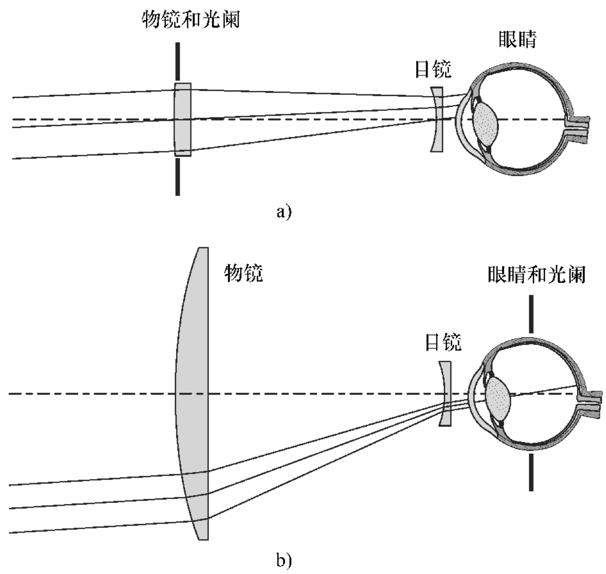


图 15-12　光阑在物镜和观察眼处的伽利略望远镜

a）光阑在物镜处　b）光阑在观察眼处

轴向像差，即球差和轴向色差，在低倍望远镜中并不是一个严重的问题，因为入瞳的直径很小。

倍率色差的校正是非常重要的，即使很小都值得注意，这是因为大的物镜尺寸，尤其是大的放大率。这个校正可以通过在物镜上使用两种不同的玻璃实现。然而，如果轴向色差也要被校正，那么目镜必须是双胶合透镜。

彗差也要尽可能地修正，但要略低于眼睛的分辨率。只要视场边缘的点不能通过少量的眼调节聚焦，那么场曲也该被校正。换句话说，可以接受视场有一点小的凹陷

(从观察者的观察点)，但不能接受凸起的视场。

畸变不可能被完全消除，将一直存在并可以察觉到。在无焦系统中，畸变由光线射出系统和进入系统时斜率的比值定义。如果比值是常数，将不存在畸变。

当使用光线追迹程序去设计像这样的望远镜时，建议设计时使用相反的方向，让光进入光阑。因为使用正常方向追迹时，系统可能有大的色差，产生多个入瞳，一种颜色一个入瞳。

4×伽利略望远镜与 Menchaca 和 Malacara 设计的望远镜很相似，如图 15-13 所示。数据在表 15-3 中。图 15-14 为望远镜的像差曲线。子午像差曲线的左边用点线是因为这些光线被物镜挡住了，如图 15-13 所示。

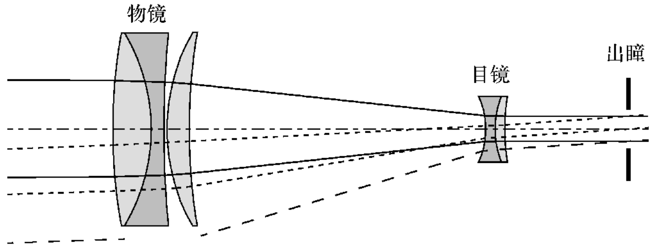


图 15-13　4×伽利略望远镜

表 15-3　4×伽利略望远镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度)/mm	介质
81.40	30.0	6.0	BaLF4
−29.16	30.0	2.0	N − F2
142.67	30.0	0.5	空气
29.95	30.0	3.5	N − BALF4
89.17	30.0	46.5	空气
−11.84	10.0	1.5	N − BK7
13.82	10.0	1.5	N − F2
31.39	10.0	20.0	空气
光阑	4.0	—	—

角放大倍率：4×。
入瞳直径：16.0mm。
半视场角：1.0°。
出瞳距：20.0mm。

人类的眼睛可以通过重调眼睛晶状体焦距以便看清近物。调节的幅度随年龄的增加而减小，主要是在40岁以后。景深可以定义为正视人眼聚焦观察物的最大收敛角。

发散的光束通过伽利略望远镜后将更加发散。发散角增加倍数等于望远镜的放大倍数。结果当用伽利略望远镜观察时，景深将减少同样的数量。明显地，当用一个倒置的

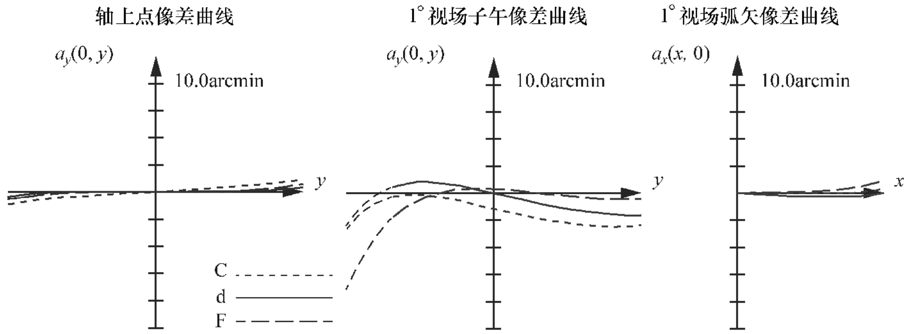


图 15-14　4 × 伽利略望远镜的轴上和轴外点像差曲线

伽利略望远镜观察时，景深将增加。由于这个原因，戴着无接触眼镜的近视的人比同龄正常视力的人有更大的景深（Malacara 和 Malacara，1991）。

15.4.2　含正像目镜的望远镜

如图 15-15 所示，望远镜有一个正像目镜，这个目镜由一个成正像的中继系统和一个惠更斯目镜组成。正像部分可以看作一个突出的冉斯登目镜，这将在后面介绍。然而，存在一个重大的不同，光阑在两个透镜之间，并不在外面。由于光阑在里面，透镜的方向也必须被改变，以便透镜的平面在光阑这一边。这个系统的放大率增加了望远镜的放大倍率，弥补了系统长度的增加。

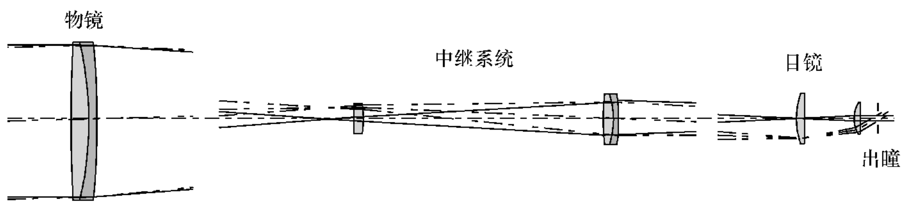


图 15-15　带有正像目镜的望远镜

正像目镜也可以采取惠更斯目镜的结构。一个完整的带着正像目镜的望远镜的设计见表 15-4。

表 15-4　透镜正像的 50 倍望远镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
光阑	42.0	0.0	空气
668.0734	42.0	10.0	N－BK7
－183.1502	42.0	5.0	N－F2
－449.3000	42.0	650.0	空气
平面	7.5	5.0	N－BK7

（续）

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
-63.0000	7.5	145.0	空气
90.6344	10.0	6.0	N-BK7
-32.0615	10.0	3.0	N-F2
-87.6000	10.0	269.8	空气
33.0000	12.0	4.5	N-BK7
平面	12.0	30.2	空气
10.6000	8.0	3.5	N-BK7
平面	8.0	11.0	空气
出瞳	1.6		

角放大倍率：50×。
入瞳直径：80.0mm。
半视场角：0.5°。
出瞳直径：1.6mm。
物镜焦距：640.0mm。
目镜焦距：25.0mm。
正像镜组放大倍率：2.0。
出瞳距：19.0mm。

15.4.3 含倒像棱镜的望远镜

带正像棱镜的望远镜的物镜必须被设计包含一块有两个平行平面的玻璃。这块玻璃位于物镜和目镜之间。原因是在会聚光中使用了倒像棱镜系统，引入了球差和轴向色差。在望远镜物镜的设计中这些像差必须被补偿。该系统的一个实例如图15-16所示，表15-5使用了施密特-佩肯棱镜。

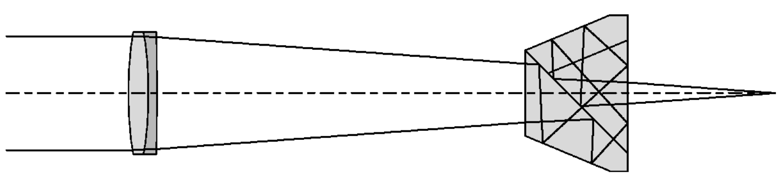


图15-16 带有 $F/10$ 望远物镜和施密特-佩肯棱镜的望远镜

表15-5 物镜 F 数为 $F/10$，采用施密特-佩肯棱镜正像的望远镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
134.51（光阑）	43.0	7.0	N-BK7
-132.88	43.0	3.0	N-F2

（续）

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
-1230.50	43.0	130.0	空气
平面	30.0×30.0	138.6	N-BK7
平面	—	52.1	空气

孔径（F 数）：40.0mm（$F/7.0$）。
焦距：280.0mm。
后工作距离：52.0mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：4.88（1°）。

15.5　望远镜目镜

在系统之外，目镜有自己的入瞳和出瞳（Hopkins，1962c）。正常情况下，目镜的入瞳与望远镜物镜的出瞳重合。为了观察像，观察者眼球的中心位于目镜的出瞳。横向轴向像差（球差和色差）必须比望远镜物镜的像差更小。目镜的焦距比物镜的焦距更小，两者的比值等于望远镜的放大率。这意味着角度轴向像差可能等于物镜的像差乘以望远镜的放大率。综上所述，轴向像差并不存在任何问题。

另一方面，必须小心控制离轴像差。一般而言，所有横向（轴上的和离轴的）球差的大小必须足够小以至于人眼并不能发觉他们。由于眼睛的分辨率近似为1′，横向球差对应的值为

$$TA = \frac{\pi}{10800}F \tag{15-10}$$

式中，F 是目镜有效的焦距。

由于在目镜中大部分元件都是正的且焦距小，一般而言，佩兹伐曲率很大，并且是负的。然后，引入一个很大的正像散，将使弧矢面变成平的。这意味着子午面将向观察者弯曲。这样，眼睛看轴上像时处于松弛状态，但是看轴外像时眼睛必须进行调节。观察者并不愿意看到视场弯曲远离自己，因为当轴上像被聚焦在无穷远时，眼睛不能调整后看清轴外的像。这样，轴外的像将一直是模糊的。

为了对正像散透镜类型有一个认识，考虑一些典型的平凸镜结构，如图 15-17 所示。前四个透镜是场镜的候选项，因为距光阑远，主光束几乎平行于光轴。这四个透镜有两个可能的方向，物在透镜前和透镜后。最后两种结构是接目镜的候选项，因为光阑离透镜近，且在准直光束一侧。根据式（5-25）和式（6-51），得到散光面的贡献为

$$AstL_SC = \frac{y(n/n')(n-n')(i+u')\bar{i}^2}{2n'_k u_k^2} \tag{15-11}$$

因此，应用这个表达式到图 15-17 的透镜结构中去，图中标明了这些面的贡献值。

除去存在有负像散的透镜，留下透镜 a、b 和 e。对于接目镜，只有一个可能性，选

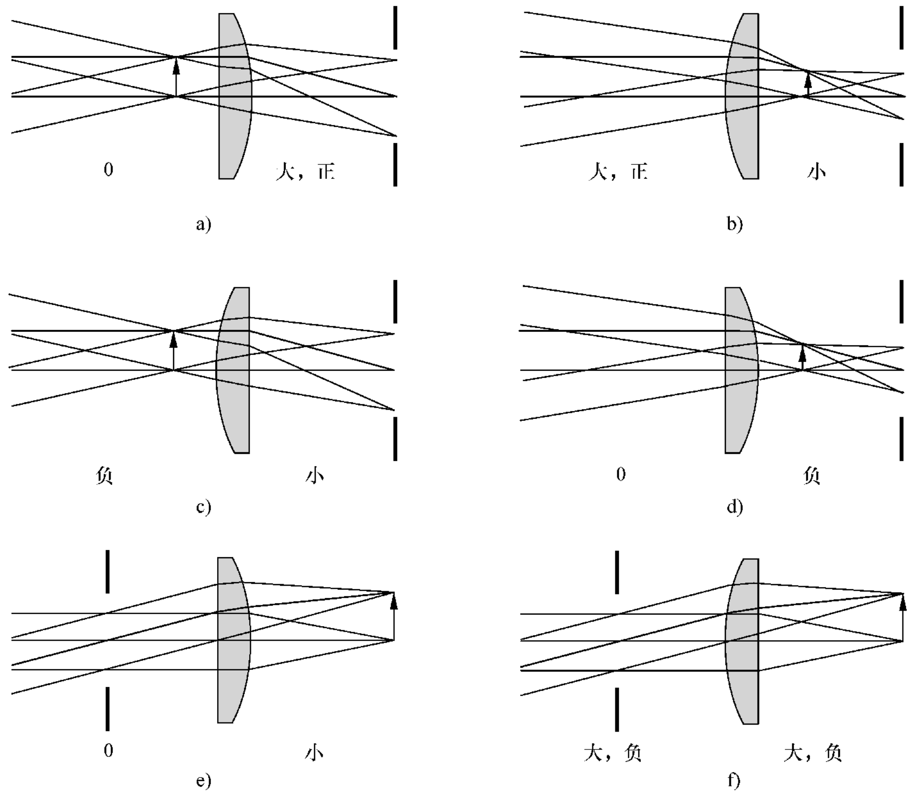


图 15-17　对于平凸透镜的取向和光阑位置

择像散小的透镜。因此，所有得到的像散都来自场镜。关于场镜，有两个可能性。注意透镜 a 和 b，假如物与透镜重合像散将非常小。因此，物离透镜应该有一定的距离并且在平面一侧。

综上所述，由单透镜构成的两个可能的目镜结构如图 15-17a 和 b 所示。弯曲平凸透镜并不能明显地提高校正。正如所预期的，因为出瞳的位置，畸变通常很高，并且是正型畸变。这两个设计分别叫惠更斯和冉斯登目镜。

需要指出的是，在透镜的设计程序中，使用光线从光瞳的共轭像开始追迹计算，这与实际光线的方向相反。但是在这里的设计中是用正方向来描述的。

15.5.1　惠更斯目镜和冉斯登目镜

倍率色差如 4.5.2 节中解释的，在两个透镜组成的系统中，当光阑在无穷远时，两个透镜由同种玻璃材料制成且分离距离 d 等于它们焦距的平均值，这种像差可以校正。在望远镜的情况中，光阑并不在无穷远，但对所有的实际应用它已经足够远。这两个焦距不可能相等，如果这样它们之间的分离距离就等于透镜的焦距，物将位于场镜上。两个焦距的比值可作为一个变量来获得最好的离轴像。对于惠更斯目镜

的情况，如图 15-18a 所示，典型的条件就是$f_a/f_b=2$，其中f_a 和f_b 分别为场镜和接目镜的焦距。

惠更斯目镜清晰视场相对较小近似为 ±15°，倍率色差是对整个目镜的校正，并不是仅对接目镜。因此，在像平面的刻线并不是无色的。在望远镜中出瞳距相对较小，在显微镜中出瞳距更小。由于这个原因，它们很少被使用在望远镜中，更多关于惠更斯目镜设计的详细内容将在第 16 章介绍。

在冉斯登目镜中，如图 15-18b 所示，消色差与后焦距大于零这个条件是相矛盾的，这样焦点在系统的外面。这意味着冉斯登目镜并不能校正倍率色差。它的像差和视场宽度在大小上与惠更斯目镜中的相似。

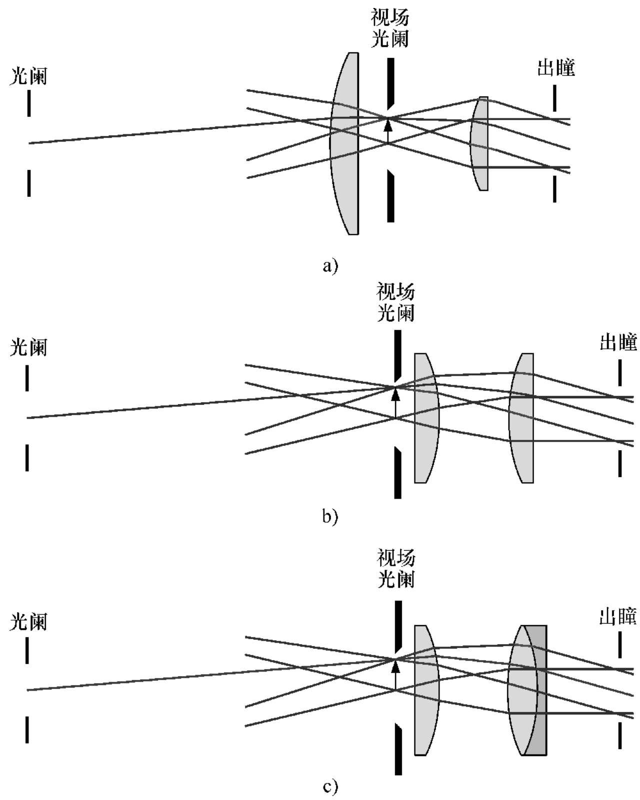


图 15-18　三类望远目镜

a）惠更斯　b）冉斯登　c）克耳纳

冉斯登目镜可以与分划板一起使用，因为视场光阑（物）在系统的外面。出瞳距离很小但比在惠更斯目镜中的出瞳距离大。如图 15-19 所示，为一个 25mm 的冉斯登目镜，它的设计数据见表 15-6。假设出瞳（望远镜的出瞳）的位置在 1m 远。

15.5.2　克耳纳目镜

正如前面所指出，冉斯登目镜不能完全校正倍率色差。这个系统可以消色差，用一

个胶合透镜替换单个的目镜，如图15-18c所示。当两主光束颜色C和F通过出瞳且相互平行时，这个系统可以校正色差。

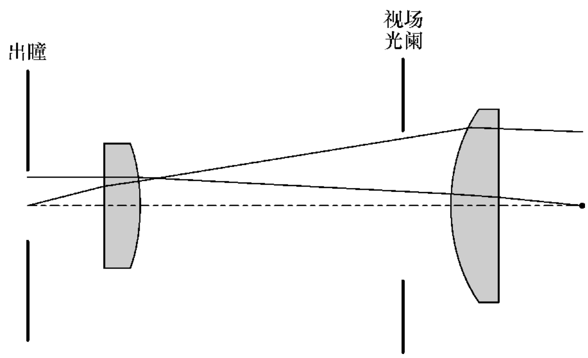


图15-19　25mm冉斯登望远目镜

表15-6　焦距25mm的冉斯登目镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
光阑	5.0	6.4	空气
平面	12.0	3.0	N－BK7
－18.5	12.0	22.0	空气
16.5	20.0	4.0	N－BK7
平面	20.0	7.0	空气
视场光阑	13.4	—	—

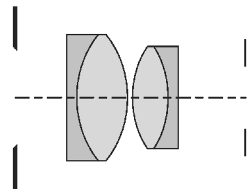
半视场角：15.0°。
出瞳直径：5.0mm。
焦距：25.0mm。
出瞳距：6.4mm。

克耳纳目镜比惠更斯目镜和冉斯登目镜有更大的视场（近似为±20°）。

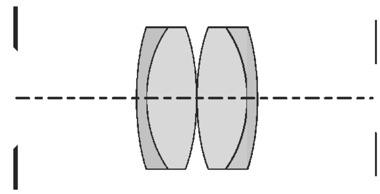
15.5.3　对称或普罗素目镜

Kingslake（1978）已经描述了一个好的目镜的设计，使用两个胶合透镜，如图15-20a所示。视场大小等于±25°。在这个系统中，不仅可以使视场变平，而且可以校正彗差。

将两个一样的胶合透镜对称放置可以得到一个相似的目镜。这就是对称或普罗素目镜，如图15-20b所示。这个目镜的两个重要的特征是长的出瞳距离和宽的视场，近似为±25°，和非常好的像质。一个25mm望远镜对称目镜见表15-7。



a)



b)

图 15-20　两种目镜设计

a）Kingslake　b）对称或普罗素望远目镜

表 15-7　焦距为 25mm 的对称型目镜（普罗素目镜）

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
光阑	5.0	19.0	空气
48.86	24.0	1.5	N－SF2
22.19	24.0	7.9	N－BK7
－35.97	24.0	0.1	空气
35.97	24.0	7.9	N－BK7
－22.19	24.0	1.5	N－SF2
－48.86	24.0	18.5	空气
视场光阑	18.2	—	—

半视场角：20.0°。
出瞳直径：5.0mm。
焦距：25.0mm。
出瞳距：19.0mm。

15.5.4　无畸变目镜

无畸变目镜的佩兹伐和低，出瞳距离长和色差校正好。视场近似为 ±25°。最好最昂贵的仪器使用了这类目镜。一个 25mm 的望远镜目镜如图 15-21 所示，它的设计见表 15-8。

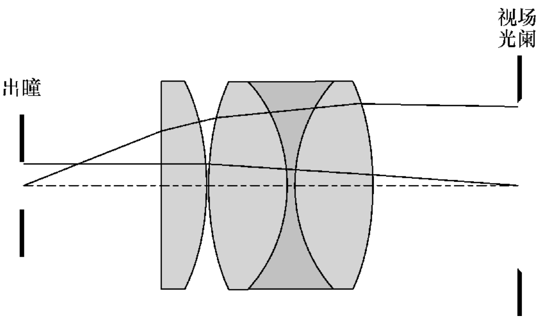


图 15-21　25mm 无畸变望远目镜

表 15-8　焦距为 25mm 的无畸变目镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
光阑	5.0	17.80	空气
平面	24.0	5.70	N－SK4
27.52	24.0	0.30	空气
29.81	24.0	9.80	N－BK7
－17.24	24.0	1.00	F4
17.24	24.0	9.80	N－BK7
－29.81	24.0	12.90	空气
视场光阑	18.2	—	—

半视场角：20.0°。
出瞳直径：5.0mm。
焦距：25.0mm。
出瞳距：17.8mm。

15.5.5　埃尔弗目镜

1921 年，H. Erfke 设计了埃尔弗目镜，它的视场最大近似为 ±28°，如图 15-22 和表 15-9 所示。

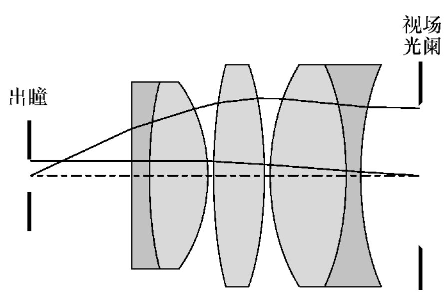


图 15-22　25mm 埃尔弗目镜

表 15-9　焦距为 25mm 的埃尔弗目镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度)/mm	介质
光阑	5.0	17.3	空气
平面	32.0	3.0	F4
73.60	32.0	10.0	N－BK7
－28.20	32.0	1.0	空气
87.50	38.0	8.7	N－SK4
－68.50	38.0	1.0	空气
38.80	38.0	13.0	N－SK4
－51.06	38.0	2.5	N－SF2
56.68	38.0	10.01	空气
视场光阑	11.66	—	—

半视场角：20.0°。
出瞳直径：5.0mm。
焦距：25.0mm。
出瞳距：17.3mm。

15.6　中继镜和潜望镜

中继镜就像在 15.4.2 节中描述的正像透镜一样经常被使用，不仅在望远镜，而且在潜望镜系统或复印机中。如图 15-23 所示，潜望镜由中继镜和场镜构成，中继镜是将图像以 1 倍放大率从一个面传输到下一个面，场镜位于像平面上，将前面系统的出瞳和成像至后续系统的入瞳上（Hopkins，1949，1942b）。在对称结构中，如果每一个中继系统都由一对胶合透镜构成，那么可以获得一个好的像差校正。潜望镜可以看作由一系列对称 1 倍角放大率的系统构成，每一个系统都有一对中继镜在首尾两端和一个场镜在中间。中继镜必须校正轴向色差，但场镜不必消色差。

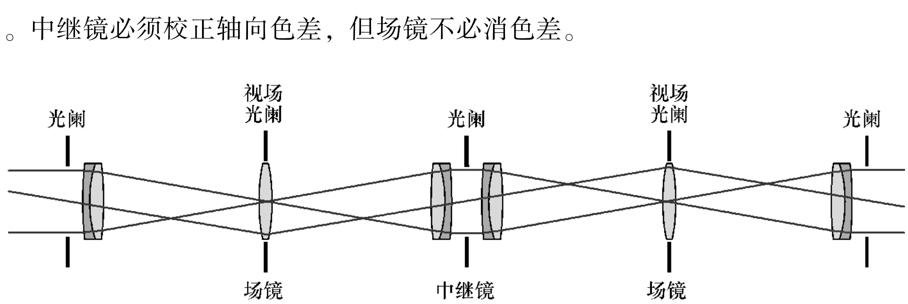


图 15-23　光学中继系统

前述系统的实际缺点是场镜放置在像平面上，在场镜上的任何瑕疵和污垢都能在像面上看到。一个常用的解决方法就是将场镜分为两个透镜，分别置于视场光阑的两边，如图 15-24 所示。然后，每一个单元中继系统都有一个中继镜和一个场镜构成。这个中继系统单元必须整体校正色差，因为场镜对这个像差有一些贡献，在胶合透镜中必须使用一个相反的像差来补偿。

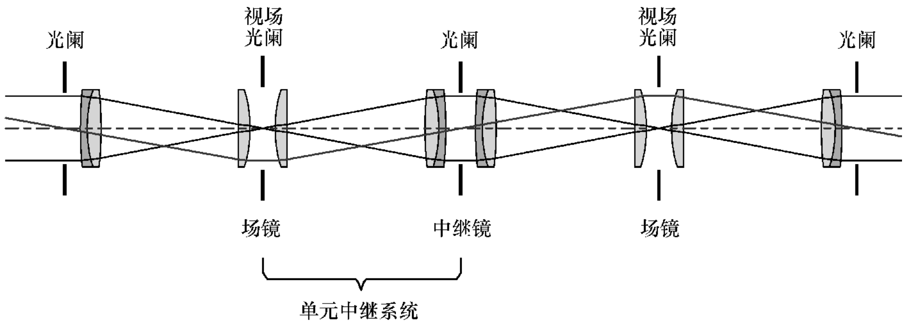


图 15-24　有分离场镜的光学中继系统

1 倍放大率的对称系统由两个中继系统的前端对前端对称构成，这样，在系统的两端各有一个中继镜，一对场镜在中心。

当设计中继系统时，一个重要的问题是所有的元件都有一个正的光焦度，因此，佩兹伐曲率一直是正的，向内弯曲像面。一种解决方法是用适量的像散补偿，寻找一个平的子午像面，用尽可能多的薄的元件减少佩兹伐曲率。这些光学系统十分重要和有用，因为它们是构成许多仪器的基本元件，像潜望镜和内窥镜，这个将在本章的后面介绍。

15.6.1　无影检眼镜

检眼镜被设计成广角的无焦系统用来观察人眼的视网膜。它有如下一些特征：

1）仪器的入瞳与被观察病人眼睛的瞳孔位置相同，但直径更小。这为通过瞳孔边缘照亮病人的视网膜留下了空间。

2）为了有一个宽的观察眼睛视网膜的视场，角放大率应该小于 1（典型值是 1/3）。因此，仪器的出瞳应比入瞳更大。

有几种基础的系统，如图 15-25 所示。第一个透镜置于仪器的前端，在它的后焦面上形成了一个视网膜的像。入瞳的直径比透镜的直径小，这样透镜的轴上像差非常小。主光束的高度很大，因为视场足够宽以至于可以观察到病人视网膜的大部分。这个透镜形成了视网膜的像，也形成了被观察者瞳孔的像。为了形成一个好的像，透镜的前表面必须是非球面的。

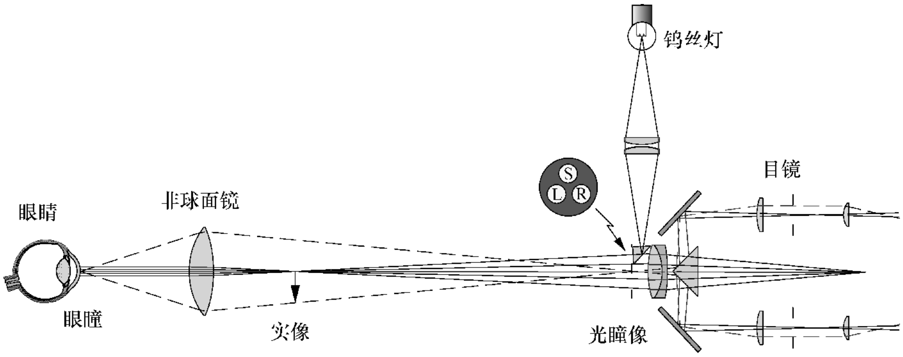


图 15-25　无影检眼镜

将一个光栏置于被观察眼睛瞳孔的像的位置，光栏有三个小孔。其中两个窗口是在光轴的两侧，通过两个窗口的光分别到不同观察眼睛可以得到一个立体的视网膜视图。第三窗口位于这两个窗口的上面，用来照明被观察眼睛的视网膜。

一个消色差的胶合透镜位于被观察眼睛瞳孔的像的位置，在光栏的后面，在目镜的焦平面上形成了一个被观察眼睛视网膜的正像。再用惠更斯目镜观察最后形成的像。

检眼镜角放大率 M 必须小于 1，由下式给出

$$M = \frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = m\frac{f_a}{f_e} \tag{15-12}$$

式中，f_a 是非球面镜的有效焦距，f_e 是目镜的有效焦距，m 是被观察眼睛瞳孔像处的消色差透镜的横向放大率。

为了充分利用非球面镜提供的整个视场，目镜角视场半径 α_e 的正切乘以角放大率 M 应该等于非球面镜的角视场半径 β 的正切，如下：

$$\tan\beta = M\tan\alpha_e \tag{15-13}$$

15.6.2　内窥镜

内窥镜也是一个无焦潜望系统，用于观察人体的内部。它们不同的名字取决于它们用于人体的不同部分的观察，例如，胃镜用于消化系统，腹腔镜用于腹腔。这些仪器的特点是与直径相比它们非常长。一个完整的内窥镜系统必须有一个图像传输的光路，也必须有一个并行的照亮光路照明被研究的对象，大部分情况采用光纤照明。基本上，有三种不同的方法设计这些光学系统，描述如下：

传统的内窥镜：用一系列单倍角放大率基本单元中继连接构成一个潜望镜系统，这些单元包含了中继镜和场镜，如前文所述。

霍普金斯内窥镜：另一个常用的设计来源于霍普金斯。这个系统是一个基本系统的改进，在这个系统中每个单元中继系统的间隔（在中继胶合透镜和场镜之间）填充一根玻璃棒，如图 15-26 所示。这些透镜和玻璃棒被粘到一块。利用这个改进可以获得一个重要的优势。如果玻璃棒的长度等于原始物镜到中继透镜的距离，光通量和像的亮度将增加，增加倍数等于玻璃棒折射率的平方。和标准的系统一样，每个单元系统必须矫

正轴向色差。一个额外的优势就是这个系统更加容易组装。

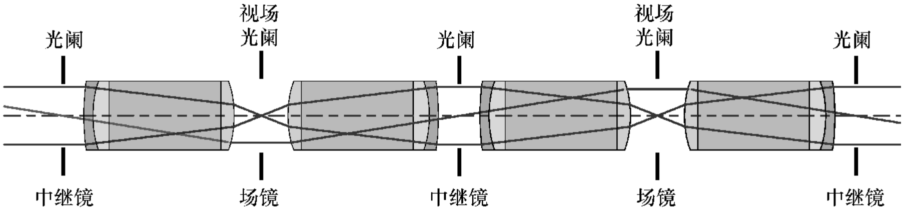


图 15-26　霍普金斯内窥镜系统

梯度折射率内窥镜：内窥镜也可以由一系列长的径向梯度折射率玻璃棒构成。在这些玻璃棒中，径向梯度折射率是关于光轴对称的，表示为

$$n(r) = N_{00} + N_{10}r^2 + N_{20}r^4 + \cdots \tag{15-14}$$

式中，r 是离光轴的径向距离。在玻璃棒透镜中，光进入玻璃棒后将沿一个弯曲的正弦路径行进，如图 15-27 所示。这个起伏正弦波长为

$$L = 2\pi\left(-\frac{N_{00}}{2N_{20}}\right)^{1/2} \tag{15-15}$$

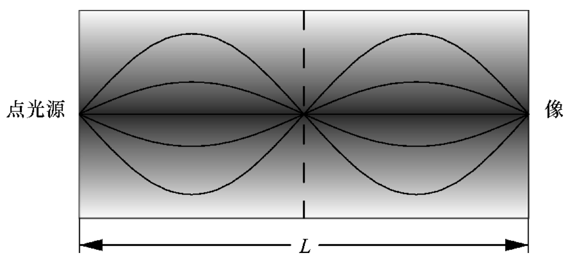


图 15-27　径向梯度折射率杆状透镜

如果玻璃棒的长度为 L，一个位于前表面的物所成的像没有球差，在后面的像的放大率为 1，并且没有球差。这个像很清晰，对比度好。这些性质使玻璃棒成为完美的内窥镜中继器（Tomkinson 等，1996）。

光纤内窥镜：一束相干的光纤将图像从光纤的一端传到另一端。它们的优势是灵活性好，劣势是相对较低的分辨率和低的光效率。

电子内窥镜：与显微电视摄像机相似的系统，电缆将图像传输到目镜，在目镜处有一个小的监视器。

所有的这些仪器都有一个光源通过沿着光学系统的光纤照亮被观察的物。

参考文献

[1] Bertele, L., "Galilean Type Telescope System," U. S. Patent No. **3**, 663, 094 (1972).

[2] Fulcher, G. S., "Telescope Objective Without Spherical Aberration for Large Apertures Consisting

of Four Crown Glasses," *J. Opt. Soc. Am.*, **37**, 47 (1947).

[3] Hopkins, H. H., "Optical System Having Cylindrical Rod – Like Sense", U. S. Patent 3, 857, 902 (1946).

[4] Hopkins, H. H., "Optical Principles of the Endoscope," in *Endoscopy*, G. Berci, ed., Appleton Century Crofts, New York (1976).

[5] Hopkins, R. E., "Secondary Color in Optical Relay Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 919 – 921 (1949).

[6] Hopkins, R. E., "Telescope Doublets," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 200 – 201 (1959).

[7] Hopkins, R. E., "Telescope Objectives," in *Military Standardization Handbook*: *Optical Design*, *MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962a).

[8] Hopkins, R. E., "Lens Relay Systems," in *Military Standardization Handbook*: *Optical Design*, *MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962b).

[9] Hopkins, R. E., "Eyepieces," in *Military Standardization Handbook*: *Optical Design*, *MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962c).

[10] Hopkins, R. E., "Complete Telescope," in *Military Standardization Handbook*: *Optical Design*, *MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962d).

[11] Hopkins, R. E. and Lauroesh, J., "Automatic Design of Telescope Doublets," *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 992 – 994 (1955).

[12] Kidger, M. J., *Fundamental Optical Design*, SPIE Press, Bellingham, WA (2002).

[13] Kingslake, R., *Lens Design Fundamentals*, Academic Press, New York (1978).

[14] Kingslake, R. and Johnson, R. B., *Lens Design Fundamentals*, 2nd Ed., SPIE Press, Bellingham, WA (2010).

[15] Korones, H. D. and Hopkins, R. E., "Some Effects of Glass Choice in Telescope Doublets," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 869 – 871 (1959).

[16] Malacara, D. and Malacara, Z., "An Interesting Property of Inverted Galilean Telescopes and Their Relation to Myopic Eyes," *Opt. Eng.*, **30**, 285 – 287 (1991).

[17] Menchaca, C. and Malacara, D., "Design of Galilean Type Telescope Systems," *Appl. Opt.*, **27**, 3715 – 3718 (1988).

[18] Puryayev, D. T., "Afocal Two – Mirror System," *Opt. Eng.*, **32**, 1325 – 1327 (1993).

[19] Rosin, S., "A New Thin Lens Form," *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, 451 – 455 (1952).

[20] Rusinov, M. M., Judova, G. N., Kudryashov J. V., and Aguror, P. Y., "Galilean Type Telescope System," U. S. Patent No. 4, 390, 249 (1983).

[21] Tomkinson T. H., Bentley, J. L., Crawford, M. K., Harkrider, C. J., Moore D. T., and Ronke, J. L., "Rigid Endoscopic Relay Systems: A Comparative Study," *Appl. Opt.*, **35**, 6674 – 6683 (1996).

[22] Walker, B. H., *Optical Design for Visual Systems*, SPIE Press, Bellingham, WA (2000).

[23] Wetherell, W. B., "Afocal Lenses," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. X, Academic Press, San Diego, CA (1987).

第 16 章　显　微　镜

16.1　显微镜组成

在第 11 章中我们已经看到，通过减小焦距单透镜的放大能力可能增加，但这一过程在实际情况下受限。透镜变得太小，在观察过程中，物、透镜和眼睛距离太过接近。实际的限制是放大倍率为 100 的单透镜，它的焦距接近 2mm。在 17 世纪荷兰 Anthony Van Leeuwenhoek 做了一些由大曲率的小透镜组成的显微镜，得到 100 倍等级的放大能力。用这一简单的设计的问题是小的数值孔径（0.2*NA*）和小的视场。用这一简单的显微镜，他第一次发现了微生物。

如图 16-1 所示，是组成显微镜的一种可能的解决方案。靠近物的透镜作为物镜，靠近眼睛一侧的透镜是目镜。对于这一光学系统的解释有两种等价的方法，我们将在下面说明。

1）第一种方法：我们考虑整个系统是由两个薄透镜形成的，物镜焦距为 f_o，目镜焦距是 f_e。在图 16-1 中我们能忽略目镜场镜的存在，因为在放大率方面它没有效用或者我们能认为整个目镜是焦距为 f_e 的单透镜。然后，两个透镜之间的间隔是 $d+f_e$，从（式 3-46）中得到有效焦距是

$$F=\frac{f_o f_e}{f_o+f_e-(d+f_e)}=\frac{f_o f_e}{f_o-d} \tag{16-1}$$

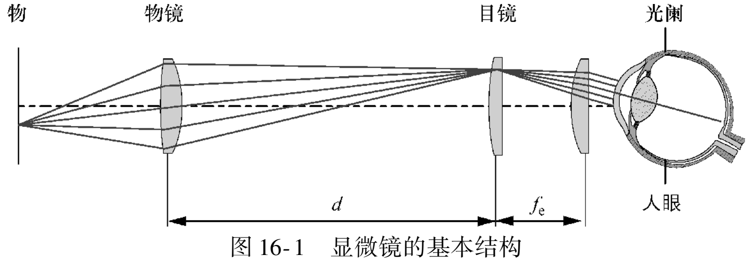


图 16-1　显微镜的基本结构

因此，从式（11-6），系统的放大率是

$$M=\frac{250(f_o-d)}{f_o f_e} \tag{16-2}$$

2）第二种方法：一个替代但是等价的得到显微镜放大率的方法如下。如图 16-1 所示，系统的物镜形成一个物方实像。物镜放大率为 m_o，从式（3-9）可以得出

$$m_o=1-\frac{d}{f_o} \tag{16-3}$$

如果我们按照从物镜后焦点到像的距离 X' 写出这个表达式，对于物镜的放大率 m_o，一个替代的表达式可以从式（3-11）和式（3-10）得出

$$m_o = -\frac{nX'}{f_o} \tag{16-4}$$

式中，n 是物方介质的折射率，f_o 是在物方物镜的有效焦距。如果距离 X' 作为光管长度被定义，它对于所有的物镜是一个常数，那么物镜的放大率只是关于它的焦距的函数。这就是为什么这个距离被大部分生产厂商标准化的原因。两个最通用的值是 160mm 或者 170mm。

目镜的放大率 M_e 由式（11-6）给出。因此，显微镜的放大率是物镜的放大率 m_o 与目镜的放大率 M_e 的乘积，利用式（16-3），我们得到

$$M = m_o M_e = \left(1 - \frac{d}{f_o}\right)\frac{250}{f_e} \tag{16-5}$$

它可能等同于式（16-2）。但是，利用式（16-3）和 $X' = 160\text{mm}$，我们有

$$M = m_o M_e = \frac{250nX'}{f_o f_e} = \frac{40000n}{f_o f} \tag{16-6}$$

显微镜按图 16-2 被机械地组合起来，这里的一些项定义如下：

光学筒长：如先前所说明的，这一距离是从后焦平面到焦点的距离。它被德国工业标准（DIN）标准化定为 160mm，被日本工业标准标准化（JIS）定为 170mm。

止口高：物镜上边缘距物平面的高度。在更换物镜时，为了避免大范围对焦，DIN 和 JIS 标准化为 45mm 和 36mm。因为物镜设计可能有许多种结构，依据止口高的这个标准值，可以自动使后焦面位于许多不同的可能位置上。

如果一系列物镜止口高相同，止口到像的距离相同，这些物镜相互交换（例如通过一个旋转平台）时不需要重新调焦。这些物镜被称为齐焦的。

机械筒长：这是从物镜的止口的底部到目镜底部的距离。这一距离没有标准化，因为相对于物镜的止口至后焦平面的位置是变化的。结果当改变物镜和目镜时光学筒长不是保持不变的。因此，机械筒长必须调整为最优长度。机械筒长必须被仔细调整以使用物镜正常的共轭位置，基于以下原因：①为

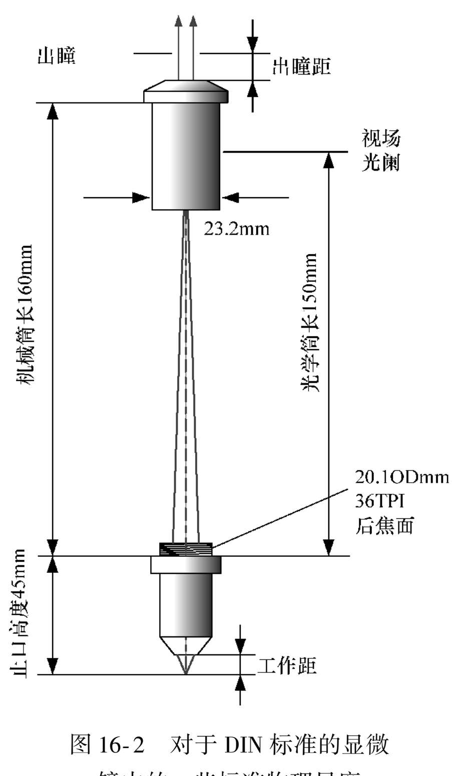


图 16-2　对于 DIN 标准的显微镜中的一些标准物理尺度

了得到事先设定的放大率；②为了调整至球差最小；③当使用齐焦物镜并且放大率发生改变时以保持像在焦点上。

工作距离：这一距离是从盖玻片（覆盖在物上的玻璃）的上表面到显微镜物镜的最低光学表面的距离。在物方从物到焦点的距离 X 可从式（2-11）和式（2-14）得出

$$X = -\frac{f_o'}{nX'} \tag{16-7}$$

式中，n 是物方介质的折射率（空气或油）。因此，工作距离 S 是

$$S = X + f_{oF} - n_c T = -\frac{f_o^2}{nX'} + f_{oF} - n_c T \tag{16-8}$$

式中，f_{oF}是显微物镜的前焦距（物方），T 是盖玻片的厚度，n_c 是盖玻片的折射率。

望远物镜的相对孔径被定义为焦比或 f 数 FN。对于显微物镜，相对孔径通过数值孔径定义，在图 16-3 中阐明如下：

$$NA = n\sin\theta \tag{16-9}$$

式中，n 是物方介质的折射率，θ 是从物方观察的入瞳的角半径。一个衍射受限的显微物镜的分辨力由点光源的衍射像的直径决定。在第 17 章中将会更详细地描述这一点，显微镜和投影仪一样，通常情况下物是用部分相干光来照明的。能够分辨的两个像点之间距离的最小值是一个相干度的函数，如下给出

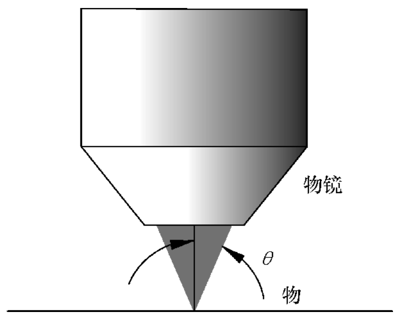


图 16-3　显微物镜的数值孔径

$$d = \kappa\frac{\lambda_0}{NA} \tag{16-10}$$

式中，λ_0是真空中波长，κ 是一个常数，对于完全非相干照明，它的值是 0.61；对于完全相干照明，它的值是 0.77（Born 和 Wolf，1964）。在显微镜中照明是部分相干照明。阿贝成像关系理论是假定完全相干照明的前提下发展起来的。

在放大率为 M 的显微镜中能明显分辨的两个点像点，在距离观察者眼睛 250mm 的地方形成的虚像的距离是

$$d = \kappa\frac{M\lambda_0}{NA} \tag{16-11}$$

在另一方面，眼睛的分辨力接近 1′。在 25mm 的地方，这给出了大约 0.07mm 的分离距离。如果我们带入 κ 的值是 0.7，最后很容易得到的结论是放大率需要与眼睛的分辨力相匹配，那么物镜的放大率是

$$M = 182NA \tag{16-12}$$

但是，对于高放大率的显微物镜来说这不是实际的限制。一个更真实的限制是接近于这个值的 5 倍；因此，我们可以写成

$$M_{max} = 1000NA \tag{16-13}$$

任何高于这个值的放大率将不能提供像的更细致的信息，并且像质将变差。这就被称作无效放大率。

值得注意的是利用拉格朗日理论，物镜的放大率可以被写成

$$m_o = \frac{NA}{NA_i} \tag{16-14}$$

式中，NA 和 NA_i 分别是物方和像方的数值孔径。

大部分显微物镜的尺度方面的特征在图 16-4 中说明。一系列物镜经常被设计成使出瞳接近常值 6.4mm。这相当于在像空间给出了数值孔径近似为一个恒量，NA_i 等于 0.02（除了高倍物镜，这里的直径可能低于 0.0125）。然后，从式（16-14）中得到在物空间的数值孔径近似为 $NA = 0.02m_o$。明显的，物空间的数值孔径决定了整个显微镜出瞳的大小。如果 d 是光瞳直径，利用式（11-6），我们可以得到

$$d = \frac{500NA_i}{M_e} \tag{16-15}$$

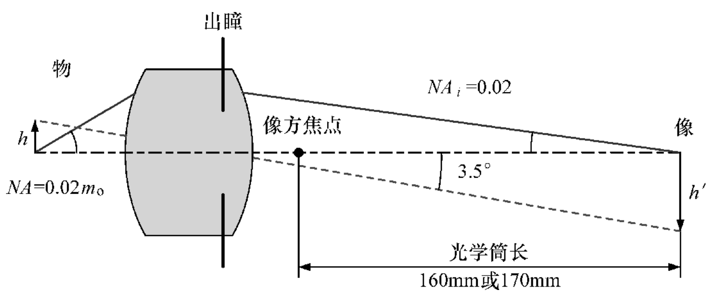


图 16-4　显微物镜的光学结构图

因此，利用式（16-6），我们得到

$$M = \frac{500NA}{d} \tag{16-16}$$

因为在照明良好的环境中，眼瞳平均直径大约是 2mm。取显微镜出瞳的直径等于眼睛的直径，我们能得到对最大显微镜放大率时式（16-12）的替代表达式

$$M = 250NA \tag{16-17}$$

任何比这个值高的放大率，产生的出瞳小于人的眼瞳。

16.2　显微物镜

回顾显微光学，尤其是物镜和目镜，已经由 Bennett（1934，1962，1963），Cruickshank（1946），Foster 和 Thiel（1948），Foster（1950），Benford（1965），Benford 和 Rosenberger（1967，1978），Laikin（1990），Broome（1992），Smith 和 Genesee（1992）给出。

正如我们前面已经指出的，光学筒长是标准化为 160mm 或 170mm 的值。这就给机

械筒长增加了一个限制。但是，有时候为了更适合观察而弯曲镜筒或者为了双目观察引入棱镜系统，都必须大幅增加机械筒长。在这种情况下，必须要用到中继透镜系统。这个中继系统可以采用变焦透镜的形式，像在第12章被Benford（1964）描述的那样。一个有变焦中继镜和双目棱镜系统的显微镜如图16-5所示。

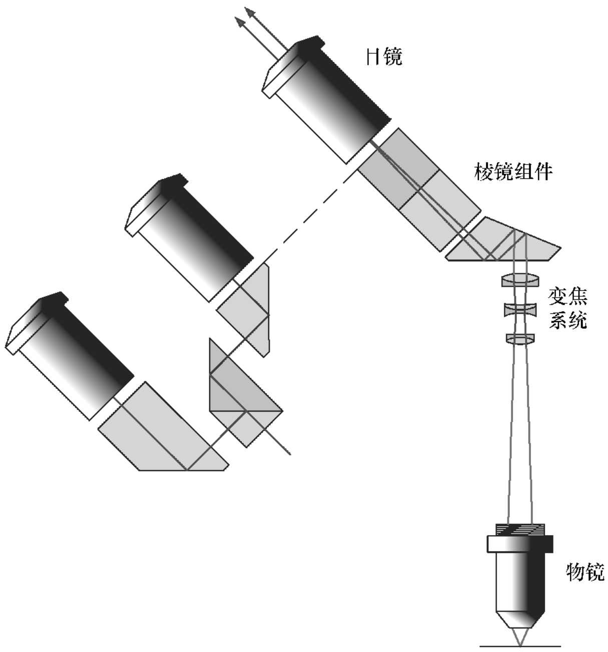


图16-5　用变焦透镜与转折棱镜组成的显微镜

为了得到衍射极限的分辨力，校正更高阶色差的显微物镜是很重要的。依据校正色差和场曲的程度，物镜可以分为几个不同的类别，如Broome（1992）描述。

消色差物镜：是对于一个限定的光谱范围消色差和视场场曲适度的显微物镜。这是非常流行的物镜设计，有许多种设计结构。

半复消色差物镜：是通过减少二级光谱来达到近似消色差的设计，Ernst Abbe在显微物镜中引入氟化钙即萤石。萤石折射率低，等于1.43，并且有独特的色散特性，可以大幅减少色差。图16-6展示了传统消色差物镜和用萤石消色差物镜的轴向色差曲线。

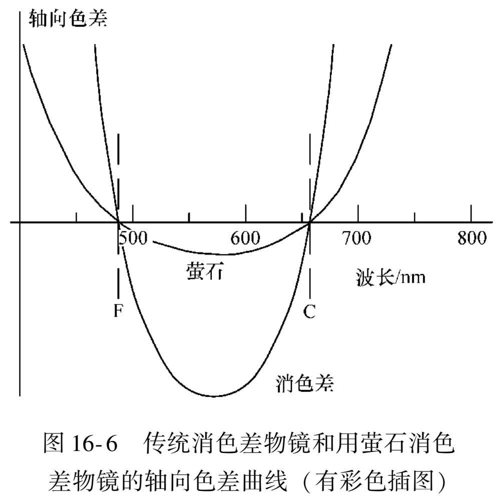


图16-6　传统消色差物镜和用萤石消色差物镜的轴向色差曲线（有彩色插图）

复消色差物镜：是利用氟化钙正透镜与两个 LAK 系玻璃的负透镜粘接，替代双胶合透镜的复消色差透镜设计方案。

平场消色差透镜：该物镜的主要特性是佩兹伐弯曲和像散小，因而视场是一个平面视场。该物镜校正了色差。

平场复消色差透镜：像平场消色差透镜，这些物像镜具有完美校正佩兹伐弯曲和像散的平面视场。同时该物镜校正了二级光谱色差。

对于大放大率的显微物镜来说，倍率色差是很难校正的，尽管残余像差不是很大。但是，如果所有其他像差被很好地校正，尤其在复消色差物镜中，这一像差是应该值得注意的。在一些被称为补偿显微镜的高质量显微镜中，显微物镜残余倍率色差在目镜被校正。问题是物镜和目镜不可以替换。为了解决这一问题，在低倍物镜中特意引入残余倍率色差，这样所有的物镜和所有的目镜之间都能够相互配合使用。但是，如霍普金斯所指出的，这种补偿必然引入一些轴向色差，最好的解决方法是同时校正物镜与目镜的所有色差。

应当指出，在设计一个显微物镜时，如果光线进入透镜的方向与实际光线方向相反的话，更容易设计和评价透镜。因此，使用光线追迹程序时，交换物和像的位置是很方便的。

有许多类型的显微物镜，它依据需求的放大率设计。在下面的章节中，将描述最通用的一些类型。表 16-1 中列出了一些 DIN 标准的显微物镜的主要性质。

图 16-7 展示了一些最通用的消色差显微物镜，图 16-8 显示了一些复消色差物镜，由萤石材料制造。这些图摘自 Benford（1965）发表的文章。显微物镜的视场与摄影物镜相比非常小。对于所有的物镜这一视场接近一个常数，直径大约是 7°。

表 16-1　部分显微物镜（DIN 标准）

类型	放大倍率	焦距/mm	*NA*	视场/mm	工作距离/mm
双胶合透镜	4.0 ×	30.60	0.08	4.50	15.80
低倍物镜	3.5 ×	30.00	0.07	5.20	25.40
李斯特物镜	10 ×	16.60	0.20	1.80	6.30
李斯特物镜	20 ×	8.78	0.40	0.90	1.50
阿米西物镜	40 ×	4.50	0.70	0.45	0.45
浸没式物镜	100 ×	1.86	1.25	0.18	0.13

注：*NA* 为数值孔径。

16.2.1　低倍物镜

最简单的物镜是一个双胶合透镜。对于这一透镜的设计过程与第 14 章所介绍的望远物镜的设计过程相同，唯一的不同只是通常用高折射率玻璃更好校正球差与轴向色差。有时，低倍物镜额外用一个弯月形厚透镜来减小佩兹伐场曲。

16.2.2　李斯特物镜

中等倍率物镜或者李斯特物镜由一对大间距可分离的双胶合透镜形成。这两个胶合透镜在刚开始设计时就考虑可以分离使用，所以它们可以单独或者组合使用。在可分离系统中，两个元件都校正了球差和色差，因此这种透镜可以消像散或者说校正场曲。

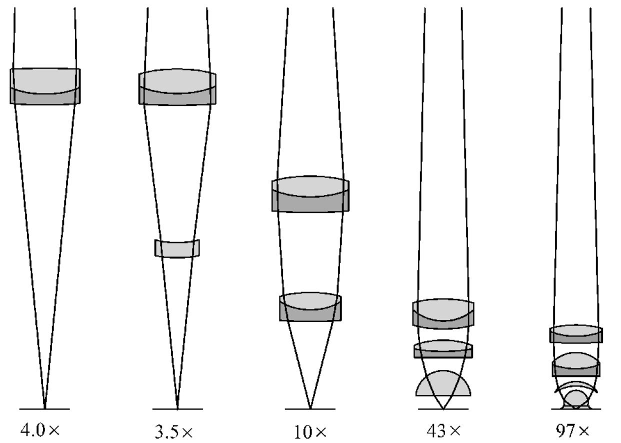


图 16-7　显微物镜

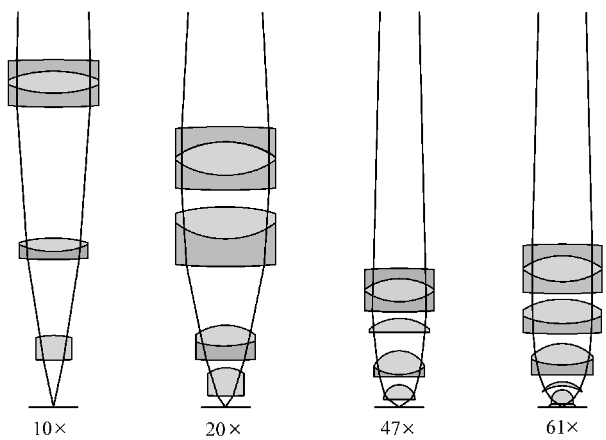


图 16-8　使用了萤石的显微物镜

这些物镜设计所用的原理由李斯特在 1830 年第一次使用，他发现平凸透镜有两对消球差的物像共轭位置。一对共轭位置对应实物成实像，另一对出现在实物成虚像时。因此，李斯特在消球差的实物位置放置第一个双胶合透镜（透镜靠近物），它的像在虚消球差点位置。然后第二个双胶合透镜的实消球差物点放置在第一个双胶合透镜的虚像处，最终的像是实像。

在第 12 章描述的佩兹伐透镜中，如果要得到一个更好的校正，系统不是可分离的。然后，两个元件之间大的分离距离大约等于物镜的有效焦距，允许设计者用胶合面的像散去适当校正部分场曲。但是，如霍普金斯（1988）指出的，应该注意用这种方式减小场曲会增加二级光谱色差。这是在这些透镜中使用萤石材料的主要原因。

在系统中为了找到同时校正球差和彗差的透镜弯曲度，Conrady（1960）和 Kingslake（1978）描述了一个被称为相配原理的图示方法。分别通过两个元件追迹光线，第一个元件从左向右，第二元件从右向左。然后，系统被组合起来，并且在空间中两个元件之间的光线应该相互匹配。当计算机光线追迹不是广泛使用时这种方法尤其有用。四种不同的弯曲度组合可以用于产生一个校正球差和彗差的系统。其中一种解对应于两个元件都分别校正像差，因此产生一个可分离的系统。不幸的是，这种形式会产生最大场曲的像散。在最靠近像的表面上的最大曲率的解给出曲率平均值不大的系统，这是四种解的最好形式。

在典型的设计中，两个元件有大约相同的贡献，所以两个元件分担的折射工作是相同的。通常两个透镜组的分离距离等于第二个透镜组（这一透镜组更靠近像）的焦距。光阑假定在第二个元件的平面上，所以物镜在物空间是远心的，这一点已经被 Broome（1992）描述。

16.2.3　阿米西物镜

阿米西物镜最早在 1850 年被设计出来，它是通过在李斯特物镜的物方加入一个近乎消球差的超半球透镜而得到的。最先认为超球面应该是完美的消球差的。但是，前面的平面引入了一些球差，因为它没有与物相接触。因此，球面的曲率半径做得要比消球差的解稍稍大一点以补偿由第一面引入的像差。这一解不仅是引入了少量球差以补偿平面折射引入的像差，而且引入少量像散以使视场变平。李斯特物镜的一个重要问题是它的工作距离短。

和李斯特物镜类似，阿米西物镜也是物方远心的物镜。

16.2.4　油浸物镜

油浸物镜通常由齐明系统和李斯特物镜组成，如图 16-9 所示。平面物体用一个大约为 0.18mm 厚的盖玻片。然后，薄油层位于盖玻片和物镜的前平面之间。油的折射率为 1.515，这一值接近匹配盖玻片与第一个透镜的折射率。

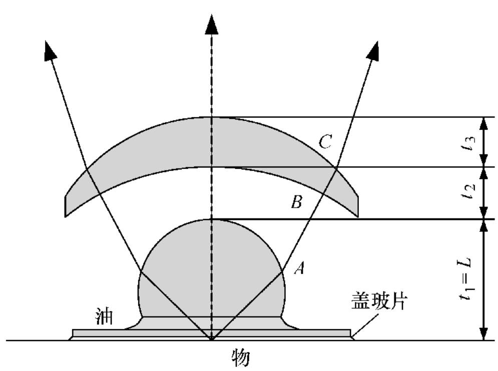


图 16-9　油浸显微物镜的双齐明波前

如果超半球面的曲率半径是 r，距离 L 是从物到这个面的距离，依据第 5 章中所述的阿贝消球差条件，这一距离是

$$L=\left(1+\frac{1}{n}\right)r \tag{16-18}$$

并且像到这个面的距离 L' 是

$$L'=(1+n)r \tag{16-19}$$

弯月形透镜的前表面的曲率半径应等于 t_2+L'，所以对于这个面，物位于它的曲率中心。弯月形透镜的第二个面的曲率半径也消球差，满足式（16-18）的阿贝条件，这里

的L'是这个面到物的距离。一些由消球差前表面引入的色差和场曲，由余下的系统补偿。

每一个阿贝消球差表面的效果是通过一个等于玻璃折射率n的因子来减小圆锥光线的数值孔径。因为前置消球差系统包括两个阿贝表面，圆锥光线的数值孔径减小了n^2倍。

16.2.5　其他类型的物镜

人们设计了许多其他类型的显微物镜。一种改进是减小场曲和像散。问题的解决不是那么容易的，例如Claussen（1964）和Hopkins（1988）所描述的那样，结果可能是非常复杂的设计。这些设计的基本原理是用分离的正负透镜组合，使佩兹伐和很小。系统类似于倒置的摄影透镜，负透镜组靠近像，正透镜组靠近物。

（Muchel，1990）最近的一个创新是将物镜的像设计在无限远，所以输出光束是准直光束。然后，在镜筒底部的另一个透镜将像成在目镜焦面上。这一方法主要有两个优势：①机械筒长可以任意的大小；②物镜的倍率色差完全校正，甚至高倍率物镜也一样。

16.2.6　反射式物镜

大约在1904年，Karl Schwarzschild发现如图16-10a所示的双反射镜系统是无球差、彗差和像散的。通过两个同心球面反射镜形成这一系统，并且一个准直光束（点光源在无穷远）在反射镜顶点进入系统。两个反射镜的曲率半径必须是以下比例

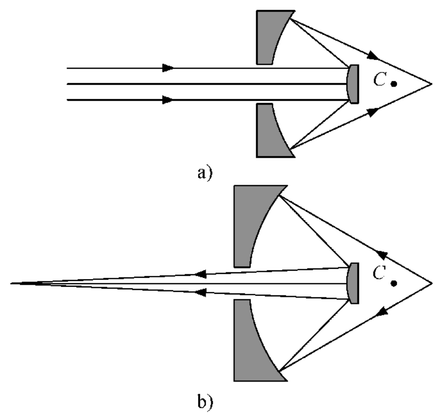


图16-10　反射式物镜

$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=2.618034 \qquad (16\text{-}20)$$

上式由Erdos（1959）得出。

当物体离前述系统距离较近时，它就变成了显微物镜（Grey，1950，1952；Grey和Lee，1949a，1949b；Norris等，1951；Thornburg，1955），如图16-10b所示。这引入了一些像差，但是可以修改两个曲率半径之间的比值来校正它们，保持它们同心。在Kingslake（1978）给出的例子中，对于10×的物镜，这一新的比值等于3.07787。

这种类型的物镜的数值孔径$NA=0.5$，放大率近似为30×。对于更高的放大倍率的物镜，必须加入石英折射元件。这种物镜可能可以用非球面进行改进（Miyata等，1952）。

这种显微物镜可以用在紫外和红外光波段，因为玻璃材料对这些波段光的吸收大，一般的物镜不能工作。

16.2.7　紧凑型读写镜头

光盘物镜与显微物镜非常相似，它用于单色激光时有重要的不同。关于这一课题的

完美评述由 Broome（1992）给出，他指出对于这一物镜有五个基本结构，分别是双高斯衍生结构、佩兹伐衍生结构、三片式衍生结构、双胶合透镜和单透镜。如果在激光器前面使用一个平行光管，这些透镜可以被设计用于准直光路。否则，使用一个 5 × 或 20 × 的放大率的物镜。许多通行的设计使用非球面或梯度折射率材料来减少透镜的数目。

16.3　显微目镜

没有场镜的显微镜有一个缺点，出瞳离显微镜的目镜很远，使观察不舒服。如图 16-1 所示，可以在形成中间实像的地方引入一个场镜。如果场镜很薄并且准确地位于实像面，则不会引入像差（除了佩兹伐场曲以外），仅当出瞳移到更靠近目镜的地方。引入场镜的另一个更重要的原因是为了校正一些像差。由目镜和场镜形成的系统简单地称作目镜。目镜的有效焦距由式（3-46）得到。如果场镜准确地位于观察的像平面上，那么我们可以很容易地看出有效焦距等于更靠近眼睛的透镜的焦距，场镜不带来任何影响。但是，一般情况下场镜不在观察的像平面处。

显微镜的出瞳位于接目镜附近，观察者眼睛必须要放在这个地方。如果不是这样，整个视场将看不全。从接目镜到显微镜出瞳的距离被称为出瞳距。如果观察者戴着眼镜，大的出瞳距是很重要的。

记住这一点很重要，当设计目镜时像差不需要校正至小于人眼的分辨力，这意味着角度偏差不需要小于 1′。

表 16-2 列出了一些显微目镜的主要特性，图 16-11 给出了说明。这些目镜的设计原理在接下来的部分描述。

表 16-2　部分商用显微镜目镜（DIN 标准）

类型	放大倍率	焦距/mm	视场/（°）	出瞳距离/mm
惠更斯目镜	5 ×	50.00	19.00	14.00
惠更斯目镜	10 ×	25.00	13.00	8.50
惠更斯目镜	15 ×	16.70	8.00	7.00
广角目镜	10 ×	25.00	18.00	15.50
广角目镜	15 ×	16.70	13.00	12.60
广角目镜	20 ×	12.50	10.00	9.80

16.3.1　惠更斯目镜

与望远镜一样，在显微镜中惠更斯目镜（Stempel，1943）是最简单和最常用的目镜类型。望远镜惠更斯目镜的设计已经在第 15 章中描述了。与望远镜中的目镜相比，在显微镜中的目镜，入瞳更靠近于目镜。两透镜间隔等于平均焦距的方法不能准确地校正倍率色差。在这种情况下，如图 16-12 所示，两片透镜必须选择合适的间隔，使得入射白光主光线通过目镜后被分开成两个平行的彩色光线。这意味着校正色差放大率的条

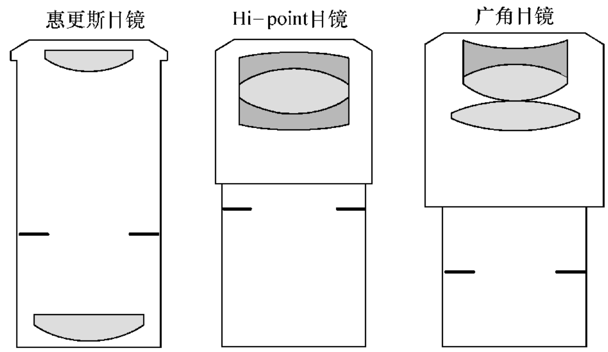


图 16-11　显微目镜

件是

$$\bar{u}'_{kC} = \bar{u}'_{kF} \tag{16-21}$$

对于入瞳接近目镜的情形，这一条件的另一表示法是用一般化方程式（4-69）表示，如下所述（Conrady，1957）：

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2 + (f_1/\bar{l}_1)} \tag{16-22}$$

式中，l_1 是光阑到第一个透镜的距离，如图 16-12 所示。如果目镜的光焦度大，这一表达式接近于式（4-69）。如果光阑靠近目镜，因为 l_1 是负的，两个透镜之间的距离 d 变得更大。

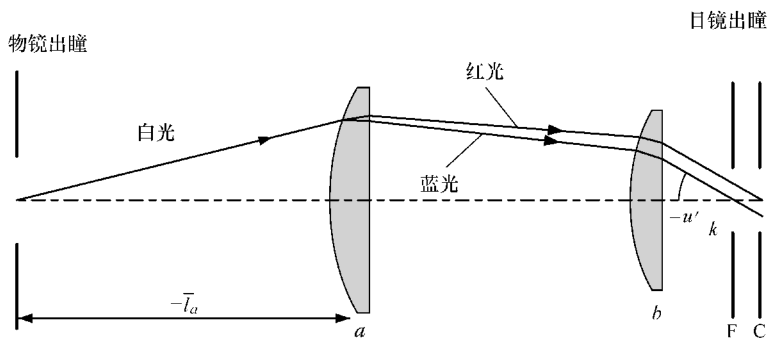


图 16-12　惠更斯目镜的设计（有彩色插图）

如果透镜形状固定为平凸透镜，如第 15 章所指出的，唯一可变的量是两个透镜的光焦度和间隔，用于实现期望有效焦距、校正彗差和倍率色差，以及最小化场曲。如果必要，作为一个折中的办法，即便存在一些残余色差，也要尽可能去校正彗差。

典型的目镜设计方法是采用反向光线追迹，光线反向进入系统，这时物位于无穷远的地方。然后，设定最后一面的曲率使得系统达到要求的有效焦距。出瞳距是另一个需要注意的重要参数，它应该尽可能大。这样我们就利用第一个透镜的凸面曲率和透镜间

的间隔校正彗差，同时获得长的出瞳距。如果彗差得到校正，接目镜曲率半径的解存在取值范围。随着曲率半径的增加，接目镜的焦距变得更长直到最终到达场镜（对于一个 10 × 的目镜，这种情况发生在曲率半径接近大约 -12mm 的时候）。对于 10 × 的目镜，这些解在图 16-13 中画出。一个设计者宁愿牺牲好的彗差校正结构也要获得合理的长出瞳距。

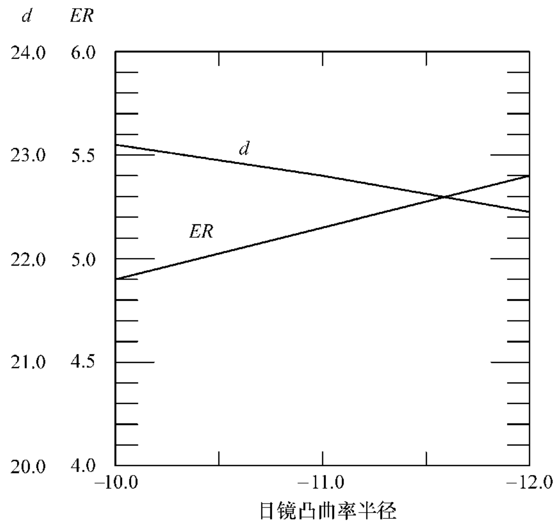


图 16-13　对于一个校正彗差的惠更斯目镜，透镜的分离距离 d 与出瞳距 ER 相对于目镜的凸曲率半径范围的关系

为了得到更好的校正像差，我们采用由冕牌玻璃制造的接目镜和由火石玻璃制造成的场镜。对于高放大倍率的望远镜来说两个透镜的焦距比大约是 2. 3，但是对于低倍显微镜来说这个比值低至 1. 4。例如，典型的 5 × 显微目镜 f_1/f_2 的比值等于 1. 5，10 × 显微目镜这一比值等于 2. 0。

Clarke（1983）描述了惠更斯目镜改进结构，在入射光一侧用一片，类似于望远镜有时使用的 Barlow 透镜。使用这一透镜有两个目的，其中一个是为了增加目镜的放大率，另一个是为了减小佩兹伐场曲和，使视场变平。

一个 10 × 惠更斯显微目镜如图 16-14 所示，它的设计数据列在表 16-3 中。

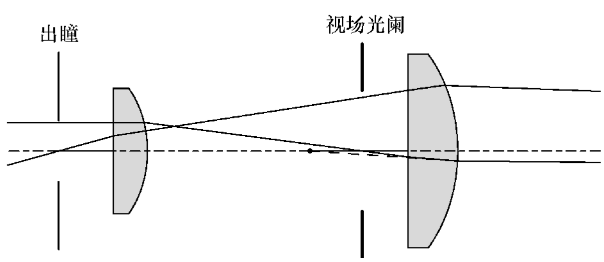


图 16-14　一个 10 × 的惠更斯目镜

表 16-3　10×惠更斯目镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
光阑	5.0	4.8	空气
平面	11.0	3.0	N-BK7
-10.0	11.0	19.1	空气
视场光阑	10.4	4.0	空气
平面	17.0	4.4	N-BK7
-15.21	17.0	-8.59	空气

角视场半径：15.0°。
出瞳直径：5.0mm。
焦距：25.0mm。
出瞳距：4.8mm。

16.3.2　广角目镜

广角目镜被设计用于提供更大的视场。得到对大多数像差较好校正的同时也得到大的出瞳距。这些设计如图16-15所示，是经常使用的克耳纳目镜，它们的设计数据在表16-4中给出。在这个例子中视场的宽度与惠更斯目镜相同，但是轴外像质更好，出瞳距更大。

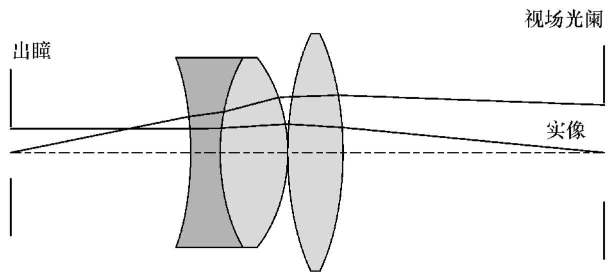


图 16-15　一个10×的广角显微目镜

表 16-4　10×广角显微目镜

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
光阑	5.0	18.9	空气
-32.8	20.0	3.1	N-SF1
22.0	20.0	7.1	N-BK7
-17.1	20.0	0.2	空气
33.25	24.0	5.8	N-BK7
-33.25	24.0	27.45	空气
视场光阑	10.4	—	—

角视场半径：5.0°。
出瞳直径：5.0mm。
焦距：25.0mm。
出瞳距：18.9mm。

Hi－Point 目镜合理校正了像差，同时出瞳距大。由于它的结构对称，比较容易设计。

16.4 显微镜照明

在显微镜中的照明系统（Dempster，1944）有柯勒照明或者临界照明。柯勒照明也用于投影系统中，因此，对它的描述留在第 17 章中进行。在图 16-16 中临界照明的基本装置。钨丝灯光源被聚光镜成像在光阑上。然后，镜台下部聚光镜将视场光阑成像在物平面上。光阑也称作孔径光阑或者镜台下部可变光栏，决定了照明系统的数值孔径。这个照明系统的数值孔径必须与显微物镜最大的数值孔径一样大。镜台下部聚光镜必须准确调焦。一旦这个聚光镜准确聚焦，光阑或镜台下部可变光栏的直径必须调为聚光镜的数值孔径相与物镜数值孔径相匹配。为了达到合理的焦距和大数值孔径，光栏直径需要大于 30mm。

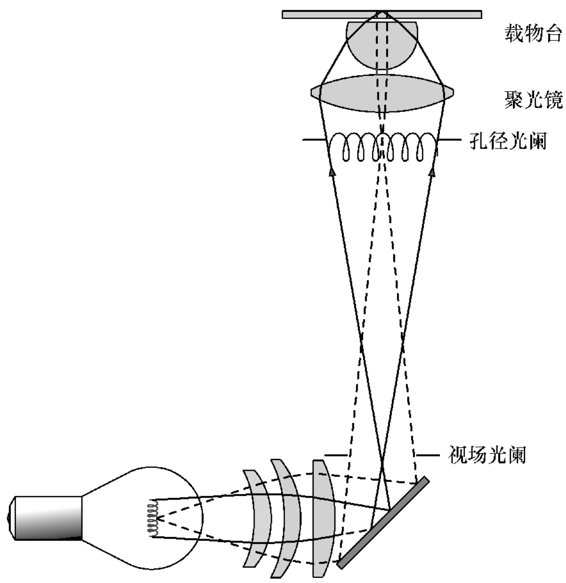


图 16-16　显微镜临界照明（虚线表示主光线）

最简单的镜台下部聚光镜是阿贝聚光镜，它由一个接近半球的透镜与会聚透镜组成，如图 16-17a 所示。更复杂的设计可以校正色差，如图 16-17b 所示。

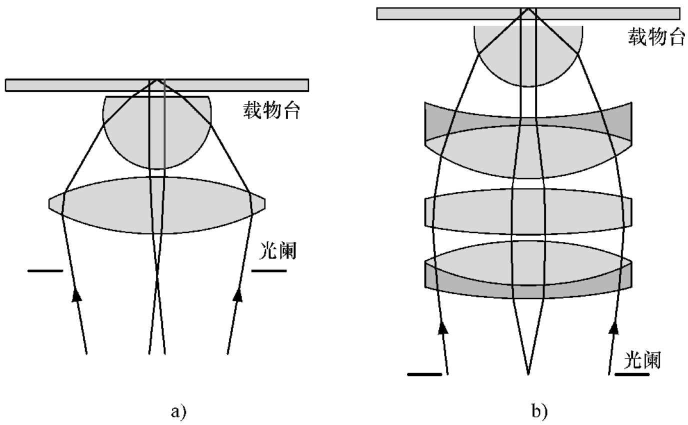


图16-17　两种聚光镜
a）阿贝聚光镜　b）显微照明中的消色差聚光镜

参考文献

[1] Benford, J. R., "Recent Microscope Developments at Bausch and Lomb," *Appl. Opt.*, **3**, 1044-1045 (1964).

[2] Benford, J. R. "Microscope Objectives" in *Applied Optics and Optical Engineering*, R. Kingslake, ed., Vol. Ⅲ, Chap. 4, Academic Press, San Diego, CA (1965).

[3] Benford, J. R. and Rosenberger, H. E., "Microscopes," in *Applied Optics and Optical Engineering*, R. Kingslake, ed., Vol. Ⅳ, Chap. 2, Academic Press, San Diego, CA (1967).

[4] Benford, J. R. and Rosenberger, H. E., "Microscope Objectives and Eyepieces," in *Handbook of Optics*, W. G. Driscoll and W. Vaughan, eds., Chap. 6, McGraw-Hill, New York (1978).

[5] Bennett, A. H., "The Development of the Microscope Objective," *J. Opt. Soc. Am.*, **33**, 123-128 (1943).

[6] Bennett, A., "Microscope Optics," in *Military Standardization Handbook: Optical Design, MIL-HDBK* 141, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962).

[7] Bennett, A., "Microscope Optics," *Appl. Opt.*, **2**, 1227-1231 (1963).

[8] Born, M. and Wolf, E., *Principles of Optics*, 2nd Ed., Pergamon Press, Oxford (1964).

[9] Broome, B. G., "Microscope Objectives and Their Evolution to Optical Disks Objectives," in *Lens Design. Critical Reviews of Optical Science and Technology*, Vol. CR41, p. 325, SPIE, Bellingham, WA (1992).

[10] Clarke, T. L., "Simple Flat-Field Eyepiece," *Appl. Opt.*, **22**, 1807-1811 (1983).

[11] Claussen, H. C., "Microscope Objectives with Plano-Correction," *Appl. Opt.*, **3**, 993-1003 (1964).

[12] Conrady, A. E., *Applied Optics and Optical Design*, Part One, Dover Publications, New York

(1957).

[13] Conrady, A. E., *Applied Optics and Optical Design*, Part Two, Dover Publications, New York (1960).

[14] Cruickshand, F. D., "The Trigonometrical Correction of Microscope Objectives," *J. Opt. Soc. Am.*, **36**, 296-298 (1946).

[15] Dempster, W. T., "The Principles of Microscope Illumination and the Problem of Glare," *J. Opt. Soc. Am.*, **34**, 695-710 (1944).

[16] Erdös, P., "Mirror Anastigmat with two Concentric Spherical Surfaces," *J. Opt. Soc. Am.*, **49**, 877-886 (1959).

[17] Foster, L. V., "Microscope Optics," *J. Opt. Soc. Am.*, **40**, 275-282 (1950).

[18] Foster, L. V. and Thiel, E. M., "An Achromatic Ultraviolet Microscope Objective," *J. Opt. Soc. Am.*, **38**, 689-692 (1948).

[19] Grey, D. S., "A New Series of Microscope Objectives: Ⅲ. Ultraviolet Objectives of Intermediate Numerical Aperture," *J. Opt. Soc. Am.*, **40**, 283-290 (1950).

[20] Grey, D. S., "Computed Aberrations of Spherical Schwarzschild Reflecting Microscope Objectives," *J. Opt. Soc. Am.*, **41**, 183-192 (1952).

[21] Grey, D. S. and Lee, P. H., "A New Series of Microscopes Objectives: Ⅰ. Catadioptric Newtonian Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 719-723 (1949a).

[22] Grey, D. S. and Lee, P. H., "A New Series of Microscopes Objectives: Ⅱ. Preliminary Investigation of Catadioptric Schwarzschild Systems," *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 723-728 (1949b).

[23] Hopkins, R. E., "The Components in the Basic Optical System," in *Geometrical and Instrumental Optics*, D. Malacara, ed., Academic Press, Boston (1988).

[24] Kingslake, R., *Lens Design Fundamentals*, Academic Press, New York (1978).

[25] Laikin, M., *Lens Design*, Marcel Dekker, New York (1990).

[26] Miyata, S., Yamagawa, S., and Noma, M., "Reflecting Microscope Objectives with Nonspherical Mirrors," *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, 431-432 (1952).

[27] Muchel, F., "ICS—A New Principle in Optics," *Zeiss Information*, **30**, 100, 20-26 (1990).

[28] Norris, K. P., Seeds, W. E., and Wilkins, M. H. F., "Reflecting Microscopes with Spherical Mirrors," *J. Opt. Soc. Am.*, **41**, 111-119 (1951).

[29] Smith, W. J. and Genesee Optics Software, Inc., *Modern Lens Design. A Resource Manual*, McGraw-Hill, New York (1992).

[30] Stempel, W. M., "An Empirical Approach to Lens Design—The Hugens Eyepiece," *J. Opt. Soc. Am.*, **33**, 278-292 (1943).

[31] Thornburg, W., "Reflecting Objective for Microscopy," *J. Opt. Soc. Am.*, **45**, 740-743 (1955).

第 17 章　投 影 系 统

17.1　成像投影仪

针对许多不同应用，有许多不同结构的成像投影镜头。所有的幻灯片或电影放映机工作原理都是相同的。但是，经典的幻灯片投影仪和家庭电影放映机现在不是非常流行了，这是由于计算机和家庭影院液晶（LCD）投影仪的出现。投影仪的主要类型的描述在一些书（Gross，2007；Ray，2002）中可以看到。

在图 17-1 中显示了一个经典幻灯片或影片投影仪的结构。一个称作聚光镜的透镜放置在灯后是为了在投影镜的入瞳上形成灯丝的像。如果假定与聚光镜的口径相比光源的尺寸很小，以至于可以完全认为它是一个点光源，通过聚光镜的总光通量 ϕ 由式（17-1）给出

$$\phi = L_V A_{source} \Omega = M_V A_{screen} \tag{17-1}$$

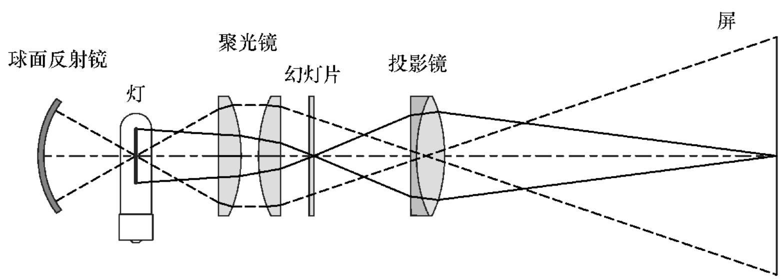


图 17-1　投影仪的基本光学结构

式中，L_V 是亮度，指光源在 A_{source} 发光面积上单位球面度单位面积所发出的光通量，M_V 是光出射度，指光源单位发光面积发出的光通量，Ω 是从光源中心观察的由聚光镜包围的投影立体角。

另一方面，如果在接收屏上需要的总光通量等于所要求的单位面积上（lux）的照度 M_V，乘以屏的面积 A_{screen}，对于通过聚光镜的光通量满足下面的关系

$$\phi = \phi_T\left(\frac{\Omega}{4\pi}\right) = M_V A_{source} = L A_{source} \Omega = E_V A_{screen} \tag{17-2}$$

式中，ϕ_T 是灯发射的总光通量，立体角 Ω 由式（17-3）给出

$$\Omega = \pi \sin^2\theta \tag{17-3}$$

如果光源不小，这是一般情形，这些方程应该仍然产生近似的结果，因为光源可以认为是发散的，或者用更准确的名词，朗伯分布。

17.2　投影仪的主要元件

17.2.1　灯

光学成像的投影仪（Gupta 和 Koshel，2010）有许多种灯和光源。老的投影仪使用如图 17-2 所示的一种特殊的灯，在一个很小的方形面积上采用钨丝绕圈。在过去有许多与这性质相似的灯。在钨丝后，灯的外面，有时在灯的里面，放置一个小的金属球面反射镜。这个金属镜的目的是反射灯发出的向后的传播光，在相同的平面上形成灯丝的像。理想情况下，反射镜必须校准以使灯丝组的像排列到灯丝之间的间隙，而不是在灯丝上。不过，这个反射镜容易发生偏移而未能对准，这使得它完全没起作用。

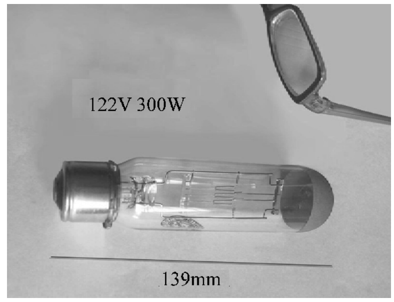


图 17-2　老幻灯片和影片投影仪中的灯

在大影院中的商用投影仪使用碳弧灯作为光源。现在，还有许多其他的光源可以使用，例如，钨卤素灯，发光二极管（LED），氙弧灯，甚至是激光光源。

根据经验发现大多数钨卤素灯有相同的发光度 L，大约是每球面度 30lm/mm^2。不同的灯之间的差别只是灯丝的面积不同。功率为 W 的灯的总光通量 ϕ_T 近似由下式给出

$$\phi_T = 3W \tag{17-4}$$

其他通常在投影仪中用的钨丝灯采用在它后面放一个二次曲面（抛物面或椭球面）反射镜，反射镜有一个大的会聚立体角，将光汇聚于灯前的某一距离处（Malacara 和 Morales，1988）。这种类型灯的典型特点是椭圆形外形，并且光聚焦在离反射镜边沿 5.6in（14.2cm）的地方。这些灯中许多都有瓦楞状的反射镜（由许多小的平面部分组成）并且灯丝沿着灯轴盘绕。这些灯在它们的前面产生一个扩展的或者弥散的光斑。另一种有椭球反射镜的相似的灯，以气体放电替代钨丝可以产生更强的照明。

在图 17-3 的投影仪中，我们有一个椭圆反射镜，在聚光镜的帮助下在物镜入瞳处形成灯丝的像。为了从这个光源会聚到更多的光，仍然需要一个聚光镜，但不需要大的聚光立体角。大多数幻灯机采用这种类型的灯。

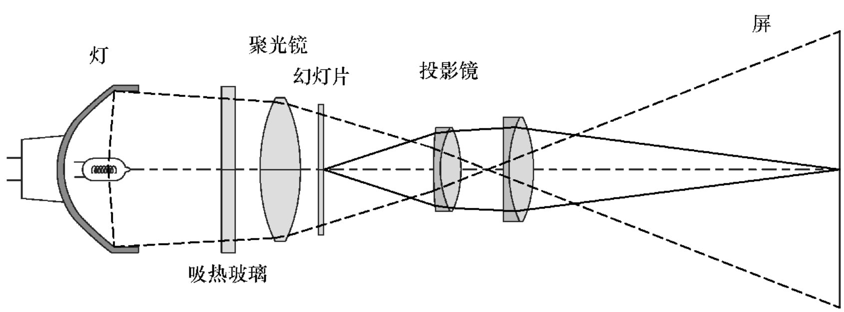


图 17-3　现代投影仪的光学结构

17.2.2 聚光镜

聚光镜的作用是最大限度地传输由灯发出的光到达投影物镜的入瞳。从聚光镜聚集的光经幻灯机，尽可能均匀地照明投影像。通过将灯丝聚焦于投影物镜的入瞳上来达到均匀照明。灯丝的像应该充满透镜光瞳而在边缘没有任何光能损失。这种类型的照明系统就是我们熟知的柯勒照明系统，由柯勒于1893年设计使用。最初这种方法被设计用于显微镜。在幻灯片前使用吸热玻璃以避免损坏幻灯片。另一个更好的解决方法是使用二向色性热反射器将红外辐射反射回去，并且把它传输到系统外。所谓的临界或阿贝照明，从另一方面描述，是在幻灯片上产生一个光源的像，而投影物镜在接收屏上产生一个幻灯片的像。这种类型的照明对于投影成像通常是不实用的，因为在幻灯片像上层叠有光源的像，产生不均匀照明。如果使用这一照明系统，光源必须是扩展的和产生漫射的。

在柯勒照明系统中，如图17-2中所示，在灯后的球面反射镜，聚集立体角内的光束在灯丝面上重现灯丝实像，但是它几乎从来没有准确的对准。一些灯将球面镜作为玻璃罩的一部分，减小失调的概率。为了使聚光镜有一个大的立体集光角，它的焦距必须尽可能地小。通常要求透镜的焦距短到可以使球差很大并且一些光线甚至进入不了投影物镜。这些光线照明的幻灯片区域，在屏幕上形成暗区。

为了得到小的焦距和允许的球差，聚光镜可能通过如图17-4a所示的一些方法来设计。最简单的聚光镜是如图17-4a所示的一对平凸透镜，但是它不可能实现很大的立体集光角，在不引入大球差的情况下。在图17-4b中做了改进，这里的折射工作被三个透镜所分担。前两个透镜是消球差表面，第三个透镜是一个等凸透镜。另一个解决方法是使用非球面镜，如图17-4c所示。有时非球面镜有抛物面形状。使用非球面的问题是必须大批量生产才能使价格压缩至一个合理范围。

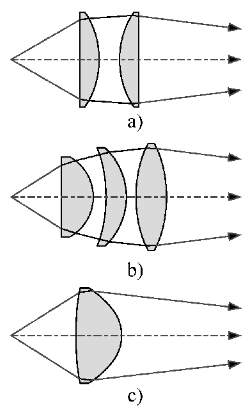


图17-4 投影仪的三种聚光镜

聚光镜需要用低膨胀系数的玻璃来制造，例如派热克斯玻璃，以避免由高强度光引起的吸热而造成的玻璃破碎。投影成像系统中经典和现代的照明系统的评述由Laikin（1995）和Cassarly（2010）给出。

大多数现代数字投影仪使用一个相对较小的光源，包括高亮度LED。采用这些光源和经典的聚光镜，几乎不可能均匀照明液晶片。一些方法（Gross，2007）已经解决了这个问题。其中一种方法是在聚光镜前使用一个二维的透镜阵列，如图17-5所示。透镜阵列使用由小光源发出的平行光束照明。另一个常用的方法是使用被称为光管（Fournier和Rolland，2008）的光束均匀器。

17.2.3 投影镜头

投影镜头将幻灯片成像在接收屏上，镜头的像差应该很好地校正了。投影镜头和摄

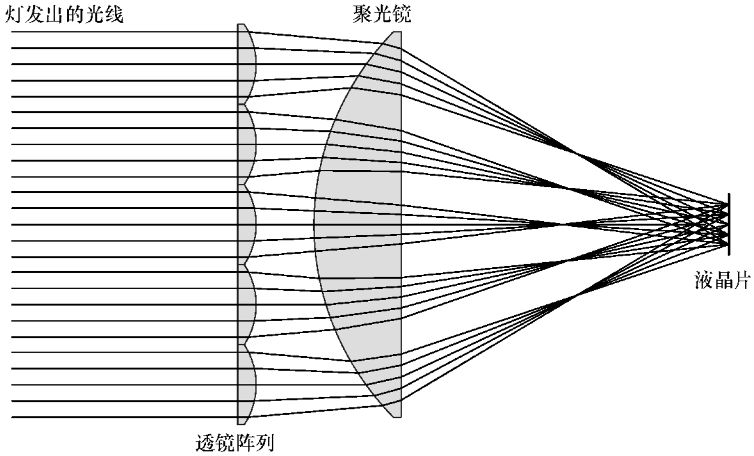


图 17-5　在聚光镜前用二维透镜阵列的聚光镜

像镜头之间有一些重要的不同点。一个不同是投影镜头的焦距通常比较大而摄像镜头的 F 数比较大，大约是3.5。靠近接收屏的观察者，在接收屏上的点扩展函数必须小于1′。但是，通常商业投影镜头的像差校正不如摄影镜头校正得好。Laikin（1995）的书是对投影镜头很好的综述，包括他们设计中许多实用的小技巧和设计结果。

投影镜头的像差应该校正，而且还要考虑幻灯片的弯曲。胶卷幻灯片总是略微卷起，除非它像三明治一样夹在两个薄玻璃中间。采购高质量的投影镜头时，需要指定使用的胶片或者是玻璃。接收屏也可能是柱形弯曲的。这时最好把这种弯曲让设计师考虑在内，即使是在接收屏的上面或下面产生一些小的散焦的情况下。如果这个散焦不能容许，则必须采用球面形状的接收屏替代柱面形状的接收屏。

应该注意到有效的入瞳只是由聚光镜形成的光源像的大小。因为投影像是矩形的，当设计投影镜头时系统的像高等于对角高度的一半。焦距接近100mm，并且视场接近18°，但是也使用一些更大的或更小的值。镜头的焦比约为 $F/2$。

因为光束的高强度，应避免使用胶合元件，除非使用耐热胶的胶合透镜。

投影镜头经常使用的设计是佩兹伐镜头。不同于在第 12 章中所研究的经典佩兹伐镜头的设计，光阑在第一个透镜（在靠近长共轭的透镜）上，或者在第二个透镜上，作为投影镜头的佩兹伐透镜。因为光阑所在透镜对于系统的像散贡献值为负，那么其他透镜必须贡献正的像散值。这个透镜的像散是许多因子的函数，如果两片镜片的屈光度不同，则胶合面是其中的一个因子。视场可能被接近焦平面的透镜变平。由 Smith 和 Genesee 光学软件公司（1992）描述的一个佩兹伐投影镜头视场变平的例子如图 17-6 所示；它的设计参数列于表 17-1 中，它的像差曲线在图 17-7 中画出，这些镜头直到第二次世界大战后的许多年仍非常流行。

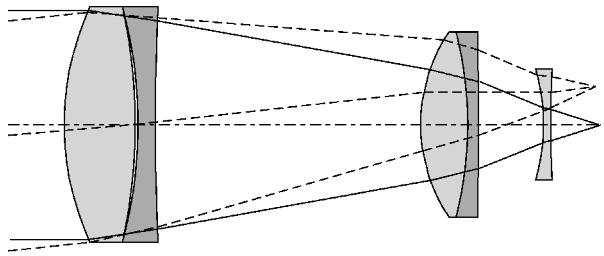


图 17-6　平场佩兹伐投影镜头

表 17-1　佩兹伐投影镜头

曲率半径/mm	直径/mm	间隔（中心厚度）/mm	介质
75.66	64.0	19.40	N－SK4
－158.30	64.0	0.73	空气
－129.78	64.0	4.80	N－SF1
600.68	64.0	72.70	空气
43.50	50.0	13.00	N－SK4
－103.82	50.0	3.00	N－SF1
平面	50.0	17.86	空气
－54.78	30.0	2.00	N－F2
294.03	30.0	12.37	

孔径（*F* 数）：62.5mm（1.6）。
焦距：100.70mm。
后工作距离：12.37mm。
物距：无穷远。
像高（半视场角）：10.51mm（6.0°）。

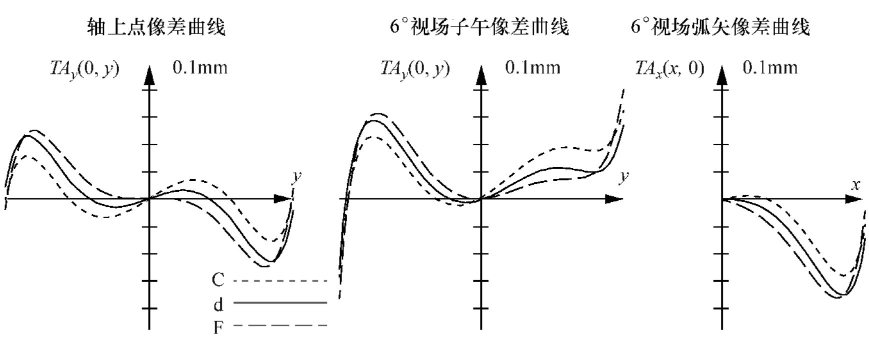


图 17-7　平场佩兹伐投影镜头的轴上和轴外像差曲线

如第 12 章所描述的非对称双高斯镜头现在经常用作投影镜头，以获得更好的成像质量。由 Sharma（1982，1983）和 Kurmar（1986）描述了比双高斯型性能更好的系统。

17.3　投影仪中的相干效应

为了理解光源的空间相干效应，让我们首先考虑一个点光源的投影仪（Hopkins，1988）。位于投影镜头入瞳上光源的像将是一个点（假定一个完美的聚光镜）。如果要投影的物是一个衍射光栅，我们从成像关系的阿贝原理知道成像的逼真度随着投影镜头的光瞳的增加而增加，因为会有更多的空间频率会允许通过镜头。因为镜头有一个有限的光瞳大小，光栅的像永远不是完善的而有一些失真振荡（或条纹）。如果由一个扩展光源替代一个点光源，光源的每个点产生一个光栅的像。但是，每个像彼此是非相干的，因为从光源上不同点发出的光是互不相干的。然后像的强度，不是场的振幅，而是像的叠加组成的结果。这个最终的像没有失真条纹，并且看起来更加平滑。

给定一个光瞳直径，理想情况是由聚光镜产生的光源的像填充入瞳孔径。但是，因为光的一些空间频率被入瞳的边缘截断了，所以靠近入瞳边缘的点光源的像将不能形成一个理想像。综上所述，理想情况是扩展光源的像不能完全填满光瞳。为了避免填充透镜光瞳的另一个重要原因是入瞳边缘的散射或衍射光，这将大大降低像的对比度。

17.4　变形投影

一个变形系统是在两个垂直方向上有不同的角度和横向放大率的系统。因此，变形压缩成像因 x 和 y 放大率不同而产生，x 放大率通常更小一些。它们有一些不同的应用，但最常见的是专业电影摄像机和投影机，以及激光二极管。

一个激光二极管发出一个有球面波前的发散光束，但在两个垂直方向上有两个不同发散角。如果用一个会聚透镜准直这个光束，形成平面波前，但是这时光束截面形状是一个椭圆形。为了把平行光束的椭圆截面转换成圆形，我们可以使用由两个棱镜组成的变形系统，由布儒斯特在 1831 年发明，如图 17-8 所示。使用两个完全相同的棱镜，由第一个棱镜产生的色散和角度偏差在第二个棱镜中补偿。这个系统必须用在平行光路以避免引入像差。

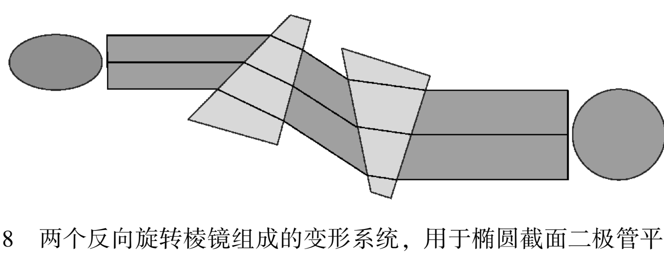


图 17-8　两个反向旋转棱镜组成的变形系统，用于椭圆截面二极管平行光束

变形系统最流行的应用是在电影工业中（Benford，1954），为了在一个标准的

35mm 胶片上记录宽屏图像。使用变形系统的主要原因是通用性，宽屏影片必须与普通电影使用相同的摄影机和放映机。像 IMAX 一样的新宽屏系统采用了完全不同的方法。在这种情况下，图像以水平的方式被记录在 70mm 的胶片上，比例为 1.44:1。

为了与普通的电影使用相同的摄影机与放映机，应该使用两个互补的变形系统，一个记录图像，在水平方向压缩，另一个投影成像，在水平方向扩展。这个过程被 Henry Chrétien 在第一次世界大战期间进一步发展，1952 年在二十世纪福斯立体声宽银幕电影中才开始第一次商用应用。直到 20 世纪 60 年代，共有三种基本的方法产生变形效果。

第一种方法是与刚刚说过的激光二极管的变形系统类似，使用一对相对反向旋转的消色差棱镜（见图 17-9）。一个棱镜的变形压缩量（或扩展）正比于 $\cos\theta$ 的函数，但是对于两个棱镜，这个效应加倍，产生的压缩效果正比于 $\cos^2\theta$。改变棱镜的取向，可以构成一个连续可变的棱镜变形器。

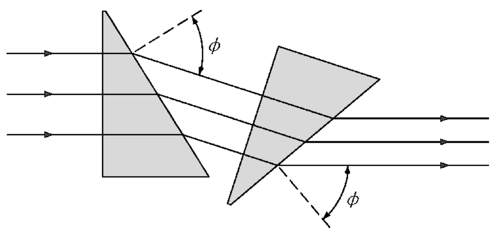


图 17-9　对于影片的变形投影，使用两个棱镜的变形系统

产生变形投影的第二种方法是使用棱镜和反射镜构成的系统，如图 17-10 所示。

第三种方法是使用柱面透镜，组成一个无光焦度的附件，放在摄像头或透镜镜头的前面，这正好构成一个变焦系统。图 17-11 所示为一个伽利略无光焦度变形附件。

这些系统的大多数都有许多瑕疵和问题。现代变形系统相当复杂，初始方法中的大部分缺陷都已经解决了。Yuan 和 Sasian（2009a，209b，2010）详细地研究了柱面镜变形系统的像差。

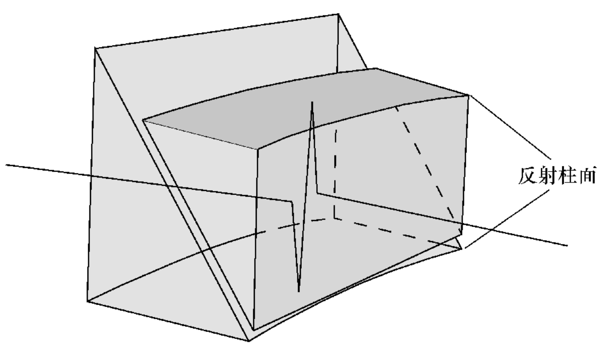


图 17-10　在特艺拉码电影系统中双柱面棱镜的变形系统

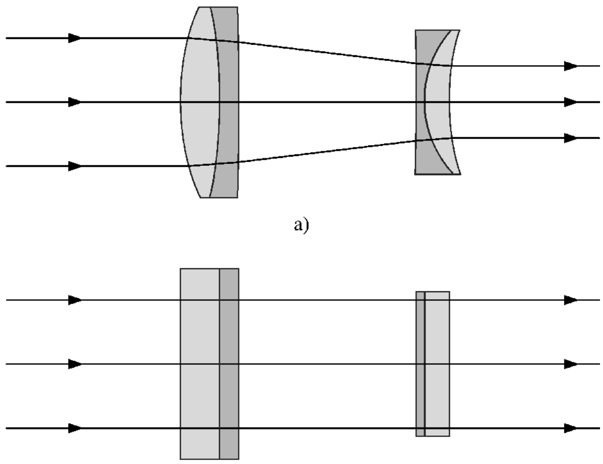


图 17-11　附加在投影镜头上的伽利略无光焦度变形
a）侧视图　b）顶视图

17.5　幻灯片和电影投影仪

在这些投影仪中物体的成像记录在胶片上。一个典型的家庭幻灯片的图像记录在 35mm 的胶片上。投影仪的焦距在 100 ~ 150mm 之间，有时使用一定的变焦能力的镜头，这样可以在任意的距离投影到接收屏上。

商业影片投影仪主要使用 35mm 和 70mm 的胶片，但是家庭影片使用更小的胶片，主要是 8mm，超级 8mm 和 16mm。

17.6　高射投影仪

图 17-12 展示了一个高射投影仪。光源是一个小的灯丝圈。聚光镜是一对塑料菲涅耳透镜，在它上面放置幻灯片。光源的像在投影镜头上只是一个小的光点。这个像的大小决定了光阑的大小；因此，有效的透镜入瞳口径也很小。投影镜头是基于如第 11 章所描述的大视场镜头，因为系统对称性和光阑小，大部分像差得到校正。但是，如果系统未能正确地对准调校，会出现很大的像差。

通常，高射投影仪上方的镜头倾斜放置，这样高射投影仪可以在比它高得多的屏幕上投影成像。理想的方形图像变形为梯形，它有最大的上边长和最小的下边长。这种效应被公认为梯形畸变，可以按 Malacara – Doblado（2004）的提议的方法校正。

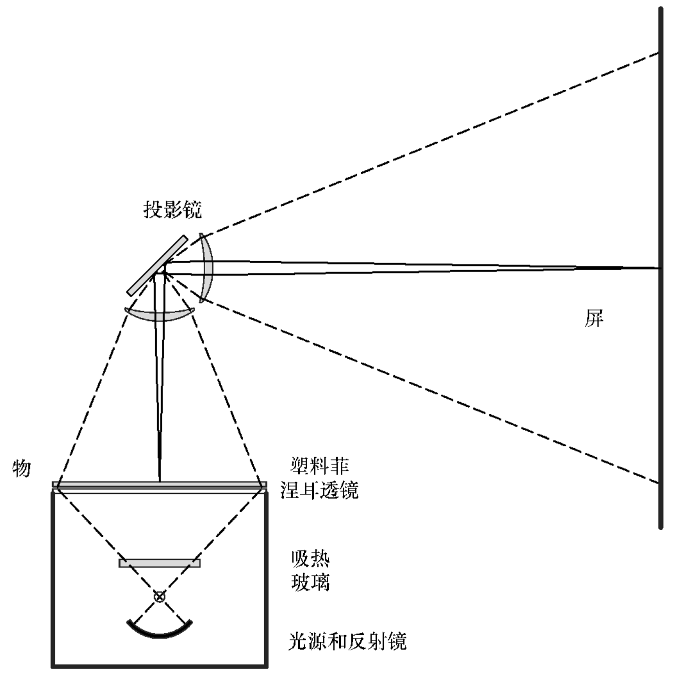


图 17-12　高射投影仪

17.7　轮廓投影仪

在高精度机械和仪器的车间或实验室中，轮廓投影仪用于检测小的部件。如图17-13所示的投影镜头必须是远心镜头，入瞳位于无穷远处。对于这个远心设计有两个重要的原因。一个原因是可以检测像球体一样的物体，只有当主光线平行于光轴时才能测量它的轮廓。另一个原因是更换物体时引起的少量离焦会影响放大率。

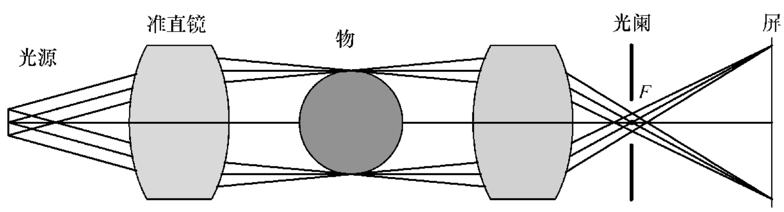


图 17-13　远心投影系统

为了同样的理由，照明光束必须是平行光束，通过放置光源于聚光镜的焦点处来实现。这是在投影仪中使用的标准的柯勒照明，光源的成像充满投影镜头的光瞳。但是，在这种情况下，入瞳位于无限远。在 Habell 和 Cox（1948）的书中可以看到更多关于投

影仪的细节。

17.8　电视投影仪

有许多不同的方法对电视图像投影成像，这里，我们将只描述两种方法。第一种方法如图 17-14 中所示（Habell 和 Cox，1948）。在这个系统中，一般使用三个电子管，每一个对应一种颜色。然后，三种颜色在屏幕上叠加。施密特系统（Friedman，1947）有很大的优势，因为它的大孔径。塑料或者玻璃物镜也能使用。通常，透镜必须是非球面的。当设计这些透镜时（Osawa 等，1990）必须记住一些重要的事实，例如：

1）F 数必须要小，因为图像的亮度与 f/l 相似。

2）视场角必须大，在 30°左右或者更大，这样可以缩短投影距离。

3）畸变不需要很好地校正，因为畸变能在显像管中校正。

4）如果使用三个独立的显像管，则不必校正色差。

5）允许系统存在场曲，它能通过弯曲显像管表面或使用液体场镜来补偿。

在便携式电视投影仪中通常使用另一种方法，彩色图像成在透明的 LCD 上。与传统的幻灯片投影仪一样，如图 17-1 中所示，图像投影屏幕上，就像在后面所描述的投影仪一样。因为只有一个彩色的图像，物镜要求很好的校正色差。

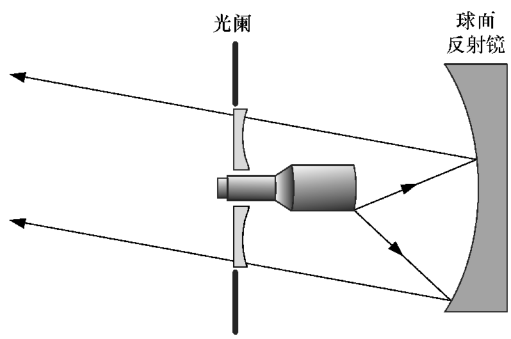


图 17-14　Schmidt 系统电视投影仪

17.9　液晶电脑和家庭影院投影仪

因为液晶电脑和家庭影院投影仪的出现，胶卷幻灯片、高射投影仪和电视投影仪都很快消失了。它们是由 Gene Dolgof 在试图发展一种能产生比阴极射线管电视投影仪更明亮图像的新投影仪的过程中发明的。在试了很多不同的方法之后，在 1971 年他使用液晶去调制光。直到 1984 年他最终使用可寻址的 LCD 建造了第一个可以工作的投影仪。在这之后，他必须解决一些重要的实际问题，包括光效和像素出现的分布。后来，他开了第一家公司进行商业化运作。最终，他把技术授权给一些著名的电子公司。

这些投影仪使用的光学原理与老的投影仪相同，但是有一些改进。例如，当一个幻灯片投影仪不在平台上方，并且屏幕不位于投影仪光轴的中心，投影仪必须向上倾斜一个角度，指向屏幕中心。这一倾斜产生了关键的变形：那就是图像形成最大边在上方的梯形形状。为了在 LCD 投影仪中消除这一问题，光学系统必须如图 17-15 所示设计。我们看到无畸变视场一定大于实际使用的视场。投影镜头光轴不通过幻灯片和屏幕的中心。

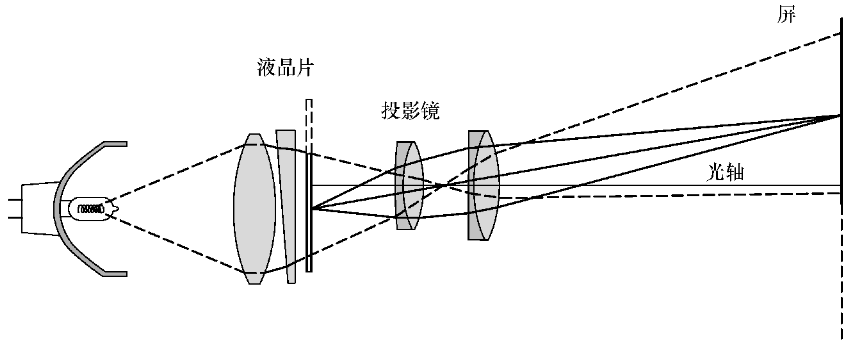


图 17-15　在 LCD 投影仪的光学结构

在这些投影仪中，图像在称作像素的两维液晶阵列元件上产生（Lee，2005）。液晶晶体放置在两个偏振方向相互垂直的线性偏片之间。两个薄的透明导电电极，例如氧化锡，镀在液晶的两侧。在液晶晶体的垂直方向加电场，改变线偏转光偏转面转动的幅值。这样通过整个系统的光可以用电场的大小来控制。因此，像素化液晶扮演着胶片幻灯片的作用，它需要照明后再投影成像。

显示彩色图像时，液晶上像素依次形成红、绿、蓝（RGB）和白色图像的黑白图像。然后，四个图像中的每一个通过用四色滤波片对应的区域滤波后投影，滤波片按角度分为四个扇区：白色，红色，绿色和蓝色。为了避免旋转滤波器，在一些投影仪中使用了有二向色性的光束分束棱镜。

为这些投影仪设计投影镜头时，需要使用物方远心结构。或者说，主光线必须在垂直方向上通过幻灯片以避免由入射角引起的照度变化。

参考文献

[1] Benford, J. R., "The Cinemascope Optical System," *J. Soc. Mot. Pic. Tel. Eng.*, **62**, 64 – 70 (1954).

[2] Cassarly, W., "Nonimaging Optics: Concentration and Illumination," in *Handbook of Optics*, 3rd ed., M. Bass, V. H. Mahajan, and E. V. Stryland, eds., Chap. **39**, McGraw – Hill, New York (2010).

[3] Friedman, H. S., "Method of Computing Correction Plate for Schmidt System for Near Projection, with Special Reference to System for Television Projection," *J. Opt. Soc. Am.*, **37**, 480 – 484

(1947).

[4] Fournier, F. and Rolland, J., "Optimization of Freeform Lightpipes for Light - Emitting - Diode Projectors," *Appl. Opt.*, **47**, 957 - 966 (2008).

[5] Gross, H., ed., *Handbook of Optical Systems*: *Vol.* 4, *Survey of Optical Instruments*, Wiley - VCH, Weinheim (2007).

[6] Gupta, A. and Koshel, R. J., "Lighting and Applications," in *Handbook of Optics*, 3rd ed., M. Bass, V. H. Mahajan, and E. V. Stryland, eds., Chap. 40, McGraw - Hill, New York (2010).

[7] Habell, K. J. and Cox, A., *Engineering Optics*, Sir Isaac Pitman and Sons, London (1948).

[8] Hopkins, R., "The Components in the Basic Optical System," in *Geometrical and Instrumental Optics* (*Methods of Experimental Physics*, *Vol.* 25), D. Malacara, ed., Academic Press, Boston (1988).

[9] Laikin, M., *Lens Design*, 2nd ed., Chaps. 22 and 29, Marcel Dekker, New York (1995).

[10] Lee, H. - C., *Introduction to Imaging Science*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).

[11] Malacara, Z. and Morales, A., "Light Sources," in *Geometrical and Instrumental Optics* (*Methods of Experimental Physics*, *Vol. 25*), D. Malacara, ed., Academic Press, Boston (1988).

[12] Malacara - Doblado, D., "Keystone Aberration Correction in Overhead Projectors," *Appl. Opt.*, **43**, 4123 - 4126 (2004).

[13] Osawa, A., Fukuda, K., and Hirata, K., "Optical Design of High Aperture Aspherical Projection Lens," *Proc. SPIE*, **1354**, 337 - 343 (1990).

[14] Ray, S. F., *Applied Photographic Optics*, Chap. 64, Focal Press, Oxford (2002).

[15] Sharma, K. D., "Better Lens for 35 - mm Cinematograph Projector," *Appl. Opt.*, **21**, 4443 - 4445 (1982).

[16] Sharma, K. D., "Future Lenses for 16 - mm Cinematograph Projectors," *Appl. Opt.*, **22**, 1188 (1983).

[17] Sharma, K. D., and Kumar, M., "New Lens for 35 - mm Cinematograph Projector," *Appl. Opt.*, **25**, 4609 - 4613 (1986).

[18] Smith, W. J. and Genesee Optics Software, Inc., *Modern Lens Design. A resource Manual*, McGraw - Hill, New York (1992).

[19] Yuan, S. and Sasian, J., "Aberrations of Anamorphic Optical Systems. Ⅰ: The First - Order Foundation and Method for Deriving the Anamorphic Primary Aberration Coefficients," *Appl. Opt.*, **48**, 2574 - 2584 (2009a).

[20] Yuan, S. and Sasian, J., "Aberrations of Anamorphic Optical Systems. Ⅱ: Primary Aberration Theory for Cylindrical Anamorphic Systems," *Appl. Opt.*, **48**, 2836 - 2841 (2009b).

[21] Yuan, S. and Sasian, J., "Aberrations of Anamorphic Optical Systems. Ⅰ: The Primary Aberration Theory for Toroidal Anamorphic Systems," *Appl. Opt.*, **49**, 6802 - 6807 (2010).

第 18 章　镜头设计优化

18.1　基本原则

直到 20 世纪 40 年代后期，所有的光学设计还不得不借由对数表进行光线追迹手工计算。这种方法非常乏味且缓慢，仅仅追迹一条光线穿过光学系统，就将耗费大量的工作和耐心。最早使用计算机进行光线追迹的或许是 James G. Baker. 1944 年他在哈佛大学使用 Mark Ⅰ计算器追迹光线。在这台机器上，追迹一条通过光学表面的不交轴光线将花费 120s。1953 年，在罗切斯特大学光学学院，Rober E. Hopkins 首次使用 IBM 650 进行了光线追迹。另一个此领域的先驱者是伊士曼柯达公司的 Donald P. Feder。计算机的工作节省了设计过程中大量的时间，但程序只是使整个过程更快的一个工具，两种方法都是必要的。然而，这些工作为未来的结果打下了坚实的基础。Feder 的文章（1963）给出了关于自动镜头设计历史的一个很好的回顾，使用的方法有很多（如 Brixner，1963b、1964a、1964b、1964c；Feder，1951、1957a、1962；Grey，1963a、1963b；Holladay，1960；Hopkins，1962a、1962b、1962c；Hopkins、Spencer，1962；Meiron、Volinez，1960；Peck，1980；Stavroudis，1964；Wynne、Wormell，1963）。现在的镜头设计程序已经相当好，但是还远不能称为完全自动化。为了正确使用这些程序，掌握足够的光学设计知识是完全必要的。

镜头设计中，评价函数是描述系统性能参数的函数（距离理想解有多近）。评价函数越大，系统越差。所有优化方法的目标都是尽可能地减小评价函数。一些作者提出称这个函数为误差函数，因为最终函数值越小，光学系统越接近理想状态。

镜头优化程序需要一个初始设计来进行多次迭代，直到得到一个优良的设计。Smith 和 Genesee（1992）、Laikin（1990）以及 Cox（1964）的著作中给出了诸多初始设计。一些自动化程度高的程序，初始设计甚至可以是一系列平行玻璃平板（Brixner，1963a）。但即使这样，一个有经验的操作者也是必需的。

初始设计，如 Hilbert 等（1990）描述的那样，可以用几种不同的方式建立：

1）科技文献中存在的相似设计。Cox（1964）、Laikin（1990）、Smith 和 Genesee（1992）以及其他许多学者的著作都是这种设计的来源。

2）在使用相同 F 数 FN 和相近主要特性的条件下，对一个现有设计进行缩放。

3）使用至少与期望的系统特性相近的特性参数修改一个设计。

4）使用一阶理论对系统进行粗略设计，然后使用三阶像差理论得到一个近似设计。

18.2　优化方法

对镜头设计优化，发展出了许多各具优缺点的方法。一些著作对此问题进行了比较好的回顾，如 Feder（1963）、Hayford（1985）。

镜头设计的主要问题是组成评价函数的函数不是线性的。因此，解就非常依赖于初始点。许多数学方法被使用以接近这个解。现在我们介绍其中几个。

1）一种早期使用的方法被称为优化梯度法，或者最速下降法，也叫折线法。这些都是 Cauchy 于 1847 年首先提出的方法的不同名字。对解空间的一个起始点，计算此点处的评价函数和相对每个参数的偏导数。然后，在梯度的相反方向取一个新的点，以减小评价函数。这个点沿直线移动，直到评价函数不再减小而开始增大。这时，重复上述的计算，可以得到一个新的梯度方向。新的梯度方向和先前的是垂直的，这也是折线法名字的由来。这也许是最简单的方法，但是在几次连续的迭代后，对解的收敛性变得非常低。即使函数是严格线性的（这不是常见情况），这个问题也存在于此方法中。

2）共轭梯度法和优化梯度法很相似，区别在于每次迭代后的新的方向不是新的梯度，而是稍有不同。因此，新的方向不再垂直于先前的路径，而是相对其成小于 90°的角。这个区别的结果是收敛速度的大幅提高。例如，一个由 N 个线性方程组成的系统的解，总是可以在 N 次迭代后得到。这种方法的详细数学描述可以在 Feder（1963）的文章中找到。

3）由 Grey（1963a、1963b）发展出来的 Grey 优化方法，是基于带有正交像差系数的像差理论的构造来简化像差平衡的。

4）Glatzel 自适应法由 Glatzel（1961）与 Hopkins 和 Spencer（1962）独立提出。Glatzel 和 Wilon 对此方法做了详细论述（1968）。这种方法类似于镜头优化程序使用之前设计者的设计路径。不使用评价函数，而是修正单独的像差，一次修正几个，直到所有的像差都被修正。某种意义上，这种方法类似于第 11 章中描述的图表法。本章中我们将较详细地描述这种方法。

5）另一种处理方法使用 Legendre 于 1805 年发明的最小二乘法。这种方法发明出来是为了求解一个由线性方程组成的系统。通过泰勒展开，忽略高阶项，近似为线性方程。这种方法可以扩展到非线性方程组成的系统。首先把这种方法应用到镜头设计上的是 Rosen 和 Eldert（1954）。评价函数定义为像差的平方和。像差为线性化的函数。由于这些函数不是真正的线性，这个过程在连续的迭代中必须重复进行，直到评价函数不再减小，即找到了一个解。一个很快就可以发现的问题是，这些函数和线性相距甚远，以至于经常找不到解，迭代过程在最小值附近大范围地振荡，而不能接近它。

6）阻尼最小二乘法试图通过在每次迭代中减弱步长的大小来强制最小二乘法找到一个解。这种方法首先由 Levenverg 于 1944 年提出，稍后我们详细描述（Meiron，1959、1965；Rosen 和 Chung，1956）。这是商业镜头设计程序最常用的方法。

18.3 格拉策尔自适应法

如 Glatzel 和 Wilson（1968）详细描述的那样，在这种方法中，设计者选择少量的像差，不超过独立变量的个数，并赋给它们目标值。对其他的像差，只赋给一个最大限制。这样，对像差f_n 和变量p_j，我们可以把系统写为一组联立方程，即

$$\frac{\partial f_n}{\partial p_1}(p_1 - p_{01}) + \frac{\partial f_n}{\partial p_2}(p_2 - p_{02}) + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial p_J}(p_J - p_{0J}) = f_n - f_{0n} \quad (18\text{-}1)$$

$$n = 1, \cdots, N$$

假设函数在变量空间 $\{p_{01}, p_{02}, \cdots, p_{0N}\}$ 的起始点附近是线性的。在起始点处，像差值为f_{0n}。

对整个光学系统的优化由以下几步完成：

1）评价式（18-1）组成的系统矩阵。

2）使用系统矩阵和像差需要的改变量（$f_n - f_{0n}$），计算（$p_j - p_{0j}$）。

3）通过在（$p_j - p_{0j}$）方向移动一部分 k，产生一个新的系统。将每个变量的增量 k（$p_j - p_{0j}$）存储起来以备后面使用。

4）在这个新的点处，评价系统，并比较计算出来的像差值和期望值，而且考虑到只改变了计算出步长的一部分 k。这给出非线性的一个估计。

5）步骤1）中得到的同样的系统矩阵被用来计算新的解，以产生期望的像差变化。

6）计算另一个变量变化。比较有最大变化量的变量增量和得到的增量，并储存在步骤3）中的相同变量的内存中。然后，按照刚刚考虑的两个相比较的变量的最大值来调整增量。如果所有变量的增量的最大值是零，转至步骤8）；否则，转至步骤4），重复那个点处的过程。

7）如果变量的最大增量是0，转至步骤8）；否则，回到步骤4）。

8）选择一组具有新的目标值的新的像差，回到步骤1）。

当所有期望的像差都在规定的限制内被校正时，优化过程结束。更多的细节可以在 Glatzel 和 Wilson（1968）的文章中找到。

18.4 约束阻尼最小二乘优化法

这一部分大体遵循 Spencer（1963a、1963b）的处理。系统变量，例如透镜的曲率、厚度和分离，用 J 个变量 $p_1, p_2, \cdots, p_J$ 来表示。函数 $f_1(p_1, p_2, \cdots, p_J)$，$f_2(p_1, p_2, \cdots, p_J)$，…，$f_K(p_1, p_2, \cdots, p_J)$，有时称为操作数，用这些变量来定义。这些函数定义了光学系统的特性，它们包括镜头设计者选择的有效焦距、后焦距、球差、彗差、佩兹伐场曲、光学传递函数等或者任意其他镜头特性。这些函数设定为某个特定值 s_k，而不一定是零。那么，问题变为找到下面一组方程的联立解：

$$f_k(p_1, p_2, \cdots, p_J) = s_k \quad k = 1, \cdots, K \quad (18\text{-}2)$$

式中，s_k 是约束，代表函数 f_k 的目标值。

这组方程的联立解不一定总是存在。例如，经常函数数目比变量数目要多（$K > J$）。因此，目标不是寻找一个解，而是最小化下列函数：

$$\varphi = \sum_{k=1}^{K} w_k^2 \ (f_k - s_k)^2 \tag{18-3}$$

式中，w_k 是权重因子。这些因子在函数最小化中用来设置相对优先级。如果联立解存在，最小化过程将产生这个解。这个称为评价函数的函数的定义是镜头设计过程中最关键的一步（Feder，1957b）。

一般情况下，某些函数 f_k 需要最小化，例如，初级球差；但是某些需要一个确定解，例如，有效焦距的最终值。因此，可以很方便地把这些函数分为两组，一组为

$$g_m(p_1, \cdots, p_J) \quad m = 1, \cdots, M \tag{18-4}$$

需要最小化。而另一组为

$$h_n(p_1, \cdots, p_j) \quad n = 1, \cdots, N < J \tag{18-5}$$

需要一个确定解。然后，最小化下述评价（或误差）函数 φ

$$\varphi = \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \ (g_m - s_m)^2 \tag{18-6}$$

式中，s_m 是 g_m 的目标值。解出下述联立方程组：

$$h_n(p_1, \cdots, p_j) = t_n \quad n = 1, \cdots, N \tag{18-7}$$

式中，t_n 是函数 h_n 的期望值。

18.4.1　问题线性化

镜头设计中的困难之处在于系统变量变化时函数（操作数）不是线性的。然而，如果变量变化不大，可以近似为线性函数。将每个函数在起始点（p_{01}，p_{02}，…，p_{0N}）处展开为泰勒级数，只取常数项和线性项。连续地迭代此过程，就可以找到最终解。那么，我们可以把函数 g_m 和 h_n 写为

$$g_m = g_{0m} + \frac{\partial g_m}{\partial p_1}(p_1 - p_{01}) + \frac{\partial g_m}{\partial p_2}(p_2 - p_{02}) + \cdots + \frac{\partial g_m}{\partial p_J}(p_J - p_{0J}) \tag{18-8}$$

$$h_n = h_{0n} + \frac{\partial h_n}{\partial p_1}(p_1 - p_{01}) + \frac{\partial h_n}{\partial p_2}(p_2 - p_{02}) + \cdots + \frac{\partial h_n}{\partial p_J}(p_J - p_{0J}) \tag{18-9}$$

现在我们定义下列变量以简化记号。

$$\begin{aligned} d_m &= s_m - g_{0m} \\ e_n &= t_n - h_{0n} \\ q_j &= p_j - p_{0j} \\ a_{mj} &= \frac{\partial g_m}{\partial p_j} \\ b_{nj} &= \frac{\partial h_n}{\partial p_j} \end{aligned} \tag{18-10}$$

然后，利用式（18-6）和式（18-7）的线性近似，问题变为最小化评价（误差）函数 φ：

$$\varphi = \sum_{m=1}^{M} w_m^2 \left(\sum_{j=1}^{J} a_{mj} q_j - d_m \right)^2 \tag{18-11}$$

同时，得到 N 个联立方程组的约束的解，即

$$\sum_{j=1}^{J} b_{nj} q_j = e_n \quad n = 1, \cdots, N \tag{18-12}$$

18.4.2 使用拉格朗日乘数法

我们用一种笼统的方法来描述拉格朗日乘数法。我们有一个需要最小化的评价函数 φ（q_1，q_2，…，q_J），约束条件为

$$\mathrm{d}\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}\right)\mathrm{d}q_1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_2}\right)\mathrm{d}q_2 + \cdots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_J}\right)\mathrm{d}q_J = 0 \tag{18-13}$$

如果变量（q_1，q_2，…，q_J）全部相互独立，式（18-13）的解可以简单地由式（18-14）得出。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1, 2, \cdots, J \tag{18-14}$$

然而，在我们的系统中，有 N 个约束方程，表示为

$$u_n(q_1, q_2, \cdots, q_J) = e_n \quad n = 1, \cdots, N < J \tag{18-15}$$

那么只有 $J-N$ 个变量是独立的，而不是 J 个，因此式（18-13）不成立。

如果在最小化评价函数之前，找到一个约束方程的解，我们就将发现存在一组连续的点满足这些约束。因为有 J 个变量，$N<J$（约束方程个数），所以这些点存在于（$J-N$）维空间中。满足约束方程的空间区域，假设相对所有变量都是线性的，可以看作一个 N 维空间中的（$J-N$）维平面。

在只有（$J-N$）个独立变量的空间中的这些解中间，我们必须找到一个满足式（18-12），并且最小化评价函数的解。我们已经解释了为什么不能应用式（18-13），但是拉格朗日乘数法可以帮助我们。

现在，假设点 $\{q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_J\}$ 是期望的一个解，$\{q_1+\mathrm{d}q_1,\ q_2+\mathrm{d}q_2,\ \cdots,\ q_J+\mathrm{d}q_J\}$ 是另一个解，如果微分满足下述条件，即

$$\mathrm{d}u_n = \left(\frac{\partial u_n}{\partial q_1}\right)\mathrm{d}q_1 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial q_1}\right)\mathrm{d}q_1 + \cdots + \left(\frac{\partial u_n}{\partial q_J}\right)\mathrm{d}q_J = 0 \\ n = 1, \cdots, N \tag{18-16}$$

因此 u_n 的值不改变。式（18-16）的一个几何解释是每一个约束方程是一个 J 维空间的 $J-1$ 维平面（在取偏导的点的一个小的临域内，因此线性假设依然有效）。垂直于这个平面的矢量为

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial q_1}\ \frac{\partial u_n}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial u_n}{\partial q_J}\right) \tag{18-17}$$

评价函数的梯度必须垂直于这个满足所有约束的 $J-N$ 维平面。最小值，或者更准确地说是评价函数的不动点，必须在这个平面上。显然，在最小点处，式（18-17）的梯度必须垂直于这个 $J-N$ 维的平面。因此，有可能把这个梯度写为所有垂直于约束平面的矢量的线性集合，得到

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}\right)+\sum_{n=1}^{N}\lambda_n\left(\frac{\partial u_n}{\partial q_k}\right)=0\quad k=1,\cdots,J \tag{18-18}$$

式中，未知常数 λ_n 称为拉格朗日乘数。

约束方程［式（18-15）和式（18-18）］共同组成一组包含 $N+J$ 个未知变量 λ_1，…，λ_N，q_1，…，q_J 的 $N+J$ 个方程。解同时满足约束条件和评价函数的极值。

由于约束条件由式（18-12）和式（18-15）给出，我们得到

$$\frac{\partial u_n}{\partial q_k}=b_{nk} \tag{18-19}$$

从式（18-11）得到

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_k}=2\left[\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{J}w_m^2a_{mk}a_{mj}g_j-\sum_{m=1}^{M}w_m^2a_{mk}d_m\right] \tag{18-20}$$

那么，式（18-19）变为

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{J}w_m^2a_{mk}a_{mj}q_j+\sum_{n=1}^{N}b_{nk}v_n=\sum_{m=1}^{M}w_m^2a_{mk}d_m\quad k=1,\cdots,J \tag{18-21}$$

式中，$v_n=\lambda_n/2$。式（18-12）和式（18-21）组成的一组包含 $N+J$ 个未知变量的 $N+J$ 个线性方程的方程组，可以用标准方法求解。Spencer（1963b）指出，这种方法得到评价函数的最小值，排除了最大值的可能性。然而，有时最小值不是唯一的，一维最小值可能是一个小区域而不是一个点。这种不确定性可以通过简单地把下述和数加入评价函数来解决。

$$S=\sum_{j=1}^{J}(c_jq_j)^2 \tag{18-22}$$

式中，c_j 是权重因子。这个和数除了可以去除这种不确定性，还允许对求解过程中不同变量的变化产生的影响进行控制。c_j 的较大值强制系统在此参数处产生较小的变化。换句话说，解在最小值附近的小区域内取值，即在最接近初始解的点。考虑到这一项，式（18-21）变为

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{J}w_m^2a_{mk}a_{mj}q_j+c_k^2q_k+\sum_{n=1}^{N}b_{nk}v_n=\sum_{m=1}^{M}w_m^2a_{mk}d_m\quad k=1,\cdots,J \tag{18-23}$$

18.4.3　矩阵形式

继续沿用 Spencer 的处理方式，包括他的记号方法，我们将式（18-12）和式（18-23）表示的系统表示为矩阵形式。定义下述矩阵，其中 J 是用作变量的参数个数，M 是出现在评价函数中的函数（像差）的个数，而 N 是约束的个数。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1J}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{M1}&\cdots&a_{MJ}\end{bmatrix} \tag{18-24}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1J}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{N1}&\cdots&b_{NJ}\end{bmatrix} \tag{18-25}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_j^2 \end{bmatrix} \tag{18-26}$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_M \end{bmatrix} \tag{18-27}$$

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_M \end{bmatrix} \tag{18-28}$$

$$e = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix} \tag{18-29}$$

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_J \end{bmatrix} \tag{18-30}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \tag{18-31}$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矢量 $\boldsymbol{d}$ 总是与 $\boldsymbol{W}$ 相乘，方便起见，定义

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{WA} \tag{18-32}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{Wd} \tag{18-33}$$

另外，定义矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和矢量 $\boldsymbol{g}$ 为

$$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{C} \tag{18-34}$$

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r} \tag{18-35}$$

式中，角标 T 表示转置。

因此，式（18-23）和式（18-12）分别变为

$$\boldsymbol{Gq} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{g} \tag{18-36}$$

$$\boldsymbol{Bq} = \boldsymbol{e} \tag{18-37}$$

18.4.4　矩阵解的数值计算

式（18-36）和式（18-37）共同组成一个包含（$N+J$）个方程的系统，有（$N+J$）个未知量，即 N 个 v_n 的值和 J 个 q_j 的值。那么，需要计算包含（$N+J$）×（$N+J$）个元素的矩阵的逆矩阵。幸运的是，系统可以分成两个较小的系统，提高了计算精度。按如下方式进行分割。由式（18-37），得

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{G}^{-1}(\boldsymbol{g}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}) \tag{18-38}$$

并代入式（18-38），求解$\boldsymbol{v}$，有

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{E}^{-1}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}^{-1}-\boldsymbol{e}) \tag{18-39}$$

这里

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \tag{18-40}$$

按下面几步进行计算：

1）计算 $J\times J$ 的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 的逆矩阵。

2）利用式（18-40）计算 $N\times N$ 的矩阵 $\boldsymbol{E}$，然后求逆。

3）利用式（18-39）得到矢量$\boldsymbol{v}$ 。

4）利用式（18-38）计算矢量 $\boldsymbol{q}$，即为最终解。

矩阵 $\boldsymbol{G}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是对称的，因此比普通矩阵求逆需要更少的数值运算。

求得解之后，新的镜头用作初始点，重复整个过程。通过迭代得到最终的结果。然而，将每次迭代中的镜头变化保持在合理的限制范围内是很重要的，这保证了线性近似的有效性。

18.4.5　使用权重因子

有两组权重因子 w_m 和 c_j 可供使用以控制解的性质。它们如此重要，以至于这些值可以决定能否找到一个解。权重 w_m 定义了组成评价函数的不同像差的相对重要性。如 18.5 节描述的那样，这些值取决于很多因素。

权重 c_j 控制寻找解的过程中的每个变量的影响。因子 c_j 越大，相关变量 q_j 的变换量越小，从而带有较小权重的变量将起更大的作用。这些权重也被称为阻尼因子。我们可以很方便地把这些阻尼因子分为两个因子的乘积。一个是通用阻尼因子，对所有变量具有相同的值；另一个是对每个变量具有不同值的阻尼因子。

应该指出的是，有时两个变量可能不完全相互线性独立，那么系统矩阵就接近奇异。这时在进行任何步骤之前，需要设计者介入，移除一个变量，或者对这些变量引入不同的因子 c_j 以消除奇异性。然而一些现代镜头设计程序，可以自动地完成这项功能。

经常地，我们会遇到停滞点，每次迭代中，评价函数只有非常小的改善，程序无法收敛到一个解。当评价函数的变化淹没在数值噪声中时，就会发生这种情况。这时，我们可以改变一个变量，以在另一个起始点处开始优化。变量权重在这种情况下也很有用。

即使所有的独立阻尼因子都相等，我们可以合理地预见到，不同的变量在搜寻解的过程中会有不同的效果。从而，相同的独立因子是不方便的，因为某些变量变化比较大，某些变化比较小。一些消除变量的这种虚假权重的解决方案已经被提出来（Spencer，1963a）。Buchele（1968）提出通过反复试验，在迭代过程中连续地修改阻尼因子。Rances 和 Lebich（1988）对不同阻尼因子的选择带来的影响进行了细致的研究。当趋近解的速度非常慢时，有时阻尼因子的变化不足以提高收敛速度。针对这种情况，Robin（1979）提出改变下一个解的方向。

关于优化程序中权重和变量的使用的许多实际讨论，见 Smith 和 Genesee（1992）

所著著作的第2章。

18.5　评价函数和边界条件

评价函数（误差函数）和边界条件的定义是镜头设计中两个非常重要的步骤。接下来我们就简要地回顾这两个问题。

18.5.1　评价函数

评价函数可以由许多不同的方式建立，例如：

1）成像的几何点尺寸或者均方尺寸，如8.4节的定义。

2）波像差均方根，如8.5节所述。

3）在某些期望的空间频率范围内优化的调制传递函数（MTF），如Rimmer等（1990）所述。

4）初级和高阶像差系数的适当的线性组合。

如8.7.1节指出的，最小化成像的均方尺寸将在低空间频率优化MTF，而最小化波像差均方根和高空间频率有关。

使用何种评价函数的类型，取决于所设计的光学系统的应用，也依赖于设计者的个人喜好和经验。应该注意的是，理想系统（衍射受限）中，评价函数的所有定义都最小化到零。在一个实际的非理想系统中，评价函数的选取影响到最终的镜头性能。

假设选取几何点尺寸作为评价标准。下一个重要的决定是颜色校正，因为每一种颜色产生一个不同的像。为了使用成像大小作为评价函数，我们把式（10-12）写作：

$$TA_{\mathrm{rms}}^{2}(\lambda,h) = \sum_{k=1}^{N_{\theta}} \sum_{j=1}^{N_{\rho}} w_{j}(\rho) TA_{\rho}^{2}(\rho_{j},\theta_{k},\lambda,h) - \overline{TA}^{2}(\lambda,h) \tag{18-41}$$

式中，可以清楚地看到光的波长 λ 和像高 h 的独立性。现在我们可以看到，一个完整的评价函数必须考虑许多不同的因素。

1. 色彩平均

成像大小可以用许多不同的方式对所有颜色进行平均。例如，对一个目视仪器，必须考虑眼睛的色觉响应。进行平均的最简单但精度略低的方法是只考虑图18-1所示的不同波长的视觉效率，并且赋给每种颜色的点列图一个合适的权重。权重 w_i（λ）表示每个波长 λ 的相对重要性。从权重表中取的权重必须归一化，以使其和为1。从而，颜色均化值 TA_{rms}^{2}（λ，h）为

$$TA_{\mathrm{rms}}^{2}(h) = \sum_{i=1}^{N_{\lambda}} w_{i}(\lambda) TA_{\mathrm{rms}}^{2}(\lambda_{i},h) \tag{18-42}$$

因此，代入此关系到式（18-41），我们得到

$$TA_{\mathrm{rms}}^{2}(h) = \sum_{k=1}^{N_{\theta}} \sum_{j=1}^{N_{\rho}} w_{j}(\rho) TA_{\rho}^{2}(\rho_{j},\theta_{k},\lambda,h) - \overline{TA}^{2}(\lambda,h) - \sum_{i=1}^{N_{\lambda}} w_{i}(\lambda) TA_{\mathrm{rms}}^{2}(\lambda_{i},h) \tag{18-43}$$

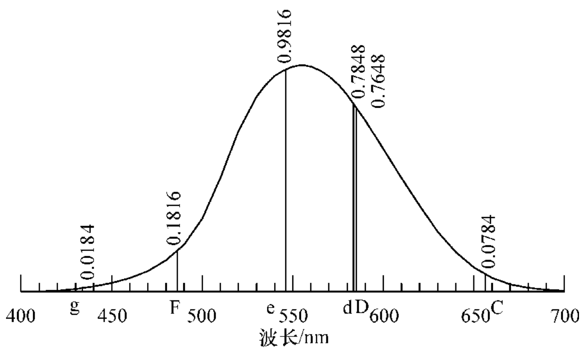


图 18-1　标准人眼的灵敏度曲线（有彩色插图）

作为例子，取三个点列图（$N_\lambda=3$），颜色分别为 C、d 和 F，三个颜色的权重为

$$w_C = 0.0784/(0.0784 + 0.07848 + 0.1816) = 0.0750$$

$$w_d = 0.7848/(0.0784 + 0.07848 + 0.1816) = 0.7511$$

$$w_F = 0.1816/(0.0784 + 0.07848 + 0.1816) = 0.1738$$

然而，这不是一种精确的方法，因为没有考虑到图 18-1 中所示的整个函数。使用这种方法，产生的误差高于 10%。Forbes（1988）基于高斯积分发展了一种高度精确的方法。这种方法的细节可以从他的论文中看到。式（18-43）仍然有效，但是重大的区别在于，点列图计算所用的颜色必须是表 18-1 列出的。这些权重被归一化以使其和为 1。

通过这种方法，可以获得接近 0.01% 的精度。这些结果对目视系统是有效的，但是不适用于那些各个颜色的响应一致（全色）的探测器的仪器。如果响应假定为 0.4～0.7μm 的常数，那么必须使用表 18-2 中列出的高斯常数。

显然，如果系统只使用单色光就不需要进行颜色平均。

表 18-1　使用 3 种颜色（$N_\lambda=3$）计算目视仪器颜色平均的高斯积分参数

i	λ_i	$w_i(\lambda)$
1	0.434658	0.006963
2	0.518983	0.054553
3	0.614795	0.038483

表 18-2　使用 3 种颜色（$N_\lambda=3$）计算全色仪器颜色平均的高斯积分参数

i	λ_i	$w_i(\lambda)$
1	0.418886	0.164853
2	0.505546	0.412843
3	0.644536	0.422307

2. 视场平衡

成像光斑大小也需要在全视场范围内进行平均，这可以通过使用高斯或者 Radau

（拉道）积分进行，如 Forbes（1988）所描述。选择拉道积分，就包括了轴上像。那么，带有颜色和视场平均的像点均方根大小为

$$TA_{\mathrm{rms}}^2 = \sum_{k=1}^{N_\theta}\sum_{j=1}^{N_\rho} w_j(\rho)\sum_{i=1}^{N_\lambda} w_i(\lambda)\sum w_h TA_\rho^2(\rho_j,\theta_k,\lambda,h) - \sum_{i=1}^{N_\lambda} w_i(\lambda)\sum_{n=1}^{N_h} w_n(h)\,\overline{TA}(\lambda_i,h) \tag{18-44}$$

其中所使用的像高归一化权重见表18-3，最大像高归一化为1。

如果镜头只使用在光轴附近区域，就不需要进行视场平均。然而，即使镜头需要使用全视场成像，一般情况下轴外像点也不具有和轴上像点相同的优先级。Forbes（1988）给出的一个例子，如图18-2所示的轴外权重函数分布。这种情况下，3个像点的拉道参数，1个轴上点，两个轴外点，见表18-3。

表18-3　使用3个像高计算视场平均的拉道积分参数

n	h_n	$w_n(h)$
1	0.000000	0.14000
2	0.564842	0.57388
3	0.893999	0.28612

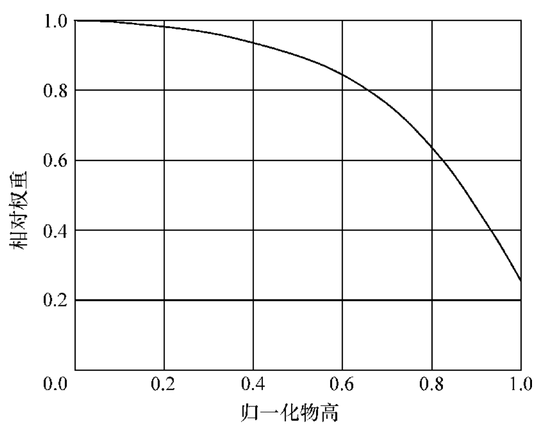


图18-2　建议的相对权重与归一化物高的关系

3. 畸变

基于像点大小的评价函数没有考虑光学系统的任何可能的畸变，因为从高斯像位置得到的成像质心的任何偏移都被补偿了。如果质心偏移未被补偿，即式（18-44）中的最后一项为零（$\overline{TA}_y=0$），这时才在评价函数中考虑畸变。

18.5.2　边界条件

下面是一些在镜头优化程序中可能用到的边界条件。

1. 轴向光学厚度

如果光线从光学系统中的表面 j 传播到光学表面 $j+1$，那么对两个方向，从左到右

和从右到左，光程都是正的，如图 18-3a、b 所示。于是，有

$$n_j t_j \geqslant 0 \tag{18-45}$$

光程 nt 仅在下述情形中为负：

1）光线存在于表面 j，但并不传播到表面 $j+1$，而是沿相反的方向。仅当表面 $j+1$ 是哑表面（不是实际存在的折射或反射面）（$n_j = n_{j+1}$）或者是虚焦平面（$j+1=k$）才有可能，如图 18-3c 所示。

2）光线向表面 $j+1$ 传播，同时也向表面 j 靠近，而不是远离它。这在表面 j 是哑平面（$n_{j-1}=n_j$）或者虚物平面（$j=0$）时是可能的，如图 18-3d 所示。

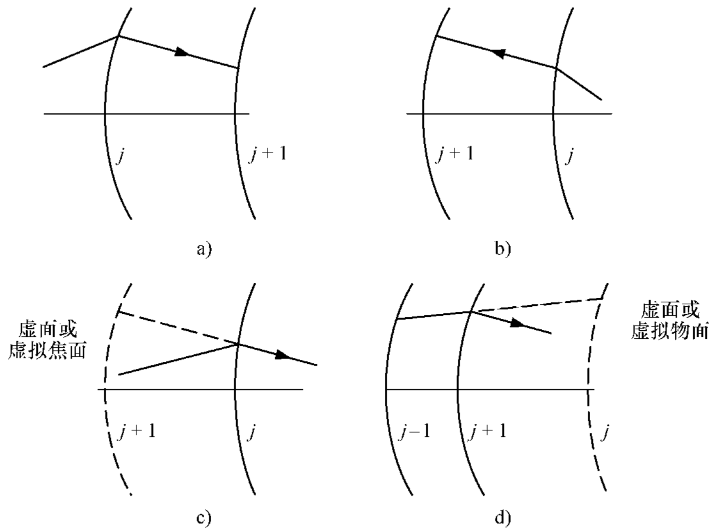


图 18-3　透镜设计中的边界条件

如果一个表面不满足这些条件，就要添加边界条件限制。

2. 边缘光学厚度

透镜口径大于或等于这个透镜两个表面的 $\bar{y}+y$ 的值。使用这个口径值和透镜弯曲，边缘光学厚度 nt_{edge} 必须大于一个预定的最小值。

3. 平均透镜厚度

平均透镜厚度必须大于一个依赖于透镜直径的特定最小值。

这些不是所有可能的边界条件，也可以用许多其他想用的边界条件，如光学系统最大长度或者透镜最大厚度等。对需要满足的边界条件的最终选择取决于所设计的光学系统的类型。

18.6　现代光学设计的趋势

优化方法种类繁多，但应用最广泛的是前面所述的约束最小二乘算法。然而，最近

一些新的方法引起了人们的注意，其中最引人注目的是下面所述的使用模拟退火过程的全局优化方法。

如本章开头所述，任何镜头优化程序的目标都是在变量空间找到一个评价函数最小值的点。如果考虑的区域很小，可能只有一个极小值。然而，如果变量空间足够大，对这个评价函数则可能存在许多的极小值。这些评价函数的极小值不一定具有相同的值，而是相比较而言某些值可能更小。因此我们需要找到的是最小的极值，而不是最接近起始点的。这个称为全局优化（Kuper 和 Harris，1992）的过程的好处是解不依赖于起始点。有许多方法可以进行全局优化，但直到最近，计算机才有能力完成这项工作。

一种简单的全局优化方法是网格搜索，就是在解空间中的规则网格中的等距点上评估评价函数。当找到评价函数的最小值点时，就找到了这个区域的最小值。另一种全局优化方法是模拟退火算法，Bohachevsky 等（1984）首先使用了这种方法。算法中，使用一种可控随机搜索对解空间进行采样。控制参数 T 称为“温度”，因为它和热处理中的退火过程的物理温度相似。

目前全局优化的主要问题是计算时间可能变得非常长。当变量数目增多时，计算时间增加的非常快，这就使得只对相对少量的变量数目才具有可行性。然而，毫无疑问的是，这种方法在不久的未来将更加实用，并得到广泛的应用。

18.7　镜头优化程序的流程

镜头优化程序的流程可能有许多不同的形式，可以非常简单，也可能非常复杂。作为例子，图 18-4 给出了一个典型镜头设计程序的流程。

18.8　镜头评估程序的实用技巧

当使用商业镜头设计程序的时候，第一步是输入初始镜头设计以进行评估或者改进。镜头评估程序中镜头数据输入包括许多相同的步骤。这里，我们将介绍几种方法。

18.8.1　曲率、厚度和间隔符号约定

1）如果曲率中心在表面的右侧，光学表面的曲率或者曲率半径的符号为正，否则为负。符号的选择和光线传播的方向无关。

2）如果下一个表面在先前表面的右侧，透镜厚度或者两个透镜之间的距离的符号为正，否则为负。下一个表面不一定在光线传播的方向上。换句话说，它可以为一个虚拟平面。

3）如果光线在介质中从左向右传播，介质折射率的符号为正，否则为负。因此，在反射表面上折射率的符号发生改变。

4）如果光线的斜率是正的，则相对光轴的光线角度的符号为正，否则为负。

5）相对表面法向的光线角度的符号约定，参见 1.3 节和图 1-14，如果光线斜率大于表面法向的斜率为正，否则为负。

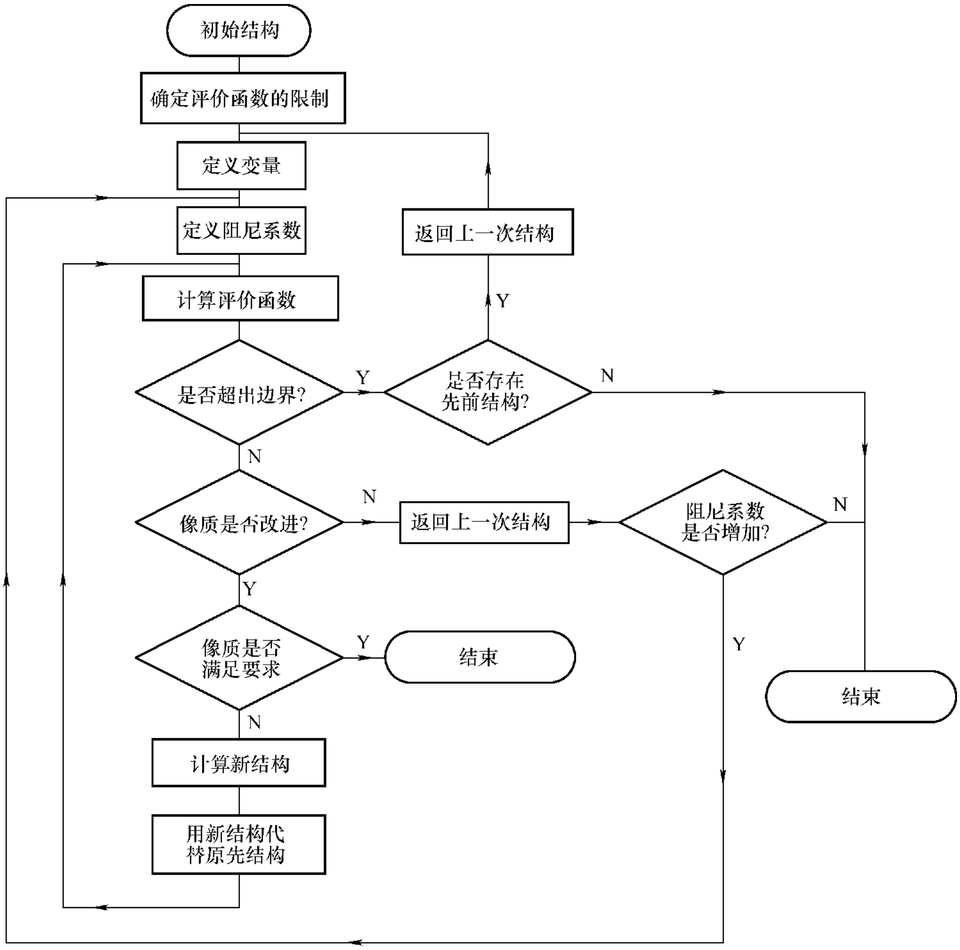


图 18-4　一个典型镜头设计程序的流程

18.8.2　指定曲率或者曲率

光学表面的曲率或者曲率半径可以用以下几种不同的方式指定：

1）提供曲率半径的值。

2）指定曲率的值，其值为曲率半径的倒数。

3）指定表面的屈光度。

4）设置在表面上经过折射或者反射后的子午光线的角度值。这种方法可以用在设置最后一个表面的曲率为某值以产生期望的系统有效焦距。角度值 $u'_k = -D/(2F)$，其中 D 是入瞳直径，F 是有效焦距。通常，这叫作曲率解。

5）设置到达下一个表面的子午光线的高度。这也是一个曲率解。

6）令曲率和系统中的先前曲率的大小和符号相等，或者大小相等符号相反。这个过程叫作曲率耦合。

18.8.3 指定厚度和间隔

一个表面到下一个表面的厚度或者间隔可以用以下方式指定：

1）给出此参数的期望值。

2）设置下一个表面上子午光线的高度。如果令最后一个表面上的高度为零，则焦平面位置在近轴焦点处。

3）间隔可以和先前的一个表面的间隔具有相同的大小，符号相同或相反。

18.8.4 一些有用的技巧

镜头设计者使用镜头评估程序的时候，有一些有用的技巧。例如：

1）透镜系统经常被倒置设计，这样进入系统的光可以通过最长的共轭距离。因此，如果物体比像距离系统更近，这种系统就会倒置设计。

2）如果系统是无焦的，例如望远镜，在系统的最后需要放置一个聚焦元件，这样光才聚焦在有限距离处。可能的解决方案是使用球面镜。为了避免引入球差，曲率半径要远大于系统的出瞳半径，其值的选择取决于系统需要的分辨率。为了避免离轴像差，所评估系统的出瞳放置在聚焦球面镜的曲率中心处。

大多数商业程序都可以进行第8章中所述的成像分析和像差曲线绘制。

18.9 一些商业镜头设计程序

随着一些新的商业镜头设计和评估程序的不断出现，老的商业程序正在逐步消失。某些程序完整、灵活、复杂而精细，另一些则相对简单。世纪之交之前，在国际透镜设计会议（Lawrence，1990）中评论了几种程序。下面列出了部分可用的商业光线追迹、镜头设计和评估程序：

ADOS
Diginaut Ltd.
http://www.diginaut.com/

BEAM FOUR
Stellar Software
P. O. Box 10183, Berkeley, CA 94709, USA

CODE V (Version 10.4 for Microsoft Windows)
Synopsy' Optical Solutions Group（前身是 Optical Research Associates）
550 N. Rosemead Blvd., Pasadena, CA 91107, USA

OPTALIX
Optenso – Optical Engineering Software
Kugelstr 205, CH – 9435 Heerbrugg, Switzerland

OSLO
Lambda Research Corporation, Inc.
25 Porter Road, Littleton, MA 01480, USA

SYNOPSYS
Optical Systems Design Inc. （和 Synopsys' Optical Solutions Group 不同）
P. O. Box 247 East Boothbay, ME 04544, USA

ZEMAX
Radiant Zemax（前身是 Focus Software）
P. O. Box 756, Pleasanton, CA 94566, USA

这些程序可以解决绝大部分镜头设计问题，但是需要一个具有深厚设计背景的有经验的设计师才能正确地使用它们。这些程序非常灵活，因此如果操作者没有良好的镜头设计背景，就很可能造成错误。

参考文献

[1] Bohachevsky, I. O., Viswanathan, V. K., and Woodfin, G., "An Intelligent Optical Design Program," *Proc. SPIE*, **485**, 104 – 112 (1984).

[2] Brixner, B., "Automatic Lens Design for Nonexperts," *Appl. Opt.*, **2**, 1281 – 1286 (1963a).

[3] Brixner, B., "The Symposium Lens Improved," *Appl. Opt.*, **2**, 1331 – 1332 (1963b).

[4] Brixner, B., "Automatic Lens Design: Further Notes for Optical Engineers," *J. Soc. Mot. Pic. Tel. Eng.*, **73**, 314 – 320 (1964a).

[5] Brixner, B., "The Symposium Lenses—A Performance Evaluation," *Appl. Opt.*, **3**, 780 – 781 (1964b).

[6] Brixner, B., "Automatic Lens Design Illustrated by a 600mm *f*/2.0, 24 Field Lens," *J. Soc. Mot. Pic. Tel. Eng.*, **73**, 654 – 657 (1964c).

[7] Buchele, D. R., "Damping Factor for the Least – Squares Method of Optical Design," *Appl. Opt.*, **7**, 2433 – 2435 (1968).

[8] Cox, A., *A System of Optical Design*, Focal Press, New York (1964).

[9] Feder, D. P., "Optical Calculations with Automatic Computing Machinery," *J. Opt. Soc. Am.*, **41**, 630 – 635 (1951).

[10] Feder, D. P., "Automatic Lens Design Methods," *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 902 – 912 (1957a).

[11] Feder, D. P., "Calculation of an Optical Merit Function and Its Derivative with Respect to System Parameters," *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 913 – 925 (1957b).

[12] Feder, D. P., "Automatic Lens Design with a HighSpeed Computer," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 177 –

183（1962）.

[13] Feder, D. P., "Automatic Optical Design," *Appl. Opt.*, **2**, 1209 – 1226（1963）.

[14] Forbes, G. W., "Optical System Assessment for Design: Numerical Ray Tracing in the Gaussian Pupil," *J. Opt. Soc. Am. A*, **5**, 1943 – 1956（1988）.

[15] Glatzel, E., "Ein neues Verfahren zur autmatschen Korrection optischer Systeme mit electronischen Rechenmaschinen," *Optik*, **18**, 577 – 580（1961）.

[16] Glatzel, E. and Wilson, R., "Adaptive Automatic Correction in Optical Design," *Appl. Opt.*, **7**, 265 – 276（1968）.

[17] Grey, D. S., "Aberration Theories for Semiautomatic Lens Design by Electronic Computer: Ⅰ. Preliminary Remarks," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 672 – 676（1963a）.

[18] Grey, D. S., "Aberration Theories for Semiautomatic Lens Design by Electronic Computer: Ⅱ. A Specific Computer Program," *J. Opt. Soc. Am.*, **53**, 677 – 680（1963b）.

[19] Hayford, M. J., "Optimization Methodology," *Proc. SPIE*, **531**, 68 – 80（1985）.

[20] Hilbert, R. S., Ford, E. H., and Hayford, M. J., "A Tutorial on Selection and Creation of Starting Points for Optical Design," OSA Annual Meeting, Boston,（1990）.

[21] Holladay, J. C., "Computer Design of Optical Lens Systems," in *Computer Applications*, B. Mittman and A. Unger, eds., Macmillan, New York（1960）.

[22] Hopkins, R. E., "Re – Evaluation of the Problem of Optical Design," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 1218 – 1222（1962a）.

[23] Hopkins, R. E., "Method of Lens Design," in *Military Standardization Handbook: Optical Design, MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC（1962b）.

[24] Hopkins, R. E., "An Application of the Method of Lens Design," in *Military Standardization Handbook: Optical Design, MIL – HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC（1962c）.

[25] Hopkins, R. E. and Spencer, G., "Creative Thinking and Computing Machines in Optical Design," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 172 – 176（1962）.

[26] Kuper, T. G. and Harris, T. I., "A New Look at Global Optimization for Optical Design," *Photonics Spectra*, January（1992）.

[27] Laikin, M., *Lens Design*, Marcel Dekker, New York（1990）.

[28] Lawrence, G. N., ed., International Lens Design Conference. *SPIE Proceedings*, 1354,（1990）

[29] Meiron, J. "Automatic Lens Design by the Least Squares Method," *J. Opt. Soc. Am.*, **19**, 293 – 298（1959）.

[30] Meiron, J., "Damped Least – Squares Method for Automatic Lens Design," *J. Opt. Soc. Am.*, **55**, 1105 – 1109（1965）.

[31] Meiron, J. and Volinez, G., "Parabolic Approximation Method for Automatic Lens Design," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 207 – 211（1960）.

[32] Peck, W. G., "Automated Lens Design," in *Applied Optics and Optical Engineering, Vol. Ⅷ*, R. R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Academic Press, San Diego, CA（1980）.

[33] Rayces, J. L. and Lebich, L., "Experiments on Constrained Optimization with Spencer' s Meth-

od," *Opt. Eng.*, **27**, 1031 – 1034 (1988).

[34] Rimmer, M. P., Bruegge, T. J., and Kuper, T. G., "MTF Optimization in Lens Design," *Proc. SPIE*, **1354**, 83 – 91 (1990).

[35] Robb, P. N., "Accelerating Convergence in Automating Lens Design," *Appl. Opt.*, **18**, 4191 – 4194 (1979).

[36] Rosen, S. and Chung, A., "Application of the Least Squares Method," *J. Opt. Soc. Am.*, **46**, 223 – 226 (1956).

[37] Rosen, S. and Eldert, C., "Least Squares Method of Optical Correction," *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 250 – 252 (1954).

[38] Smith, W. J. and Genesee Optics Software, Inc., *Modern Lens Design. A Resource Manual*, McGraw – Hill, New York (1992).

[39] Spencer, G., *A Computer Oriented Automatic Lens Correction Procedure*, PhD Thesis, The University of Rochester, Rochester, NY (1963a).

[40] Spencer, G., "A Flexible Automatic Lens Correction Proceedure," *Appl. Opt.*, **2**, 1257 – 1264 (1963b).

[41] Stavroudis, O., "Automatic Optical Design", in *Advances in Computers*, Vol. 5, F. L. Alt and M. Rubinoff, eds., Academic Press, New York (1964).

[42] Wynne, C. G. and Wormell, P. M. J. H., "Lens Design by Computer," *Appl. Opt.*, **2**, 1233 – 1238 (1963).

附　　录

附录 A　符号规则和初级像差系数概述

A.1　符号规则

近轴变量遵从表 A-1 中的符号规则。不带撇的变量是表示在折射前的，带撇的变量是表示在折射后的。当前表面的下一个表面，使用角标 +1。

有几种类型的焦距，如表 A-2 所示。如在物方的值（用准直光束从右到左照射的透镜）不同于像方的值（准直光束从左到右照射的透镜）。在第一种情况下，使用不带撇的变量，而第二种情况中，使用带撇的变量。当物方和像方介质相同，一般都是空气时，两个焦距值相等。此时，焦距是不带撇的。

表 A-1　部分近轴变量的符号规则

	当前表面		表面 $j+1$
	折射前	折射后	折射前
子午光线	i	i'	i_{+1}
	u	u'	u_{+1}
	l	l'	l_{+1}
	y	y'	y_{+1}
	Q	Q'	Q_{+1}
主光线	$\bar{i}$	$\bar{i}'$	$\bar{i}_{+1}$
	$\bar{u}$	$\bar{u}'$	$\bar{u}_{+1}$
	$\bar{l}$	$\bar{l}'$	$\bar{l}_{+1}$
	$\bar{y}$	$\bar{y}'$	$\bar{y}_{+1}$
	$\bar{Q}$	$\bar{Q}'$	$\bar{Q}_{+1}$

表 A-2　焦距的符号规则

	物方	像方	物像介质相同
薄透镜或反射镜			
近轴上焦距	F	f'	f
孔径边缘光线的焦距	f_M	f'_M	f_M
厚透镜或光学系统			
焦距	F	F'	F
后工作距离	F_B	f'_b	F_B
孔径边缘光线的焦距	F_M	f'_M	F_M

薄透镜或反射镜的焦距用小写字母 f 表示。厚透镜或完整系统的有效焦距用大写字母 F 表示。厚透镜或系统的后焦距带有下标 B。

沿着光轴从焦点到主平面测量得到的焦距不带任何下标。如果这个焦距是沿着子午面光线从焦点到主平面测量得到的，就要使用下标 M。

焦比（或 F 数）由 FN 表示，定义如下：

$$FN = f/\# = \frac{F}{\text{入瞳直径}} \tag{A-1}$$

在有限距离处的物体的数值孔径为：

$$NA = n_0 \sin U_0 \tag{A-2}$$

式中，n_0 是物方介质的折射率。

初级像差系数由它的名字的缩写来表示。这些命名跟 Conrady 的那些命名很像。但还是有一些重要的区别。为了避免轴向和横轴像差概念的混淆，色差命名为轴向色差和倍率色差。第二个需要注意的重要事情是，一些像球差和像散这样的像差可以从横向或轴向大小来评价。对于横向将字母 T，对于轴向将字母 L 加入这些像差的名字中。

这些像差仅是轴对称光学系统中一个面的像差，如果被乘上放大率（如果像差分别是横向或轴向的，则分别是横向或轴向的放大率），它就成为对系统的像差贡献。因此，由一个表面对整体像差贡献的像差通过加入字母 C 来表示，这也是一些其他作者习惯使用的。

有时候人们用一个下标来指示应用的表面，但为了简化，大多数时候都不写。这种符号（不带撇，和 Conrady 符号规则中一样）表示在表面上折射后的像差。折射前的像差用下标 -1 来表示，这表示之前的表面。因此，物方的像差（在系统的表面 1 之前）用下标 0 来表示。物体在这个光学系统中的表面编号为 0。系统中最后一个表面（k）之后，或者说对于整个系统的像差通过在结尾添加一个下标“Total”来表示。表 A-3 给出了代表这些像差的符号。

做精确的光线追迹时，平行于光轴方向测得的像差叫作轴向像差 LA。垂直于光轴方向的像差值叫作横向像差 TA。波前变形用 W 表示。这些符号如表 A-4 所示。

表 A-3　初级像差系统的符号规则

像差	表面 j 引起		表面 j 的贡献	
	轴向	垂轴	轴向	垂轴
球差	$SphL$	$SphT$	$SphLC$	$SphTC$
彗差（弧矢）	—	$Coma_S$	—	$ComaC_S$
彗差（子午）	—	$Coma_T$	—	$ComaC_T$
像散（弧矢）	$AstL_S$	$AstT_S$	$AstL_SC$	$AstT_SC$
像散（子午）	$AstL_T$	$AstT_T$	$AstL_TC$	$AstT_TC$
畸变	—	$Dist$	—	$DistC$
佩兹伐场曲	Ptz	—	$PtzC$	—
轴向色差	$AchrL$	$AchrT$	$AchrLC$	$AchrTC$
倍率色差	—	$Mchr$	—	$MchrC$

注：整个系统的像差用下标“Total”表示。

表 A-4 几何像差波像差的符号规则

像差	轴向	垂轴	波像差
总像差（轴外像点）	LA	TA	W
x 分量（轴外像点）	LA_x	TA_x	—
y 分量（轴外像点）	LA_y	TA_y	—
轴上像差	LA_0	TA_0	W_0

A.2 初级像差系数概述

A.2.1 Conrady 形式

这是由 Conrady 推导出来的系数形式，但使用我们的符号规则。

球差：

$$SphTC = \frac{y(n/n')(n-n')(i/u')i^2}{2n'_k u'_k} \tag{A-3}$$

非球面变形的贡献为

$$SphTC_{\text{asph}} = -(8A_1 + Kc^2)\left(\frac{n-n'}{2}\right)\left(\frac{y^4}{n'_k u'_k}\right) \tag{A-4}$$

彗差：

$$Coma_S C = SphTC\left(\frac{\bar{i}}{i}\right) \tag{A-5}$$

非球面贡献用 $Coma_S C_{\text{asph}}$ 表示，由下式给出：

$$Coma_S C_{\text{asph}} = SphTC_{\text{asph}}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right) \tag{A-6}$$

像散：

$$AstT_S C = SphTC\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^2 \tag{A-7}$$

非球面贡献：

$$AstL_S C_{\text{asph}} = SphLC_{\text{asph}}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right)^2 \tag{A-8}$$

佩兹伐曲率：

$$PtzC = \frac{h'^2_k n'_k}{2}\left(\frac{n'-n}{nn'r}\right) \tag{A-9}$$

畸变：

$$DistC = Coma_S C\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)^2 PtzC\left(\frac{\bar{i}}{i}\right)u'_k \tag{A-10}$$

非球面变形引入的贡献为

$$DistC_{\text{asph}} = SphTC_{\text{asph}}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right)^3 \tag{A-11}$$

轴向色差：

$$AchrTC = \frac{yni}{n_k' u_k'}\left(\frac{n_F - n_C}{n} - \frac{n_F' - n_C'}{n'}\right) \tag{A-12}$$

倍率色差：

$$MchrC = AchrTC\left(\frac{\bar{i}}{i}\right) \tag{A-13}$$

A.2.2　数值计算

下面这套稍微不同的等式被许多作者推荐，在电子计算机中使用。

球差：

$$SphTC = \sigma i^2 \tag{A-14}$$

这里

$$\sigma = \frac{y(n/n')(n-n')(i+u')}{2n'_k u'_k} \tag{A-15}$$

非球面变形的贡献：

$$SphTC_{asph} = -(8A_1 + Kc^2)\left(\frac{n-n'}{2}\right)\left(\frac{y^4}{n'_k u'_k}\right) \tag{A-16}$$

彗差：

$$Coma_S C = \sigma i \bar{i} \tag{A-17}$$

非球面贡献：

$$Coma_S C_{asph} = SphTC_{asph}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right) \tag{A-18}$$

像散：

$$AstT_S C = \sigma \bar{i}^2 \tag{A-19}$$

非球面贡献：

$$AstL_S C_{asph} = SphLC_{asph}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right)^2 \tag{A-20}$$

佩兹伐曲率：

$$PtzC = \frac{h'^2_k n'_k}{2}\left(\frac{n'-n}{nn'r}\right) \tag{A-21}$$

畸变：

$$DistC = \bar{\sigma} i \bar{i} + \frac{h'_k}{2}(\bar{u}'^2 - \bar{u}^2) \tag{A-22}$$

式中，

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{y}(n/n')(n-n')(\bar{i}+\bar{u}')}{2n'_k u'_k} \tag{A-23}$$

非球面贡献：

$$DistC_{asph} = SphTC_{asph}\left(\frac{\bar{y}}{y}\right)^3 \tag{A-24}$$

轴向色差：

$$AchrTC = \frac{yni}{n'_k u'_k}\left(\frac{n_F - n_C}{n} - \frac{n'_F - n'_C}{n'}\right) \tag{A-25}$$

倍率色差：

$$MchrC = AchrTC\left(\frac{\bar{i}}{i}\right) \tag{A-26}$$

像差的大小取决于透镜孔径和成像高度两方面。表 A-5 给出了每一个初级像差与这两个参数之间的关系。

表 A-5　初级像差与孔径和像高的函数关系

		半孔径	像高 h'
球差	轴向	y^2	无
	垂轴	y^3	
	波像差	S^4	
彗差	垂轴	y^2	h'
	波像差	$S^2y=(x^2+y^2)y$	
像散	轴向	无	h'^2
	垂轴	y	
	波像差	$S^2+2y^2=x^2+3y^2$	
佩兹伐	轴向	无	h'^2
	波像差	S^2	
畸变	垂轴	无	h'^3
	波像差	y	
轴向色差	轴向	无	无
	垂轴	y	
	波像差	S^2	
倍率色差	垂轴	无	h'
	波像差	y	

附录 B　光学表面的数学表示

一个光学表面可以有许多种形状（Herzberger 和 Hoadley，1946；Malacara，1992；Mertz，1979，1981；Shannon，1980；Schulz，1988），但最常见的是球面，对于曲率半径为 r 的面，在半口径 $S=\sqrt{x^2+y^2}$ 位置上的矢高为

$$Z = r - \sqrt{r^2 - S^2} \tag{B-1}$$

但这个表达式对平面不适用。一个更好的形式如下：

$$Z = \frac{cS^2}{1+\sqrt{1-c^2S^2}} \tag{B-2}$$

式中，和通常一样，$c=1/r$，$S^2=x^2+y^2$。

二次曲面的主要特征是它的离心率 e。如果我们定义锥面度 $K=-e^2$，那么二次曲面的这个表达式可以改写为

$$Z=\frac{1}{K+1}\left[r-\sqrt{r^2-(K+1)S^2}\right] \tag{B-3}$$

这对所有的除抛物面之外的二次曲面都适用。但对于平面仍不适用，所以一个更好的表达式如下：

$$Z=\frac{cS^2}{1+\sqrt{1-(K+1)c^2S^2}} \tag{B-4}$$

根据表 B-1，二次常数定义了二次曲面的类型。很显然，平面没有锥面度。图 B-1 给出了一些二次曲面的形状。

表 B-1　锥面系数与二次曲面类型

二次曲面类型	锥面系数
双曲面	$K<-1$
抛物面	$K=-1$
长椭球面（椭圆绕主轴旋转）	$-1<K<0$
球面	$K=0$
扁椭球面（椭圆绕短轴旋转）	$K>0$

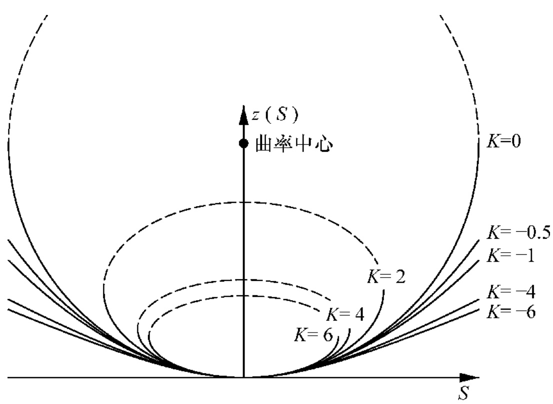


图 B-1　一些二次曲面的形状（有彩色插图）

我们可以向二次变换方程加入一些非球面变形项，如下：

$$Z=\frac{cS^2}{1+\sqrt{1-(K+1)c^2S^2}}+A_1S^4+A_2S^6+A_3S^8+A_4S^{10} \tag{B-5}$$

这是旋转对称非球面的最一般的表示形式。但这种表示存在一些非球面项的数值计算问题。Forbes（2007，2008）提出了一种备选表示形式，在这种表示中，非球面变形不用一系列单项式表示，而是用一系列正交多项式来表示。

一个轴锥体（Mcleod，1954，1960）有如图 B-2 所示的圆锥形状，它可以用一个极大曲率的双曲面来表示，我们得到：

$$K = -(1+\tan^2\theta) < -1 \quad (B\text{-}6)$$

$$c = \frac{1}{(K+1)b} \quad (B\text{-}7)$$

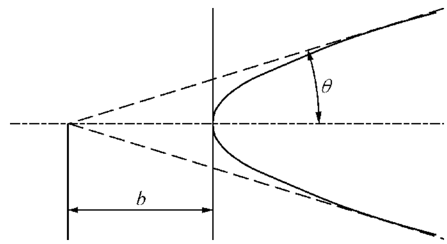


图 B-2　锥面

有时，将光学表面表示为一个球面加上一些包含二次形状的非球面变形项是有趣的。这样，我们可以发现：

$$Z = \frac{cS^2}{1+\sqrt{1-c^2S^2}} + B_1S^4 + B_2S^6 + B_3S^8 + B_4S^{10} \quad (B\text{-}8)$$

式中，

$$B_1 = A_1 + \frac{[(K+1)-1]c^3}{8} \quad (B\text{-}9)$$

$$B_2 = A_2 + \frac{[(K+1)^2-1]c^5}{16} \quad (B\text{-}10)$$

$$B_3 = A_3 + \frac{5[(K+1)^3-1]c^7}{128} \quad (B\text{-}11)$$

$$B_4 = A_4 + \frac{7[(K+1)^4-1]c^9}{256} \quad (B\text{-}12)$$

B.1　非球面法线的偏差

光学非球面的法线与光轴相交于距离曲率中心 Z_n 处。有时候知道这个距离值是很重要的，它被称为法线的偏差。为了计算它的值，我们首先要求得 Z 相对于 S 的导数，如下：

$$\frac{dZ}{dS} = \frac{cS}{\sqrt{1-(K+1)c^2S^2}} + 4A_1S^3 + 6A_2S^5 + 8A_3S^5 + 10A_7S^9 \quad (B\text{-}13)$$

那么如图 B-3 所示的距离 L_n 为

$$L_n = \frac{S}{dZ/dS} + Z \quad (B\text{-}14)$$

引用 Buchroeder 等对二次曲线的描述，上式变为

$$L_n = \frac{1}{c} - KZ \quad (B\text{-}15)$$

非球面法线产生的焦散线包络在分析几何学中叫作渐屈线。我们来看如图 B-4 所示的抛物面（$K=-1$），法线偏差变为

$$L_n = \frac{1}{c} + Z = \frac{1}{c} + f\tan^2\varphi \quad (B\text{-}16)$$

式中，角度 φ 是曲面法线与光轴间的夹角，如图 B-3 所示，f 是抛物面的焦距。抛物面例子中，我们可以看到从曲率中心到法线与光轴交点的距离 Z_n 等于弧矢半径，如图 B-

3 所示。在一般的非球面中，法线的交点可以近似为

$$L_n = \frac{1}{c} - \frac{(Kc^3 + 8A_1)S^2}{2c^2} \qquad (B\text{-}17)$$

有时候，我们想要用曲面法线与光轴之间的夹角 φ 代替光线高度 S 来表示一个不是平面的非球面。此时，下面的关系可以用于等式（B-3）中：

$$c^2S^2 = \frac{\sin^2\varphi}{1 + K\sin^2\varphi} \qquad (B\text{-}18)$$

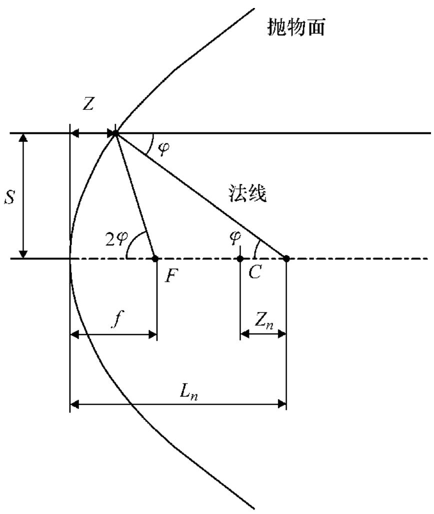


图 B-3　二次曲面的一些参数

B.2　二次曲面的一些参数

二次曲面的焦距作为曲率半径 r 和锥度系数 K 的函数，如图 B-4 所示，形式如下：

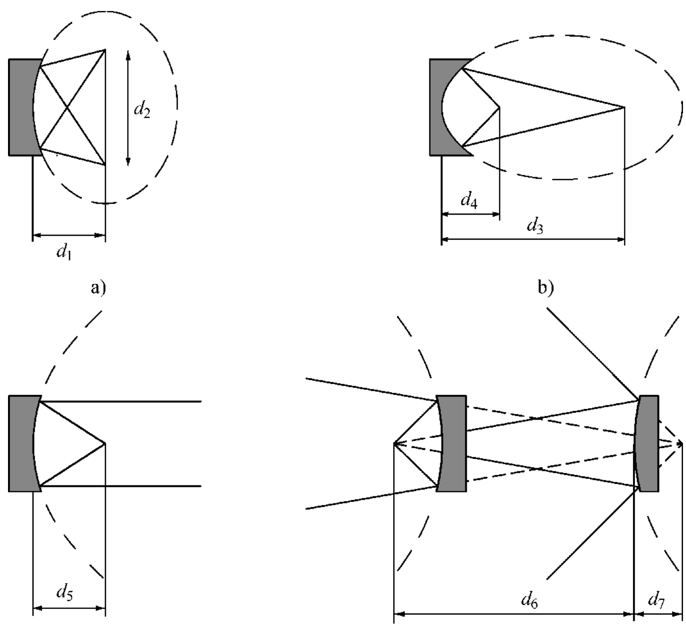


图 B-4　标准的非球面的像差

a）扁平椭球面（$K>0$）　b）扁长椭球面（$-1<K<0$）　c）抛物面（$K=-1$）　d）双曲面（$K>-1$）

$$d_1 = \frac{r}{(K+1)} \qquad (B\text{-}19)$$

$$d_2 = \frac{r}{(K+1)}(2\sqrt{K}) \tag{B-20}$$

$$d_3, d_4 = \frac{r}{(K+1)}(1 \pm \sqrt{-K}) \tag{B-21}$$

$$d_5 = \frac{r}{2} \tag{B-22}$$

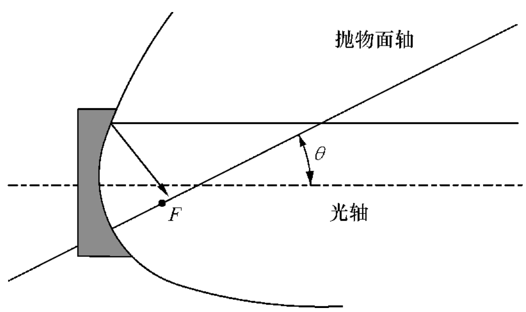
$$d_6, d_7 = \frac{r}{(K+1)}(\sqrt{-K} \pm 1) \tag{B-23}$$

需要重点指出的是，扁椭球面不是旋转对称的曲面，因为物体和像是离轴的。因此，像是散光的。

B.3　离轴抛物面

图B-5给出了一个相对于抛物面轴的倾斜角为θ的离轴抛物面。垂直于离轴抛物面中心的直线定义为光轴。如果这个面的直径相对于它的曲率半径很小，它就可以近似为一个环形面。那么，切线曲率c_t定义为中心在抛物面上的圆的曲率半径，Malacara（1991）给出了它的表达式：

$$c_t = \frac{\cos^3\theta}{2f} \tag{B-24}$$



图B-5　离轴抛物面

式中，f是抛物面的焦距，θ是抛物面轴与光轴的夹角，如图B-5所示。径向曲率半径c_s定义为沿着径向的曲率半径，如下所示：

$$c_s = \frac{\cos\theta}{2f} \tag{B-25}$$

抛物面轴上的顶点曲率为

$$c = \frac{1}{2f} \tag{B-26}$$

因此，我们发现：

$$c_t c^2 = c_s^3 \tag{B-27}$$

Menchaca和Malacara（1984）证明这对于任意二次曲面都是成立的，而不仅仅是抛物面。

Malacara指出，在旋转角度θ得到的新坐标系中，离轴抛物面的形状由下式给出：

$$Z(x,y)=\frac{(X^2+Y^2\cos^2\theta+Z^2\sin^2\theta)\cos\theta}{4f(1+Y\sin\theta\cos^2\theta/2f)} \tag{B-28}$$

当抛物面的直径相对较小时，曲面可以近似为

$$Z(x,y)=\frac{c_xX^2}{2}+\frac{c_yY^2}{2}-\frac{c^2}{4}\cos^3\theta\sin\theta(1+3\cos^2\theta)(X^2+Y^2)Y-\frac{c^2}{4}\cos^3\theta\sin^3\theta(3X^2-Y)Y \tag{B-29}$$

这个曲面的前两项表示一个环形面（由初级像散表示）。第三项表示额外的彗形变形。彗形跟汤匙相像，沿着某一直径方向有非恒定增加的曲率，而沿其他垂直直径的方向有恒定的曲率。当直径稍微大点，三角像散就会出现，如上式最后一项所示。在三个支架上放置一个半柔性盘，支架位于盘的边缘，相互分开 120°，这样得到的形状就是三角像散的形状。

B.4　环面和球柱面

像散面沿着两个正交轴有两个不同的曲率。例如，之前描述的环形面、旋转椭圆面、离轴抛物面都是像散面。如果我们将定义限制到那些仅仅关于两个正交轴左右对称的面，那么离轴抛物面就被排除在外了。我们假设两个对称正交轴分别是沿着 x 轴和 y 轴。那么，这两个正交曲率分别为

$$c_x=\frac{1}{r_x}\left(\frac{\partial^2 Z(x,y)}{\partial x^2}\right) \tag{B-30}$$

$$c_y=\frac{1}{r_y}\left(\frac{\partial^2 Z(x,y)}{\partial y^2}\right) \tag{B-31}$$

在与光轴成 θ 角的任意方向上的曲率 c_θ 为：

$$c_\theta=\frac{1}{r_\theta}=c_x\cos^2\theta+c_y\sin^2\theta \tag{B-32}$$

如果我们进一步将像散面的定义限制为那些与对称轴相交部分形成圆的曲面，我们仍然有无穷个可能性（Malacara－Doblado 等，1996）。最常见的曲面是环形面和球柱面。Sasian（1997）曾指出，像散面有时候可以代替更难制造的离轴抛物面。

环形面如图 B-6 所示，可以通过许多方式生成（Malacara 和 Malacara，1971）。它具有圆环形，由式（B-33）表示：

$$Z=\{[\sqrt{(r_y^2-Y^2)}+r_x-r_y]^2-X^2\}^{1/2}+r_x \tag{B-33}$$

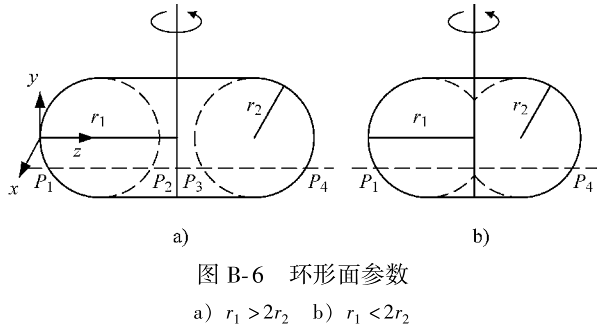


图 B-6　环形面参数

a）$r_1>2r_2$　b）$r_1<2r_2$

式中，r_x 是 $x-z$ 平面上的曲率半径（大半径），r_y 是 $y-z$ 平面上的曲率半径（小半径）。我们可以看到，这个表达式在 X 和 Y 上是不对称的，因为环形面的对称轴平行于 y 轴（$X=0$，$Z=r_x$），但没有任何与 x 轴平行的轴的对称性。

我们可以从图 B-6a 看到，观察环绕环形面的点线，对于 Z 有四个解（P_1，P_2，P_3，P_4），我们有两个平方根，即一对 X 和 Y 的值。在图 B-6b 中，当 $r_y<r_x$ 时，四个解中有两个是虚数。

另一种类似的曲面叫作球柱面（Malacara，1986），如图 B-7 所示，表达式如下：

$$Z=\frac{c_xX^2+c_yY^2}{1+[1-(c_xX^2+c_yY^2)^2/(X^2+Y^2)]^{1/2}} \tag{B-34}$$

式中，c_x 和 c_y 分别是沿着 x 轴和 y 轴的曲率。这个曲面在 X 和 Y 上是对称的。这两个曲面的共同点是，它们在 $x-z$ 平面和 $y-z$平面上的相交部分都是圆。如果环形面和球柱面的通光孔径相比它们的曲率半径是很小的，那么对于所有的实际用途，它们都变成一样的。

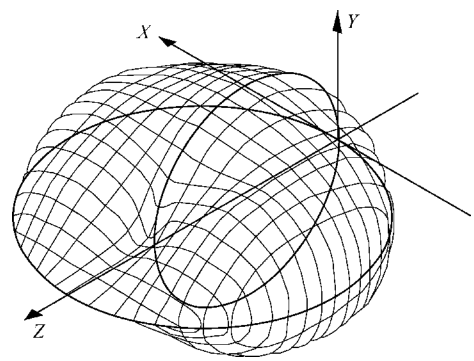


图 B-7　球柱面

环形面和球柱面的一个重要差异在于，球柱面对于 Z 仅有两个可能解，因为仅有一个平方根。

参考文献

[1] Buchroeder, R. A., Elmore, L. H., Shack, R. V., and Slater, P. N., "The Design, Construction and Testing of the Optics for the 147 – cm – Aperture Telescope," *Optical Sciences Center Technical Report No. 79*, University of Arizona, Tucson, AZ (1972).

[2] Forbes, G. W., "Shape Specification for Axially Symmetric Optical Surfaces," *Opt. Express*, **15**, 5218 – 5226 (2007).

[3] Forbes, G. W. and Brophy, C. P., "Asphere, O Asphere, How Shall We Describe Thee?," *Proc. SPIE*, **7100**, 710002 – 710015 (2008).

[4] Herzberger, M. and Hoadley, H. O., "The Calculation of Aspherical Correcting Surfaces," *J. Opt. Soc. Am.*, **36**, 334 – 340 (1946).

[5] Malacara, D., "Some Parameters and Characteristics of an Off Axis Paraboloid," *Opt. Eng.*, **30**, 1277 – 1280 (1991).

[6] Malacara, D., "An Optical Surface and Its Characteristics," Appendix 1 in *Optical Shop Testing*, D. Malacara, ed., John Wiley, New York (1992).

[7] Malacara, D. and Malacara, Z., "Diamond Tool Generation of Toroidal Surfaces," *Appl. Opt.*, **10**, 975 – 977 (1971).

[8] Malacara - Doblado D., Malacara - Hernandez, D., and García - Márquez, J., "Axially Astigmatic Surfaces: Different Types and Their Properties," *Opt. Eng.*, **35**, 3422 - 3426 (1996).

[9] McLeod, J. H., "The Axicon: A New Type of Optical Element," *J. Opt. Soc. Am.*, **44**, 592 - 597 (1954).

[10] McLeod, J. H., "Axicons and Their Uses," *J. Opt. Soc. Am.*, **50**, 166 - 169 (1960).

[11] Menchaca, C. and Malacara, D., "Directional Curvatures in a Conic Surface," *Appl. Opt.*, **23**, 3258 - 3260 (1984).

[12] Menchaca, C. and Malacara, D., "Toroidal and Sphero - Cylindrical Surfaces," *Appl. Opt.*, **25**, 3008 - 3009 (1986).

[13] Mertz, L., "Geometrical Design for Aspheric Reflecting Systems," *Appl. Opt.*, **18**, 4182 - 4186 (1979).

[14] Mertz, L., "Aspheric Potpourri," *Appl. Opt.*, **20**, 1127 - 1131 (1981).

[15] Sasian, J. M., "Double Curvature Surfaces in Mirror System Design," *Opt. Eng.*, **36**, 183 - 188 (1997).

[16] Schulz, G., "Aspheric Surfaces," in *Progress in Optics*, Vol. XXV, E. Wolf, ed., Chap. Ⅳ, North Holland, Amsterdam (1988).

[17] Shannon, R. R., "Aspheric Surfaces," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. Ⅷ, R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Academic Press, San Diego, CA (1980).

附录 C　光学材料

C.1　光学玻璃

光学玻璃主要由两个参数决定，即折射率和阿贝系数。对于肖特玻璃，它们的阿贝数 V_d 与折射率 n_d 的关系图如图 C-1 所示。对于 d 线，除了折射率，几个其他的量也定义玻璃的主要折射特性。差值（$n_F - n_C$）叫作主色散。阿贝数表示折射率随波长变化的方式。d 线的阿贝数 V_d 定义为

$$V_d = \frac{n_d - 1}{n_F - n_C} \tag{C-1}$$

玻璃有许多种类型，但一种使用广泛的分类方式如下：

1）冕牌玻璃是那些相对低色散的玻璃，阿贝数超过 50。

2）火石玻璃有更高的色散，阿贝数小于 50。

名称结尾带字母“K”的玻璃是冕牌玻璃，结尾带“F”的是火石玻璃。火石玻璃更难抛光和易刮伤，而且比冕牌玻璃更重。

光学玻璃产生的二级光谱是由玻璃的部分相对色散决定的。g 线和 F 线的部分相对色散 $P_{g,F}$定义为

$$PV_{g,Fd} = \frac{n_{gd} - n_{F1}}{n_F - n_C} \tag{C-2}$$

光学玻璃的类型很多，在任何光学商店都不可能种类完全齐备。许多透镜设计者不

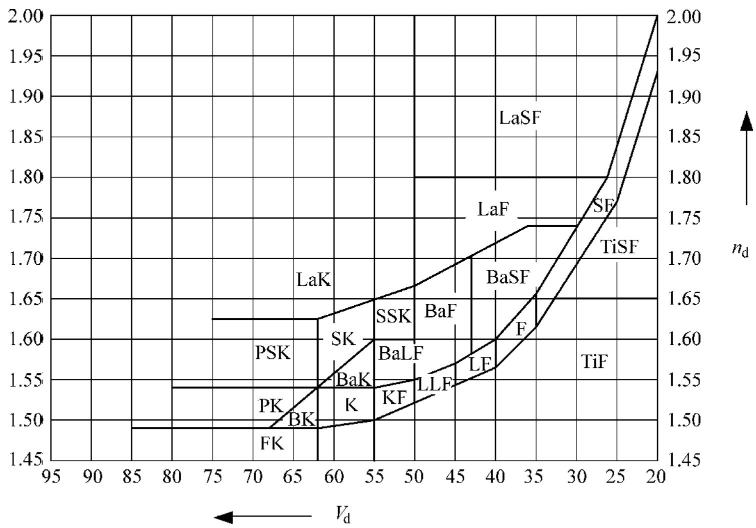


图 C-1 光学玻璃的阿贝数与折射率关系图表

得不排除一些最重要的玻璃，因为他们必须考虑一些重要的因素，如光学性质、有效性以及价格。有几家光学玻璃制造商，如 Corning、Hikari、Hoya、Ohara、Pilkington、Scott 以及 Sumita。但是，玻璃的命名通常是一样的，可以发现接近的性能。肖特玻璃是使用相当广泛的；其中一些最常用的列在表 C-1 中。

表 C-1 部分肖特光学玻璃

玻璃牌号	V_d	n_C	n_d	n'_F	n_g	$N_{g,F}$
N－BAF10	47.11	1.66578	1.67003	1.68083	1.68801	0.5629
N－BAF4	43.72	1.60157	1.60568	1.61624	1.62336	0.5733
N－BAK2	59.71	1.53721	1.53996	1.54677	1.55117	0.5437
N－BAK4	55.98	1.56575	1.56883	1.57649	1.58149	0.5487
N－BALF4	53.87	1.57631	1.57956	1.58769	1.59301	0.5520
N－BALF5	53.63	1.54430	1.54739	1.55510	1.56016	0.5532
N－BASF2	36.00	1.65905	1.66446	1.67862	1.68838	0.5890
N－BK7	64.17	1.51432	1.51680	1.52283	1.52668	0.5349
N－F2	36.43	1.61506	1.62005	1.63310	1.64209	0.5881
N－FK5	70.41	1.48535	1.48749	1.49266	1.49593	0.5290
N－K5	59.48	1.51982	1.52249	1.52910	1.53338	0.5438
N－KF9	51.54	1.52040	1.52346	1.53114	1.53620	0.5558
N－LAF2	44.85	1.73903	1.74397	1.75659	1.76500	0.5656
N－LAF21	47.49	1.78301	1.78800	1.80056	1.80882	0.5555

（续）

玻璃牌号	V_d	n_C	n_d	n'_F	n_g	$N_{g,F}$
N－LAK10	50. 62	1. 71572	1. 72003	1. 73077	1. 73779	0. 5515
N－LAK34	54. 50	1. 72509	1. 72916	1. 73923	1. 74575	0. 5443
N－LAK7	58. 52	1. 64821	1. 65160	1. 65998	1. 66539	0. 5433
N－LAK9	54. 71	1. 68716	1. 69100	1. 70051	1. 70667	0. 5447
N－LASF41	43. 13	1. 82923	1. 83501	1. 84972	1. 85949	0. 5629
LF5	40. 85	1. 57723	1. 58144	1. 59231	1. 59964	0. 5748
LLF1	45. 75	1. 54457	1. 54814	1. 55725	1. 56333	0. 5660
N－PK51	76. 98	1. 52646	1. 52855	1. 53372	1. 53704	0. 5401
N－PK52A	81. 61	1. 49514	1. 49700	1. 50157	1. 50450	0. 5377
N－SF1	29. 62	1. 71035	1. 71736	1. 73605	1. 74919	0. 6037
N－SF10	28. 53	1. 72091	1. 72828	1. 74800	1. 76191	0. 6066
N－SF15	30. 20	1. 69222	1. 69892	1. 71677	1. 72933	0. 6038
N－SF2	33. 82	1. 64210	1. 64769	1. 66241	1. 67265	0. 5950
N－SF5	32. 25	1. 66664	1. 67271	1. 68876	1. 69998	0. 5984
N－SF66	20. 88	1. 91039	1. 92286	1. 95739	1. 98285	0. 6394
N－SF8	31. 31	1. 68254	1. 68894	1. 70589	1. 71775	0. 5969
N－SK11	60. 80	1. 56601	1. 56384	1. 57081	1. 57530	0. 5411
N－SK16	60. 32	1. 61727	1. 62041	1. 62814	1. 63312	0. 5412
N－SK4	58. 63	1. 60954	1. 61272	1. 62059	1. 62568	0. 5448
N－SK5	61. 27	1. 58619	1. 58913	1. 59635	1. 60100	0. 5400
N－SK16	60. 32	1. 61727	1. 62042	1. 62814	1. 63312	0. 5412
N－SSK2	53. 27	1. 61877	1. 62229	1. 63112	1. 63691	0. 5526
N－SSK5	50. 88	1. 65455	1. 65844	1. 66824	1. 67471	0. 5575

在阿贝数 V_d 与折射率 n_d 的关系图（见图 C-2）中，这些玻璃的位置有标注出来。图 C-3 表示的是部分相对色散 $P_{g,F}$ 相对阿贝数 V_d 的关系图。应该指出的是，为了健康安全，新的光学玻璃不含铅和砷。这些新的玻璃有几乎一样的折射率，但由于它们可能有小的差异，所以会在原来的玻璃名字前加上字母 N 来加以区别：如 BK7 是常用的原来的冕牌玻璃，而 N－BK7 就是新的冕牌玻璃。

眼镜镜片玻璃也被广泛使用。表 C-2 就列出了一些这种玻璃。最后，表 C-3 列出了一些用于光学元件的其他光学各向同性材料。

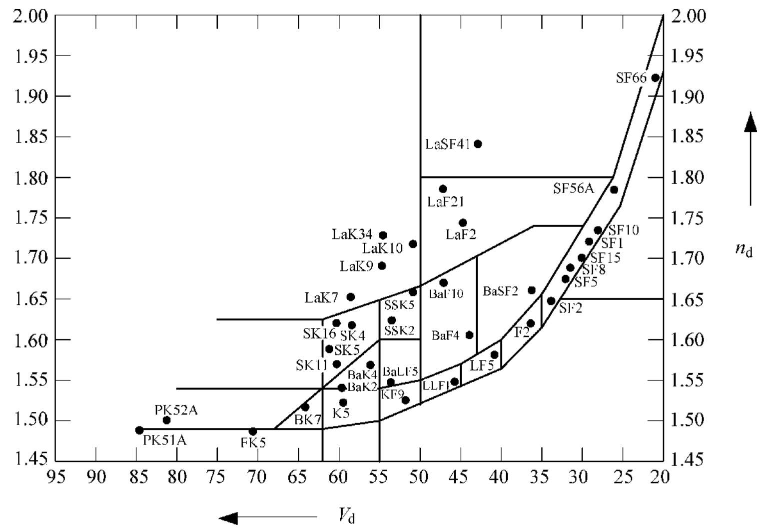


图 C-2　部分常用的光学玻璃

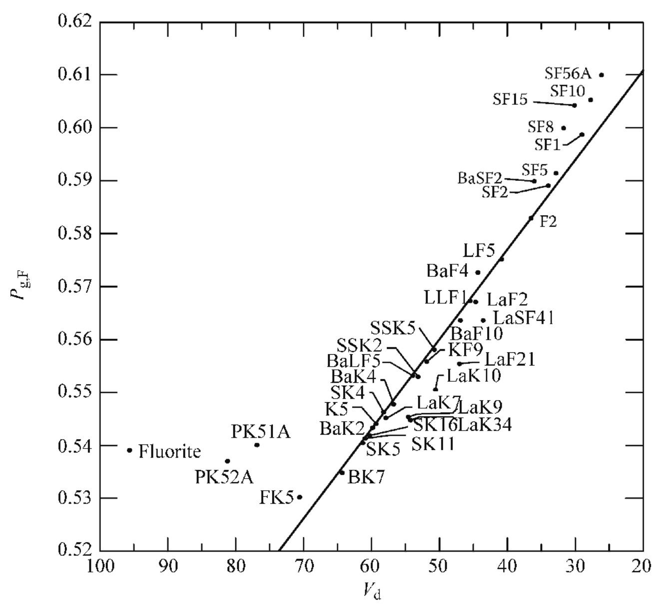


图 C-3　光学玻璃的阿贝数与相关部分相对色散的关系

表 C-2　部分肖特眼睛玻璃

玻璃类型	V_d	n_C	n_d	n'_F	n_g	密度/(g/ml)
冕牌（D0391）	58.6	1.5203	1.5230	1.5292	1.5341	2.55
炻（D0.90）	44.1	1.5967	1.6008	1.6103	1.6181	2.67
炻（D0389）	42.9	1.5965	1.6007	1.6105	1.6185	2.67
炻（D0785）	35.0	1.7880	1.7946	1.8107	1.8239	3.60
炻（D0082）	30.6	1.8776	1.8860	1.9066	1.9238	4.02
低密度炻（D0088）	30.8	1.6915	1.7010	1.7154	1.7224	2.99

表 C-3　其他各向同性材料

材料名称	V_d	n_C	n_d	n'_F	n_g
熔融水晶	67.6	1.45646	1.45857	1.46324	1.46679
合成石英玻璃	67.7	1.45637	1.45847	1.46314	1.46669
萤石	95.3	1.43249	1.43384	1.43704	1.43950

C.2　光学塑料

塑料有很多种类，性质各异，可用于制造光学元件，其中最常用的一些列在表 C-4 中。基本上，光学塑料可以按照热塑性和热固性来分类。

表 C-4　部分光学塑料

材料名称	V_d	n_C	n_d	n'_F	n_g	类型
亚克力	57.2	1.488	1.491	1.497	1.5000	热塑
聚苯乙烯	30.8	1.584	1.590	1.604	1.6109	热塑
聚碳酸酯	30.1	1.577	1.583	1.604	1.6039	热塑
CR-39	60.0	1.495	1.498	1.504	1.5070	热固
COP（Zeonex F480R）	56.2	1.522	1.525	1.532	1.537	热塑

热塑性或热熔性塑料是高分子材料，加热会变软，但化学成分没有任何变化。热固性塑料的形状不受加热影响。例如，加工热固性塑料时，要将液态单体塑胶倒入模子中，使其聚合成型。

塑料透镜有许多优点和缺点。主要的优点是重量更轻，价格更便宜。缺点是折射率一般更低，表面比玻璃更容易刮伤，而且面形不像玻璃中的那么精确。但非球面更容易浇铸或压模成像。

关于塑料光学的完整信息可以在 Bäumer（2005）和 Weber（2003）的书中找到。

现在，许多现代光学仪器既有玻璃的透镜又有塑料的透镜。

C.3 红外材料和紫外材料

大多数玻璃不能透过红外和紫外辐射。如果透镜要透过这些波长的光，就必须选择特殊的材料。由于这些特殊材料讲起来篇幅太大，本书不作讨论。本章结尾列出了一些参考资料，供感兴趣的读者参考。

参考文献

[1] Barnes, W. P., Jr., "Optical Materials—Reflective," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. Ⅶ, R. R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Academic Press, San Diego, CA (1979).

[2] Bäumer, S.,. *Handbook of Plastic Optics*, John Wiley and Sons, New York (2005).

[3] Kavanagh, A. J., "Optical Material," in *Military Standardization Handbook: Optical Design*, *MIL-HDBK 141*, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962).

[4] Kreidl, N. J. and Rood, J. L., "Optical Materials," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. Ⅰ, R. Kingslake, ed., Academic Press, San Diego, CA (1965).

[5] Malitson, I. H., "A Redetermination of Some Optical Properties of Calcium Fluoride," *Appl. Opt.*, **2**, 1103-1107 (1963).

[6] McCarthy, D. E., "The Reflection and Transmission of Infrared Materials, Part 1. Spectra from 2 μm to 50μm," *Appl. Opt.*, **2**, 591-595 (1963).

[7] McCarthy, D. E., "The Reflection and Transmission of Infrared Materials, Part 2. Bibliography," *Appl. Opt.*, **2**, 596-603 (1963).

[8] McCarthy, D. E., "The Reflection and Transmission of Infrared Materials, Part 3. Spectra from 2 μm to 50μm," *Appl. Opt.*, **4**, 317-320 (1965).

[9] McCarthy, D. E., "The Reflection and Transmission of Infrared Materials, Part 4. Bibliography," *Appl. Opt.*, **4**, 507-511 (1965).

[10] McCarthy, D. E., "The Reflection and Transmission of Infrared Materials, Part 5. Spectra from 2 μm to 50μm," *Appl. Opt.*, **7**, 1997-2000 (1965).

[11] McCarthy, D. E., "The Reflection and Transmission of Infrared Materials, Part 6. Bibliography," *Appl. Opt.*, **7**, 2221-2225 (1965).

[12] Parker, C. J., "Optical Materials—Refractive," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. Ⅶ, R. R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Academic Press, San Diego, CA (1983).

[13] Pellicori, S. F., "Transmittances of Some Optical Materials for Use Between 1900 and 3400Å," *Appl. Opt.*, **3**, 361-366 (1964).

[14] Weber, M. J., *Handbook of Optical Materials*, CRC Press, Boca Raton, FL (2003).

[15] Welham, B., "Plastic Optical Components," in *Applied Optics and Optical Engineering*, Vol. Ⅶ, R. R. Shannon and J. C. Wyant, eds., Academic Press, San Diego, CA (1979).

附录 D　偏斜光线的精确光线追迹

D.1　精确光线追迹

光线追迹过程已在文献中被多次描述（Allen 和 Snyder，1952；Cornejo – Rodriguez 和 Cordero – Davila，1979；Feder，1968；Herzberger，1951，1957；Herzberger 和 Hoadley，1946；Lessing，1962；Malacara，1965；Spencer 和 Murty，1962）。这些方法基本上比较简单，因为只涉及初级几何。然而，追迹通过非球面的不交轴光线（偏斜光线），从代数的角度看，是相当复杂的。所以许多光学设计书籍中没有对此类方法做详细的描述。毫无疑问，光线追迹过程的实际作用巨大，特别是当使用计算机程序的时候。

我们将使用 Hopkins 和 Hanau 提出的方法（1962）来推导追迹通过非球面的偏斜光线的等式。这种方法由以下 4 个基本步骤构成：

1）从第一个表面转换到正切于下一个表面的平面。

2）从正切平面转换到密切球面。

3）从密切球面转换到非球面。

4）在非球面上折射。

使用在第一个表面的相交坐标 X、Y 和 Z 以及它们的由折射系数相乘的方向余弦，K、L 和 M 来定义光线。我们现在研究这些步骤的详细内容。

D.1.1　从第一个表面转换到正切于下一个表面的平面

在开始推导追迹偏斜光线的公式之前，我们先考虑图 D-1。坐标原点位于光学表面的顶点。光线的起点是在前面表面的坐标 X_{-1}、Y_{-1} 和 Z_{-1}。光线方向由方向余弦 K_{-1}/n_{-1}、L_{-1}/n_{-1} 和 M_{-1}/n_{-1} 给出。沿光线方向从起点到光线与下个表面的相切平面的交点之间的距离 d，由 M_{-1} 的定义给出

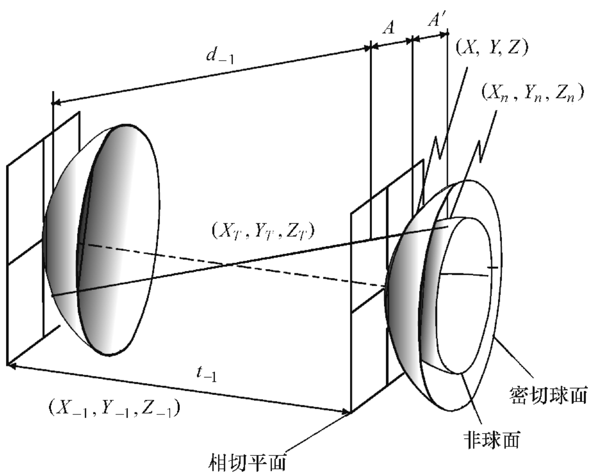


图 D-1　光学表面的光线追迹

$$\frac{d_{-1}}{n_{-1}}=\frac{t_{-1}-Z_{-1}}{M_{-1}} \tag{D-1}$$

然后，用这个值与 L 和 M 的定义，相切平面上的坐标 X_T 和 Y_T 可由式（D-2）和式（D-3）得到

$$X_T=X_{-1}+\left(\frac{d_{-1}}{n_{-1}}\right)K_{-1} \tag{D-2}$$

$$Y_T=Y_{-1}+\left(\frac{d_{-1}}{n_{-1}}\right)L_{-1} \tag{D-3}$$

D.1.2 从正切平面转换到密切球面

当一个球面和一个非球面在顶点处相切并且在相切点处有相同的曲率半径，我们说它们是密切的。现在我们来找到光线和密切（osculum，在拉丁语中意思是亲吻）球面的交点。如果 A 是沿光线方向从相切平面到与球面的交点的距离，那么交点坐标为

$$X=X_T+\left(\frac{A}{n_{-1}}\right)K_{-1} \tag{D-4}$$

$$Y=Y_T+\left(\frac{A}{n_{-1}}\right)L_{-1} \tag{D-5}$$

$$Z=\left(\frac{A}{n_{-1}}\right)M_{-1} \tag{D-6}$$

然而，在计算这些坐标之前，我们需要知道距离 A 的值。因此第一步是确定图 D-1 所示的这个距离。从图 D-2 我们可以看出

$$\begin{aligned} Z&=r-\sqrt{r^2-(X^2+Y^2)} \\ &=\frac{1}{c}-\frac{1}{c}\sqrt{1-c^2(X^2+Y^2)} \end{aligned} \tag{D-7}$$

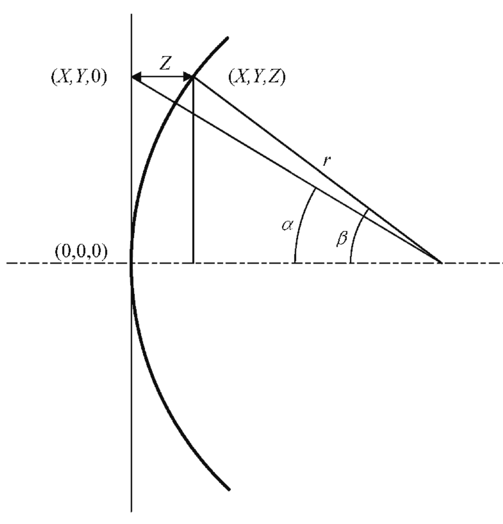


图 D-2 光线追迹的一些参数

然后，移项和平方，我们得到

$$c^2(X^2+Y^2+Z^2)-2cZ=0 \tag{D-8}$$

我们代入式（D-4）~式（D-6）给出的 X、Y 和 Z 的值：

$$\left(\frac{A}{n_{-1}}\right)^2 c(K_{-1}^2+L_{-1}^2+M_{-1}^2)-2\left(\frac{A}{n_{-1}}\right)[M_{-1}-c(Y_TL_{-1}+X_TK_{-1})]+ c(X_T^2+Y_T^2)=0 \tag{D-9}$$

这里我们假设 c 不为 0，将式（D-9）除以 c。因为方向余弦的平方和是 1，式（D-9）可写作：

$$cn_{-1}^2\left(\frac{A}{n_{-1}}\right)-2B\left(\frac{A}{n_{-1}}\right)+H=0 \tag{D-10}$$

式中，定义

$$B=[M_{-1}-c(Y_TL_{-1}+X_TL_{-1})] \tag{D-11}$$

$$H=c(X_T^2+Y_T^2)=r\left(\frac{X_T^2+Y_T^2}{r^2}\right)=r\tan^2\beta \tag{D-12}$$

式中，角度 β 在图 D-2 中示出。为了得到 A 的值，我们必须得到式（D-10）的根，如下：

$$\left(\frac{A}{n_{-1}}\right)=\frac{B\pm n_{-1}\sqrt{\left(\frac{B}{n_{-1}}\right)-cH}}{cn_{-1}^2} \tag{D-13}$$

现在，考虑一个平面的例子（$c=0$）。当 c 接近 0 的时候，A 的值也趋于 0，如我们在图 D-1 中看到的那样。只有在式（D-13）中取负号才有可能。现在，让我们找到平方根的另一种表示。考虑图 D-3，应用余弦定律，我们可以发现线段 D 具有长度：

$$D^2=X_T^2+Y_T^2+r^2=A^2+r^2+2Ar\cos I \tag{D-14}$$

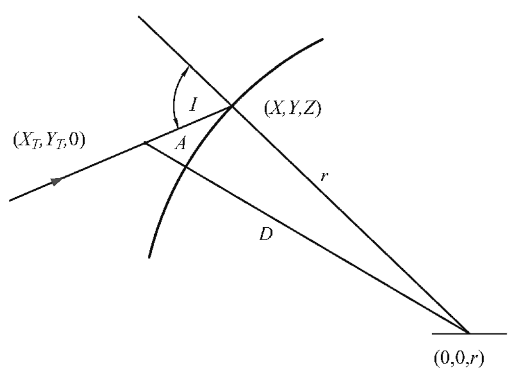


图 D-3　在光学表面的光线折射

解出 $\cos I$，并应用式（D-12）中的 H 的值，我们得到

$$n_{-1}\cos I=\frac{H-cn_{-1}^2(A/n_{-1})^2}{2(A/n_{-1})} \tag{D-15}$$

代入式（D-13）中得到的（A/n_{-1}）（使用负号，如先前指出的），经过一些代数运算，我们得到

$$n_{-1}\cos I = n_{-1}\sqrt{\left(\frac{B}{n_{-1}}\right)^2 - cH} \tag{D-16}$$

再将结果代入式（D-13），平方根前依然取负号得到

$$\left(\frac{A}{n_{-1}}\right) = \frac{B - n_{-1}\cos I}{cn_{-1}^2} \tag{D-17}$$

另一方面，从式（D-16），我们还可以得到

$$\begin{aligned} cn_{-1}^2 &= \frac{B^2 - n_{-1}^2\cos^2 I}{H} \\ &= \frac{(B + n_{-1}\cos I)(B - n_{-1}\cos I)}{H} \end{aligned} \tag{D-18}$$

将此表达式代入式（D-17），得到（A/n_{-1}）的最终结果

$$\left(\frac{A}{n_{-1}}\right) = \frac{H}{B + n_{-1}\cos I} \tag{D-19}$$

总之，首先，从式（D-11）和式（D-12）分别得到 B 和 H。然后从式（D-16）得到 $n_{-1}\cos I$，代入式（D-19），得到（A/n_{-1}）。

D.1.3　从密切球面转换到非球面

我们采用同上一节类似的处理方法。第一部分是计算光线和密切球面的交点到和非球面的交点的距离 A'（见图 D-1）。直接求解的方法非常复杂，更好的方法是使用迭代的方式得到这个值，如图 D-4 所示。假定光线和非球面的相交点（点 a_1）的坐标是（X_1，Y_1，Z_1）。步骤如下：

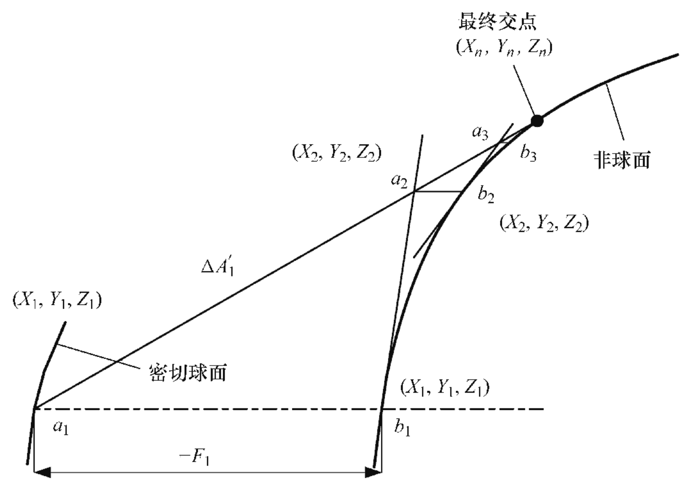


图 D-4　非球面的变换

1）在非球面上找到一个具有相同的 X_1 和 Y_1 坐标的点 b_1，计算距离 $-F_1$。

2）确定在这个点和非球面相切的平面。

3）计算光线和此相切平面的相交点 a_2。

4）对 b_2、a_3、b_3 等各点重复同样步骤，直到误差变得足够小。

对任一迭代步骤，令（X_n，Y_n，Z_n）表示点 a_n 的坐标，（X_n，Y_n，Z'_n）表示点 b_n 的坐标，n 是逼近次数。光轴到点 a_n 的径向距离 S_n

$$S_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 \tag{D-20}$$

对非球面，定义 W_n 为式（B-8）的平方根：

$$W_n = \sqrt{1 - c^2 S_n^2} \tag{D-21}$$

现在，a_n 到 b_n 的距离 $-F_n$ 由下式给出：

$$\begin{aligned} F_n &= Z_n - \left(\frac{cS_n^2}{1 + W_n} + B_1 S_n^4 + B_2 S_n^6 + B_3 S_n^8 + B_4 S_n^{10}\right) \\ &= Z_n - Z'_n \end{aligned} \tag{D-22}$$

如图 D-4 所示，点 a_{n+1} 的坐标仅在计算出长度 $\Delta A'_n$ 后得到，但是我们首先需要点 b_n 处与非球面相切的平面方程。为了得到这个平面方程，考虑非球面方程（简洁起见，省略下标 n）

$$\psi(X,Y,Z) = Z - \left(\frac{cS^2}{1 + W} + B_1 S^4 + B_2 S^4 + B_3 S^8 + B_4 S^{10}\right) = 0 \tag{D-23}$$

那么，相切平面方程为

$$\psi(X_n,Y_n,Z'_n) + (X - X_n)\left(\frac{\partial\psi}{\partial X}\right)_{X_n,Y_n,Z'_n} + (Y - Y_n)\left(\frac{\partial\psi}{\partial Y}\right)_{X_n,Y_n,Z'_n} + (Z - Z'_n)\left(\frac{\partial\psi}{\partial Z}\right)_{X_n,Y_n,Z'_n} \tag{D-24}$$

下一步是计算以下偏导数：

$$\frac{\partial\psi}{\partial X} = \frac{\partial\psi}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial X} = \frac{\partial\psi}{\partial S}\frac{X}{S} \tag{D-25}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial Y} = \frac{\partial\psi}{\partial S}\frac{Y}{S} \tag{D-26}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial Z} = 1 \tag{D-27}$$

对式（D-23）求偏导，利用式（D-21）中的 W 的定义，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial S} &= -\frac{S}{W}c - S(4B_1 S^2 + 6B_2 S^4 + 8B_3 S^6 + 10B_4 S^8) \\ &= -\frac{S}{W}E \end{aligned} \tag{D-28}$$

式中，

$$E_n = c + W_n(4B_1 S_n^2 + 6B_2 S_n^4 + 8B_3 S_n^6 + 10B_4 S_n^8) \tag{D-29}$$

利用这些结果，代入到式（D-24），我们得到以下平面方程：

$$-(X-X_n)\frac{X_n}{W_n}E-(Y-Y_n)\frac{Y_n}{W_n}E+(Z-Z'_n)+Z_n-Z'_n=0 \tag{D-30}$$

但是定义

$$U_n=-X_nE_n \tag{D-31}$$

$$V_n=-Y_nE_n \tag{D-32}$$

并利用 $F_n=Z_n-Z'_n$，平面方程可以写作：

$$(X-X_n)U_n+(Y-Y_n)V_n+(Z-Z_n)W_n=-F_nW_n \tag{D-33}$$

如果现在对坐标（X，Y，Z）取特定的值（X_{n+1}，Y_{n+1}，Z_{n+1}），我们会发现

$$(X_{n+1}-X_n)U_n+(Y_{n+1}-Y_n)V_n+(Z_{n+1}-Z_n)W_n=-F_nW_n \tag{D-34}$$

类似于式（D-4），式（D-5）和式（D-6），我们可以把坐标（X_{+1}，Y_{n+1}，Z_{n+1}）写作：

$$X_{n+1}=X_n+\left(\frac{\Delta A'}{n_{-1}}\right)K_{-1} \tag{D-35}$$

$$Y_{n+1}=Y_n+\left(\frac{\Delta A'}{n_{-1}}\right)L_{-1} \tag{D-36}$$

$$Z_{n+1}=Z_n+\left(\frac{\Delta A'}{n_{-1}}\right)M_{-1} \tag{D-37}$$

然后，把这些值代入式（D-33），求解 $\Delta A'/n_{-1}$，我们发现

$$D_{-1}=d_{-1}+A+A' \tag{D-38}$$

当 $\Delta A'/n_{-1}$的期望容差达到的时候，迭代循环终止。最后，从图 D-1，我们可以看出

$$\frac{\Delta A'}{n_{-1}}=\frac{F_nW_n}{K_{-1}U_n+L_{-1}V_n+M_{-1}W_n} \tag{D-39}$$

D.1.4　在非球面上折射

从式（D-33）可以看出，平面（或者非球面）的法线方向余弦为 U/G，V/G，W/G，其中

$$G^2=U^2+V^2+W^2 \tag{D-40}$$

下标 n 被省略，因为迭代已经结束。因此，表面 $\boldsymbol{S}_1$ 的法线单位矢量为

$$\boldsymbol{S}_1=\left(\frac{U}{G},\frac{V}{G},\frac{W}{G}\right) \tag{D-41}$$

那么，单位法线矢量和光线方向的单位矢量的标积是这两者之间角度的余弦。从而，

$$\cos I=\frac{K_{-1}}{n_{-1}}\frac{U}{G}+\frac{L_{-1}}{n_{-1}}\frac{V}{G}+\frac{M_{-1}}{n_{-1}}\frac{W}{G} \tag{D-42}$$

上式可以重写为

$$Gn_{-1}\cos I=K_{-1}U+L_{-1}V+M_{-1}W \tag{D-43}$$

从式（1-17），矢量折射定律由下式给出

$$\boldsymbol{S}_2=\boldsymbol{S}_1-\Gamma\boldsymbol{p} \tag{D-44}$$

式中，Γ 由式（1-18）给出

$$\Gamma = n\cos I' - n_{-1}\cos I \tag{D-45}$$

式（D-45）可以重写为

$$P = \frac{\Gamma}{G} = \frac{Gn\cos I' - Gn_{-1}\cos I}{G^2} \tag{D-46}$$

从同一个表达式［式（1-18）］，还可以得到

$$n\cos I' = n\left[\left(\frac{n_{-1}}{n}\cos I\right)^2 - \left(\frac{n_{-1}}{n}\right)^2 + 1\right]^{1/2} \tag{D-47}$$

然后，乘以 G，得到

$$Gn\cos I' = n\left[\left(G\frac{n_{-1}}{n}\cos I\right)^2 - G^2\left(\frac{n_{-1}}{n}\right)^2 + G^2\right]^{1/2} \tag{D-48}$$

最后，矢量折射定律可以重写为三个分离的表达式：

$$K = K_{-1} + UP \tag{D-49}$$

$$L = L_{-1} + VP \tag{D-50}$$

$$M = M_{-1} + WP \tag{D-51}$$

D.1.5　环形面或者球柱面的折射

要追迹环形（Murra，1954；Spencer 和 Murty，1962）或者球柱（Menchaca 和 Malacara，1986）表面，我们可以遵循应用于旋转对称球面的相同的步骤。对球柱面，可以使用 Menchaca 和 Malacara（1986）提出的方法。这种情况下，使用下面的方程来得到 U 和 V 的值。首先，定义参数

$$Q = c_1 X^2 + c_1 Y^2 \tag{D-52}$$

$$R = \sqrt{1 - \frac{Q^2}{S^2}} \tag{D-53}$$

然后，式（D-22）中定义的 F 的值由下式给出

$$F = Z_n - \frac{Q}{(1+R)} \tag{D-54}$$

W 的值是一样的，由式（D-21）给出。U 和 V 的值变为

$$U = W\frac{-[2c_1X_n(1+R) + 2(c_1X_n^2/S^4)(2c_1 - Q)Q]}{(1+R)^2} \tag{D-55}$$

$$V = W\frac{-[2c_2Y_n(1+R) + 2(c_2Y_n^2/S^4)(2c_2 - Q)Q]}{(1+R)^2} \tag{D-56}$$

D.2　光线追迹结果一览

对旋转对称的非球面进行光线追迹所需要的表达式的最终集合按照使用的顺序被列出来了。要追迹的光线由第一表面的交点坐标（X_{-1}，Y_{-1}，Z_{-1}）和由折射率系数 K_{-1}，L_{-1}，M_{-1} 相乘的方向余弦所定义。首先，从前表面到考虑的表面的切平面进行追迹：

$$\frac{d_{-1}}{n_{-1}} = \frac{t_{-1} - Z_{-1}}{M_{-1}} \tag{D-57}$$

$$X_T = X_{-1} + \left(\frac{d_{-1}}{n_{-1}}\right)K_{-1} \tag{D-58}$$

$$Y_T = Y_{-1} + \left(\frac{d_{-1}}{n_{-1}}\right)L_{-1} \tag{D-59}$$

然后，从切平面到密切球面进行追迹：

$$H = c(X_T^2 + Y_T^2) \tag{D-60}$$

$$B = M_{-1} - c(Y_T L_{-1} + X_T L_{-1}) \tag{D-61}$$

$$n_{-1}\cos I = n_{-1}\sqrt{\left(\frac{B}{n_{-1}}\right)^2 - cH} \tag{D-62}$$

如果这个平方根变量是负的，光线就不和球面相交。下一步，我们计算

$$\left(\frac{A}{n_{-1}}\right) = \frac{H}{B + n_{-1}\cos I} \tag{D-63}$$

$$X = X_T + \left(\frac{A}{n_{-1}}\right)K_{-1} \tag{D-64}$$

$$Y = Y_T + \left(\frac{A}{n_{-1}}\right)L_{-1} \tag{D-65}$$

$$Z = \left(\frac{A}{n_{-1}}\right)M_{-1} \tag{D-66}$$

我们已经计算出了密切球面上光线的坐标。现在，迭代计算非球面上的光线坐标：

$$S_n^2 = X_n^2 + Y_n^2 \tag{D-67}$$

$$W_n = \sqrt{1 - c^2 S_n^2} \tag{D-68}$$

式中，如果平方根变量是负的，光线不穿过非球面。然后，计算

$$F_n = Z_n - \left(\frac{cS_n^2}{1 + W_n} + B_1 S_n^4 + B_2 S_n^6 + B_3 S_n^8 + B_4 S_n^{10}\right) \tag{D-69}$$

如果光学表面是二次曲面，利用式（B-9）和（B-12）计算系数 B_i。然后

$$E_n = c + W_n(4B_1 S_n^2 + 6B_2 S_n^4 + 8B_3 S_n^6 + 10B_4 S_n^8) \tag{D-70}$$

$$U_n = -X_n E_n \tag{D-71}$$

$$V_n = -Y_n E_n \tag{D-72}$$

$$\frac{\Delta A'}{n_{-1}} = \frac{F_n W_n}{K_{-1}U_n + L_{-1}V_n + M_{-1}W_n} \tag{D-73}$$

$$X_{n+1} = X_n + \left(\frac{\Delta A'}{n_{-1}}\right)K_{-1} \tag{D-74}$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \left(\frac{\Delta A'}{n_{-1}}\right)L_{-1} \tag{D-75}$$

$$Z_{n-1} = Z_n + \left(\frac{\Delta A'}{n_{-1}}\right)M_{-1} \tag{D-76}$$

如果 $\Delta A'$ 的值大于容限（典型地，约为 $\lambda/20$ 或者更少），回到第一个方程式(D-67)进行另一轮迭代。然后，利用最终值，继续计算

$$G^2 = U^2 + V^2 + W^2 \tag{D-77}$$

$$Gn_{-1}\cos I = K_{-1}U + L_{-1}V + M_{-1}W \tag{D-78}$$

$$Gn\cos I' = n\left[\left(G\frac{n_{-1}}{n}\cos I\right)^2 - G^2\left(\frac{n_{-1}}{n}\right)^2 + G^2\right]^{1/2} \tag{D-79}$$

但是如果平方根变量是负的，光线就不被折射，而是在内完全反射。然后，继续计算

$$P = \frac{Gn\cos I' - Gn_{-1}\cos I}{G^2} \tag{D-80}$$

$$K = K_{-1} + UP \tag{D-81}$$

$$L = L_{-1} + VP \tag{D-82}$$

$$M = M_{-1} + WP \tag{D-83}$$

对旋转对称非球面的光线追迹过程至此结束。

D.3　倾斜或者偏心表面的光线追迹

光学表面可能相对于系统光轴倾斜或偏心（Allen 和 Snyder，1952）。换句话说，可能不止一个共同的光轴。考虑一个坐标系系统，如图 D-5 所示。原点在所考虑的表面倾斜或者偏心之前的顶点。那么，z 轴和前表面的 z 轴对准，y 轴和前表面的 y 轴平行。一个表面的光轴可能由于沿坐标系系统的旋转而相对于前表面的光轴倾斜，这种旋转可能是绕 x 轴旋转角度 θ_x 或者绕 y 轴旋转角度 θ_y。如果表面不是旋转对称的，如超环面，那么绕 z 轴的旋转角度 θ_z 也很重要。当对倾斜或者偏心表面进行光线追迹的时候，必须进行一次以原点（表面顶点）为轴，带有期望旋转和偏心的变换。这种变换总是相对于前表面的，如图 D-6 所示。因此，仅当一个表面是倾斜或者偏心的，才需要做第二次变换，把光轴变到原先的位置上。需要变换的参数是光线起始位置（光线和前表面的交点 X，Y 和 Z）和光线方向（折射率系数 K，L 和 M 相乘的方向余弦）。三种可能的旋转的变换

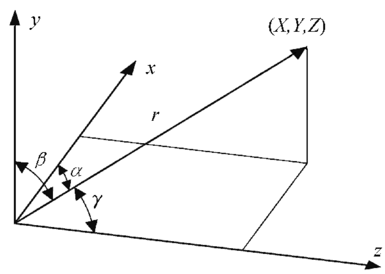


图 D-5　倾斜光学表面的倾斜角

$$\begin{aligned} X'_{-1} &= X_{-1} \\ Y'_{-1} &= -(Z_{-1} - t_{-1})\sin\theta_x + Y_{-1}\cos\theta_x + t_{-1} \\ Z'_{-1} &= (Z_{-1} - t_{-1})\cos\theta_x + Y_{-1}\sin\theta_x + t_{-1} \end{aligned} \tag{D-84}$$

对光线方向，有

$$\begin{aligned} K'_{-1} &= K_{-1} \\ L'_{-1} &= -M_{-1}\sin\theta_x + L_{-1}\cos\theta_x \\ M'_{-1} &= M_{-1}\cos\theta_x + L_{-1}\sin\theta_x \end{aligned} \tag{D-85}$$

偏心由下面的变换进行

$$X'_{-1} = X_{-1} - \Delta X$$

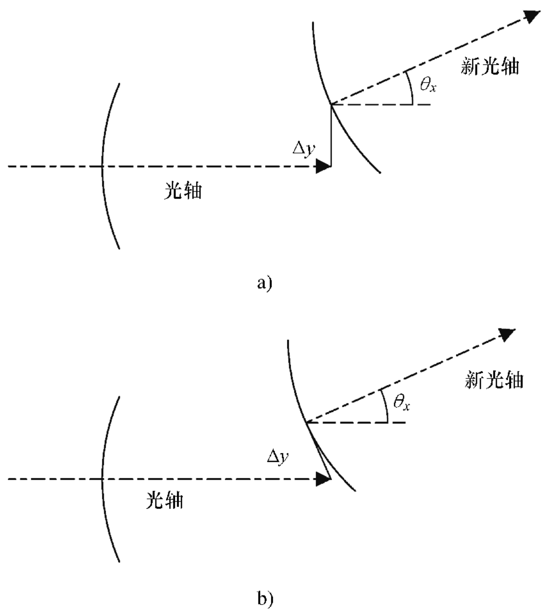


图 D-6　光学表面的倾斜和偏心

a）偏心附加倾斜　b）倾斜附加偏心

$$Y'_{-1} = Y_{-1} - \Delta Y \tag{D-86}$$

需要注意到，倾斜和偏心的运算不可交换。即它们的顺序很重要，如图 D-6 所示。

经过一个偏心或者倾斜的表面后，对随后的表面的光轴可能是下面三种不同方向中的一种，如图 D-7 所示。这些新的可能的方向如下：

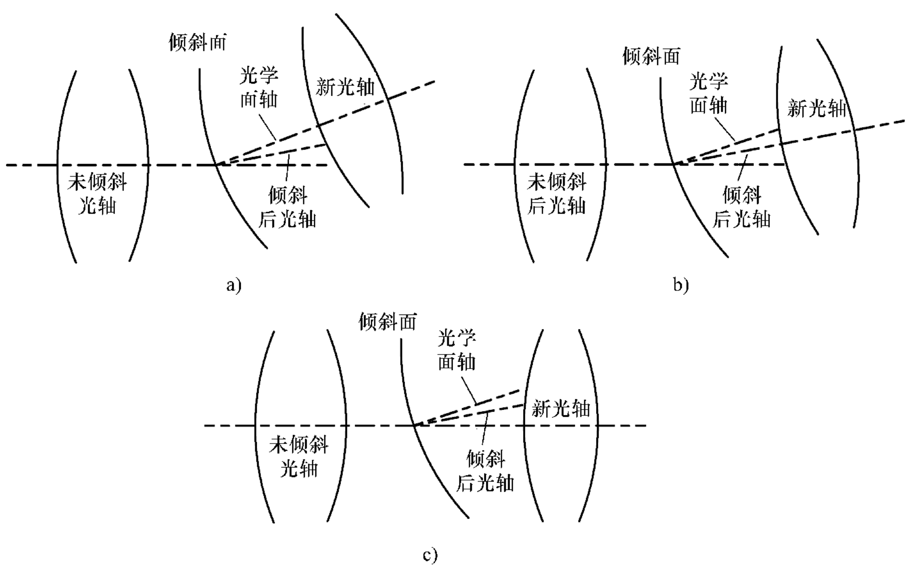


图 D-7　当光学表面倾斜或偏心时，新轴的选择

a）情况一　b）情况二　c）情况三

1）表面的光轴倾斜或者偏心，如图 D-7a 所示。这在不止一个表面而是几个表面是倾斜的情况下很有用，例如透镜或者透镜系统。

2）折射或者反射光轴如图 D-7b 所示。例如，倾斜表面是一个反射镜，并且新的系统元件必须和反射光束对准。

3）先前的光轴保持不变，如图 D-7c 所示。这种情况适用于只有一个在两个有共同光轴的表面之间的表面是倾斜或者偏心的。

参考文献

[1] Allen, W. A. and Snyder, J. R., "Ray Tracing Through Uncentered and Aspheric Surfaces," *J. Opt. Soc. Am.*, **42**, 243 – 249 (1952).

[2] Cornejo – Rodríguez, A. and Cordero – Dávila, A., "Graphical Ray Tracing for Conic Surfaces," *Appl. Opt.*, **18**, 3075 – 3076 (1979).

[3] Feder, D. P., "Differentiation of Ray Tracing Equations with Respect to Construction Parameters of Rotationally Symmetric Optics," *J. Opt. Soc. Am.*, **58**, 1494 – 1495 (1968).

[4] Herzberger, M. "Some Remarks on Ray Tracing," *J. Opt. Soc. Am.*, **41**, 805 – 807 (1951).

[5] Herzberger, M. "Automatic Ray Tracing," *J. Opt. Soc. Am.*, **47**, 736 – 739 (1957).

[6] Herzberger, M. and Hoadley, H. O., "The Calculation of Aspherical Correcting Surfaces," *J. Opt. Soc. Am.*, **36**, 334 – 340 (1946).

[7] Hopkins, R. E. and Hanau, R., "Fundamental Methods of Ray Tracing," in *Military Standardization Handbook: Optical Design*, *MIL – HDBK* 141, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC (1962).

[8] Lessing, N. V. D. W., "Cylindrical Ray – Tracing Equations for Electronic Computers," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 472 – 473 (1962).

[9] Malacara, D., "Geometrical Ronchi Test of Aspherical Mirrors," *Appl. Opt.*, **4**, 1371 – 1374 (1965).

[10] Menchaca, C. and Malacara, D., "Toroidal and Sphero – Cylindrical Surfaces," *Appl. Opt.*, **25**, 3008 – 3009 (1986).

[11] Murra, A. E., "A Toric Skew Ray Trace," *J. Opt. Soc. Am.*, **14**, 672 – 676 (1954).

[12] Spencer, G. and Murty, M. V. R. K., "Generalized Ray – Tracing Procedure," *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 672 – 678 (1962).

附录 E　镜头设计方面的一些专业书籍

E.1　书籍

[1] Born, M. and Wolf, E., Principles of Optics, Macmillan, New York, 1964.

[2] Boutry, G. A., Instrumental Optics, Wiley – lnterscience, New York, 1962.

[3] Bouwers, A., Achievements in Optics, Elsevier, Amsterdam, 1946.

[4] Brouwer, W., Matrix Methods in Optical Instrument Design, Benjamin, New York, 1964.
[5] Chrètien, H., Calcul des CombinaisonsOptiques, l' EcoleSuperieured' Optique, Paris, 1957.
[6] Conrady, A. E., Applied Optics and Optical Design, Part Ⅰ, Dover Publications, New York, 1957.
[7] Conrady, A. E., Applied Optics and Optical Design, Part Ⅱ, Dover Publications, New York, 1960.
[8] Cox, A., A System of Optical Design, Focal Press, New York, 1964.
[9] Geary, J. M., Introduction to Lens Design. With Practical ZEMAX Examples Willmann – Bell, Inc., Richmond, VA, 2002.
[10] Gross, H., ed., Handbook of Optical Systems: Vol. 1, Fundamentals of Technical Optics, Wiley – VCH, Weinheim, 2007.
[11] Gross, H., ed., Handbook of Optical Systems: Vol. 2, Physical Image Formation, Wiley – VCH, Weinheim, 2007.
[12] Gross, H., ed., Handbook of Optical Systems: Vol. 3, Aberration Theory and Correction of Optical Systems, Wiley – VCH, Weinheim, 2007.
[13] Gross, H., ed., Handbook of Optical Systems: Vol. 4, Survey of Optical Instruents, Wiley – VCH, Weinheim, 2007.
[14] Habel, K. J. and Cox, A., Engineering Optics, Pitman, London, 1948.
[15] Herzberger, M., Modern Geometrical Optics, Interscience, New York, 1958.
[16] Hopkins, H. H., Wave Theory of Aberrations, Oxford University Press, London, 1950.
[17] Hopkins, R. E., Hanau, R., Osterberg, H., Richards, O. W., Kavanagh, A. J., Wight, R., Rosin, S., Baumeister, P., and Nennett, A., Military Standardization Handbook: Optical Design, MIL – HDBK 141, U. S. Defense Supply Agency, Washington, DC, 1962.
[18] Johnson, B. K., Optical Design and Lens Computation, Hatton, London, 1948.
[19] Johnson, B. K., Optics and Optical Instruments (Practical Optics), Dover Publications, New York, 1960.
[20] Kidger, M. J., Intermediate Optical Design, SPIE Press, Bellingham, WA, 2004.
[21] Kingslake, R., Lens Design Fundamentals, Academic Press, San Diego, CA, 1978.
[22] Kingslake, R., A History of the Photographic Lens, Academic Press, San Diego, CA, 1989.
[23] Kingslake, R. and Johnson, B. J., Lens Design Fundamentals, Second Edition, SPIE Press, Bellingham, WA, 2010.
[24] Korsch, D., Reflective Optics, Academic Press, Boston, MA, 1991.
[25] Laikin, M., Lens Design, Marcel Decker, New York, 1990.
[26] Mahajan, V. N., Optical Imaging and Aberrations, Part Ⅰ, Ray Geometrical Optics, SPIE Press, Bellingham, WA, 1998.
[27] Mahajan, V. N., Optical Imaging and Aberrations, Part Ⅱ, Wave Diffraction Optics, SPIE Press, Bellingham, WA, 1998.
[28] O' Shea, D. C., Elements of Modern Optical Design, John Wiley, New York, 1985.
[29] Ray, S. F., Applied Photographic Optics, Focal Press, Oxford, 2002.
[30] Smith, G. H., Practical Computer – Aided Lens Design, Willmann – Bell, Inc., Richmond, VA, 1998.

[31] Smith, W. J., Modern Optical Engineering, 2nd ed., McGraw Hill, New York, 1990.
[32] Smith, W. J., Lens Design, Critical Reviews of Science and Technology, Vol. CR41, SPIE Optical Engineering Press, Bellingham, WA, 1992.
[33] Smith, W. J. and Genesee Optics Software, Inc., Modern Lens Design. A Resource Manual, McGraw Hill, New York, 1992.
[34] Walker, B., Optical Design for Visual Systems, SPIE Press, Bellingham, WA, 2000.
[35] Welford, W. T., Geometrical Optics and Optical Instrumentation, North Holland, Amsterdam, 1962.
[36] Welford, W. T., Geometrical Optics, North－Holland, Amsterdam, 1962.
[37] Welford, W. T., Aberrations of the Symmetric Optical System, Academic Press, San Diego, CA, 1974.
[38] Welford, W. T., Aberrations of Optical Systems, Adam Hilger, Bristol and Boston, 1986.

E.2 综述文章和一些书籍中的章节

[1] Hopkins, R. E., "Geometrical Optics," in Methods of Experimental Physics, Geometrical and Instrumental Optics, Vol. 25, D. Malacara, ed., Academic Press, San Diego, CA, 1988.
[2] Hopkins, R. E. and Malacara, D., "Optics and Optical Methods," in Methods of Experimental Physics, Geometrical and Instrumental Optics, Vol. 25, D. Malacara, ed., Academic Press, San Diego, CA, 1988.
[3] Kingslake, R., "Basic Geometrical Optics," in Applied Optics and Optical Engineering, Vol. Ⅰ, R. Kingslake, ed., Academic Press, San Diego, CA, 1965.
[4] Kingslake, R., "Lens Design," in Applied Optics and Optical Engineering, Vol. Ⅲ, R. Kingslake, ed., Academic Press, San Diego, CA, 1965.
[5] Welford, W. T., "Aplanatism and Isoplanatism," in Progress in Optics, Vol. XⅢ, E. Wolf, ed., North Holland.

Handbook of Optical Design, 3rd Edition/by Daniel Malacara - Hernández, Zacarias Malacara - Hernández/ISBN: 9781439867990

Copyright © 2012 by CRC Press.

Authorized translation from English language edition published by CRC Press, part of Taylor & Francis Group LLC; All rights reserved;

本书原版由 Taylor & Francis 出版集团旗下，CRC 出版公司出版，并经其授权翻译出版，版权所有，侵权必究。

China Machine Press is authorized to publish and distribute exclusively the Chinese (Simplified Characters) language edition. This edition is authorized for sale throughout Mainland of China. No part of the publication may be reproduced or distributed by any means, or stored in a database or retrieval system, without the prior written permission of the publisher.

本书中文简体翻译版授权由机械工业出版社独家出版并限在中国大陆地区销售。未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或发行本书的任何部分。

Copies of this book sold without a Taylor & Francis sticker on the cover are unauthorized and illegal.

本书封面贴有 Taylor & Francis 公司防伪标签，无标签者不得销售。

北京市版权局著作权合同登记号　图字：01 - 2013 - 5761 号。

图书在版编目（CIP）数据

光学设计手册：原书第 3 版/（墨西哥）丹尼尔·马拉卡纳·赫尔南德斯，（墨西哥）扎卡里亚斯·马拉卡纳·赫尔南德斯著；邢廷文等译. —北京：机械工业出版社，2017. 12

（国际制造业先进技术译丛）

书名原文：Handbook of Optical Design (Third Edition)

ISBN 978-7-111-57966-3

Ⅰ. ①光…　Ⅱ. ①丹…②扎…③邢…　Ⅲ. ①光学设计 - 技术手册　Ⅳ. ①TN202 - 62

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 218368 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：舒　雯　责任编辑：舒　雯　杨明远
责任校对：肖　琳　封面设计：鞠　杨
责任印制：孙　炜
北京玥实印刷有限公司印刷
2018 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
169mm × 239mm · 26 印张 · 8 插页 · 565 千字
0 001—2 500册
标准书号　：ISBN 978 - 7 - 111 - 57966 - 3
定价：169.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：010 - 88361066
读者购书热线：010 - 68326294
　　　　　　　010 - 88379203
封面无防伪标均为盗版

网络服务
机 工 官 网：www. cmpbook. com
机 工 官 博：weibo. com/cmp1952
金　书　网：www. golden - book. com
教育服务网：www. cmpedu. com

图 1–1　电磁波中的电场和磁场

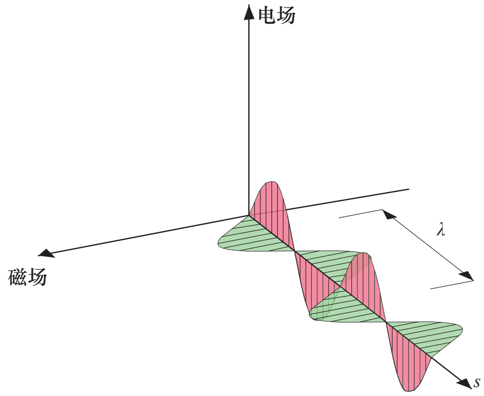


图 1–3　冕牌玻璃和火石玻璃折射率与波长的关系

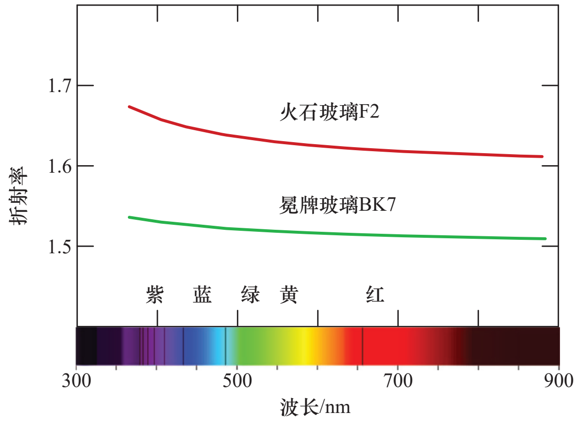


图 1–15　用 Q-U 方法追迹子午光线

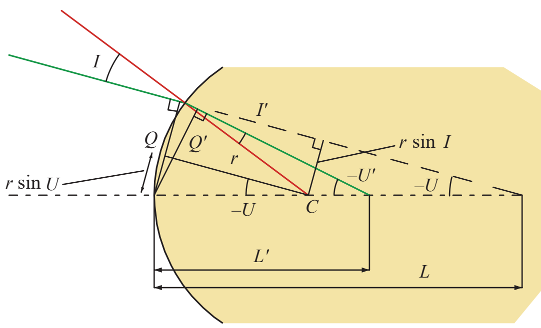


图 1–29　弧矢像点位于辅轴上的证明

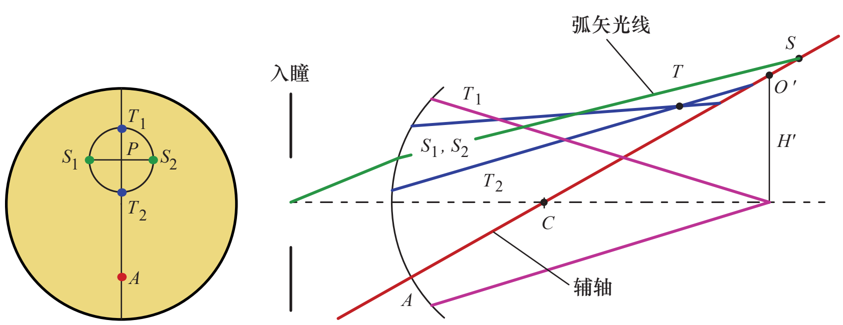


图 3–13　双分离薄透镜的主平面位置

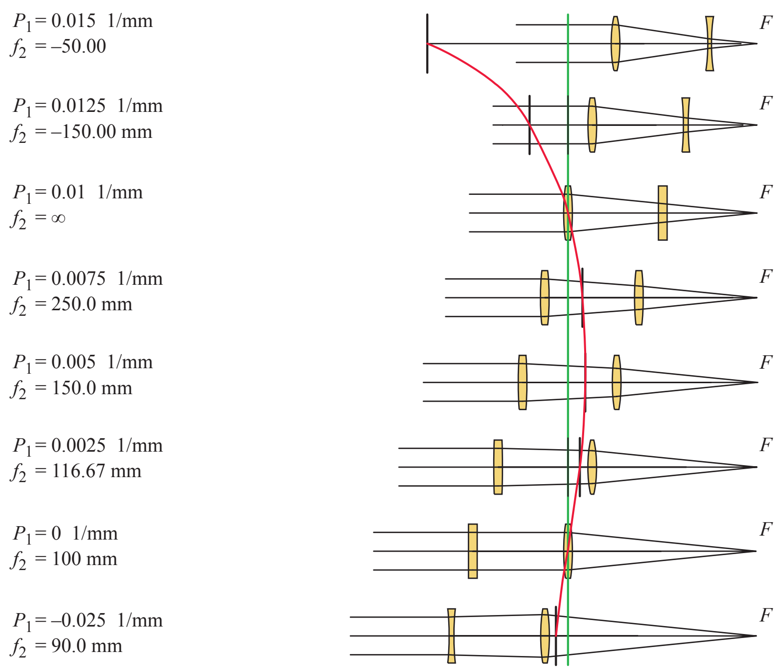


图 4–2　消色差双胶合透镜

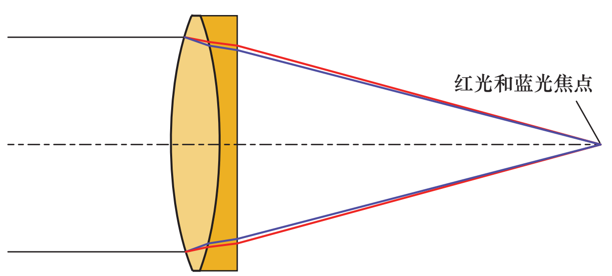


图 4–3　消色差双胶合透镜和单透镜的轴向色差与波长关系

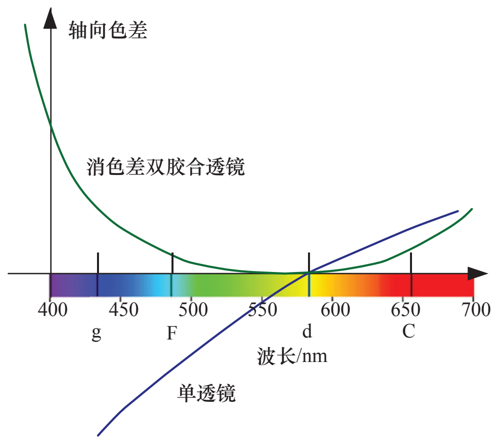


图 4–10　在一个有轴向色差及倍率色差系统中的主光线

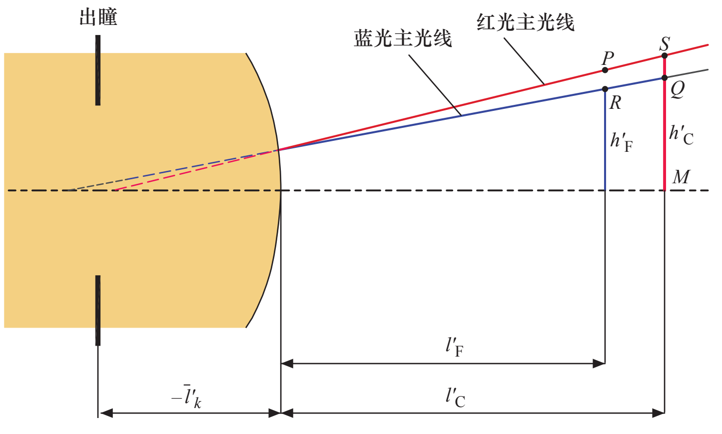


图 4–11　倍率色差的计算

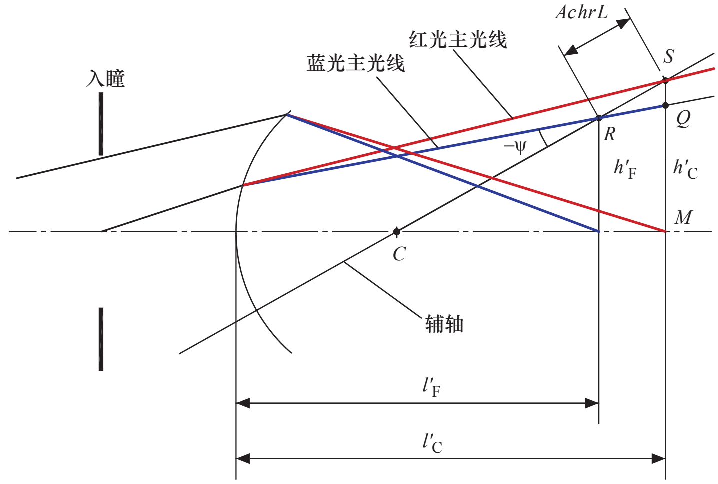


图 4–12　不同轴向色差和倍率色差系统中的红色、蓝色子午光线与主光线的关系

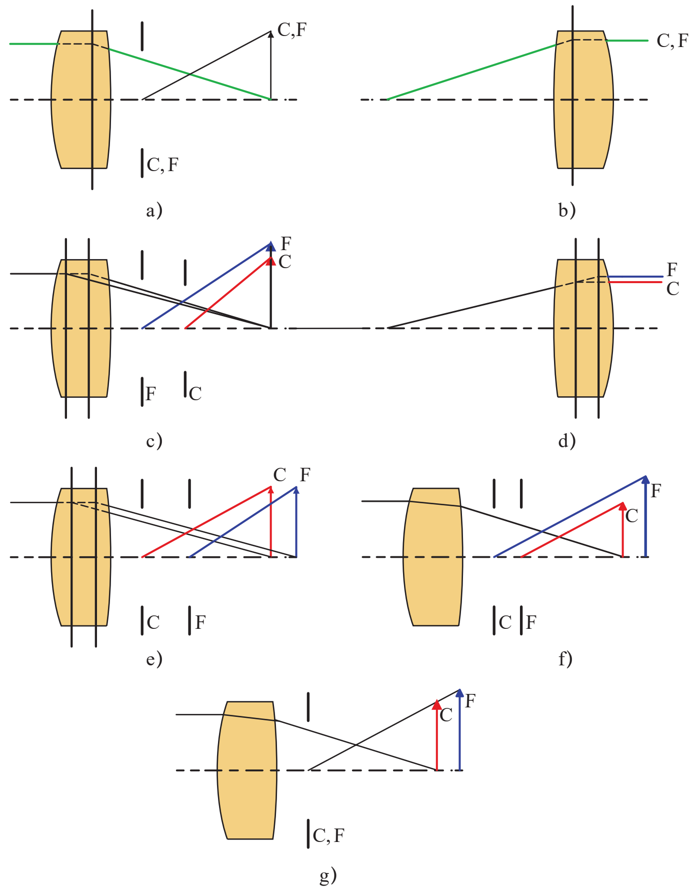


图 4–13　同一材料的两片透镜校正倍率色差

a）物位于无穷远　b）入瞳位于无穷远

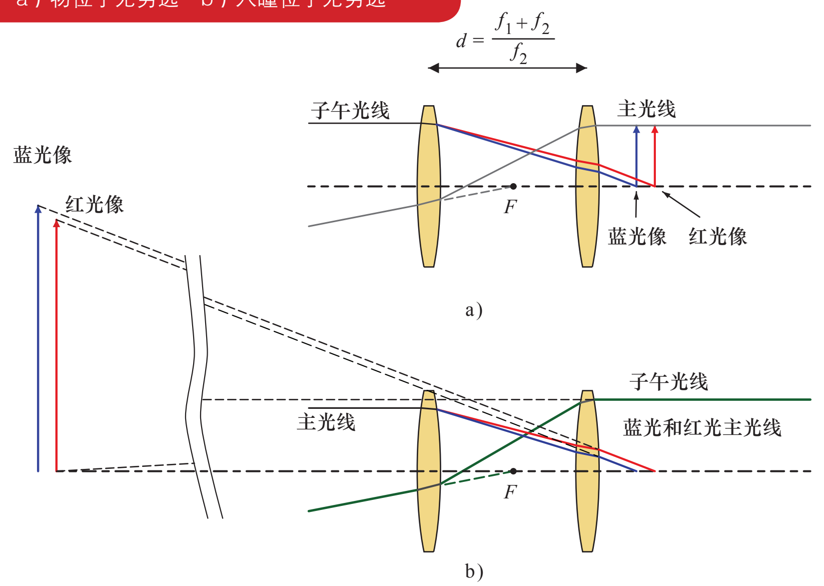


图 5–5　薄透镜中两个表面对总横向球差的贡献

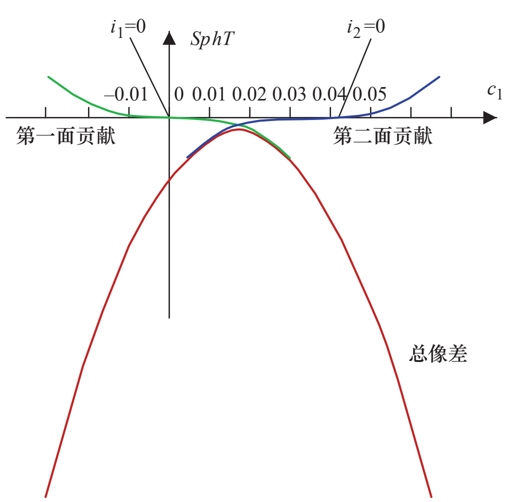


图 5–6　对三种物距成像时薄透镜的横向球差与前表面曲率的关系

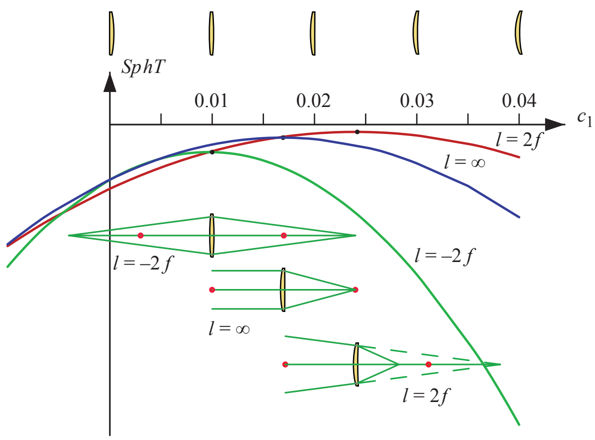


图 6–3　描述初级像差形成的一些点和光线

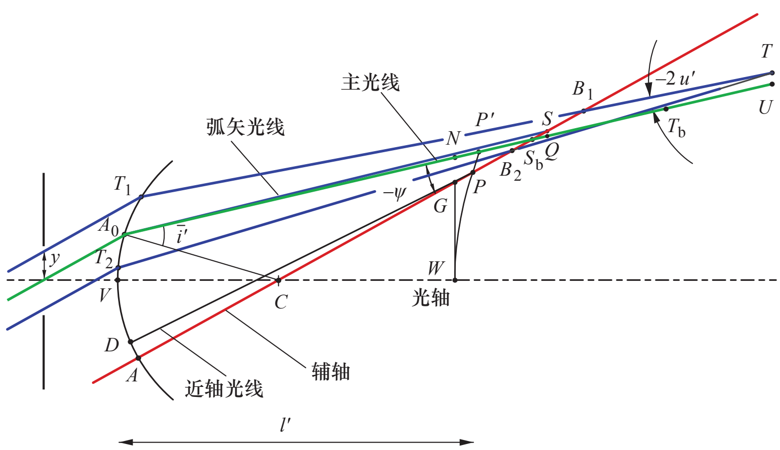


图 6–17　光瞳圆环中的光线在慧差中的分布

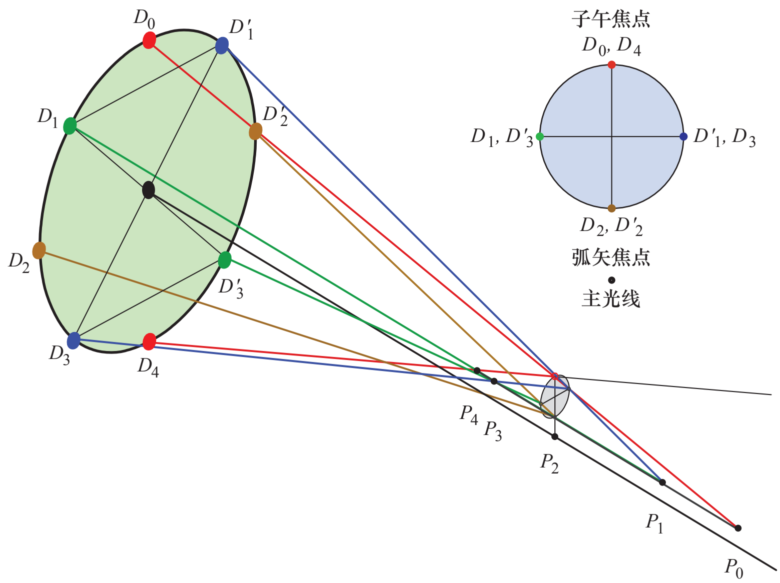


图 6–19　彗差光斑的形成

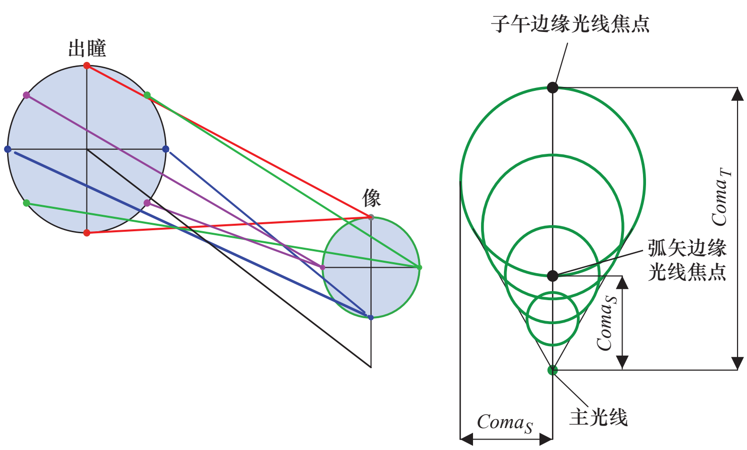


图 6–20　纯像散（无彗差）的光学系统成像

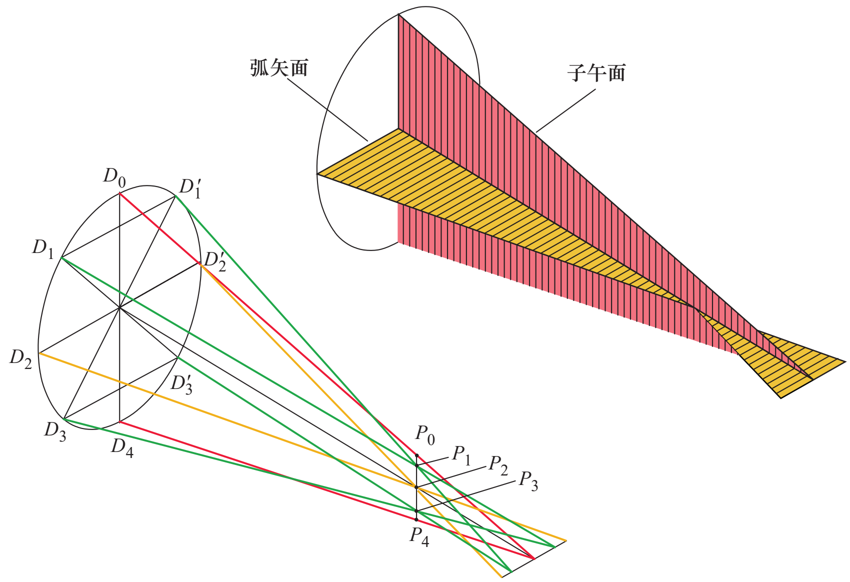


图 6–26　对称光学系统

a）0 彗差　b）0 倍率色差

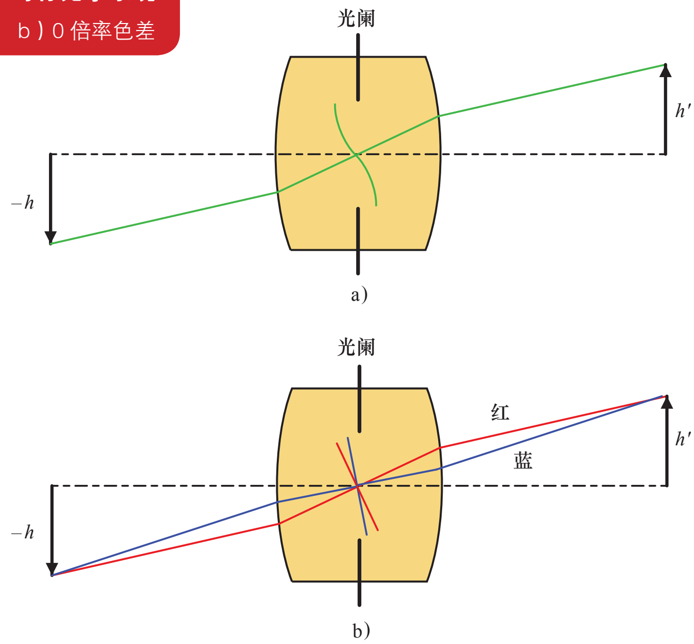


图 7–12　光程及相关的光程差和波面

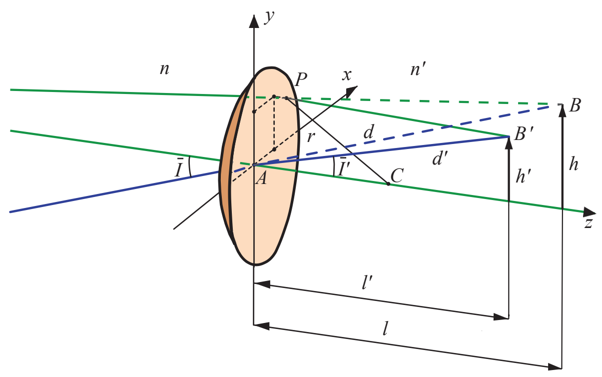


图 7–13　通过光瞳的子午、弧矢和一般倾斜光束

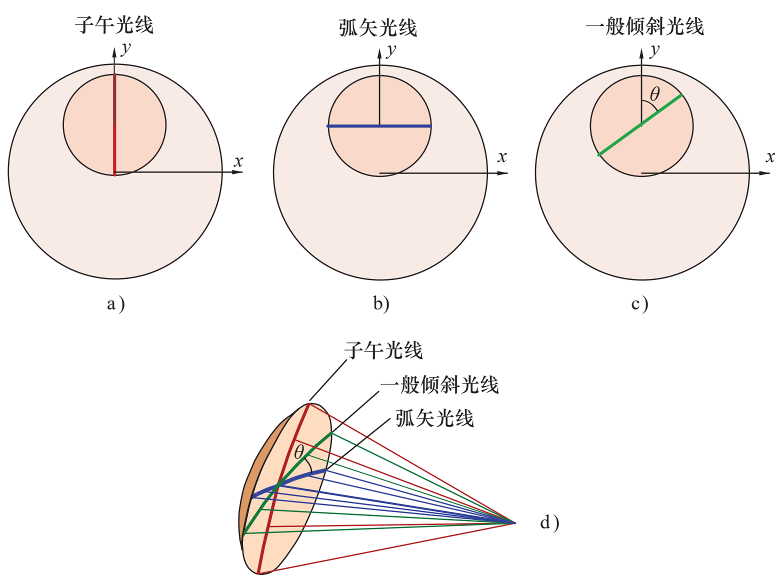


图 8-1　通过一个光学系统的子午和弧矢光扇追迹

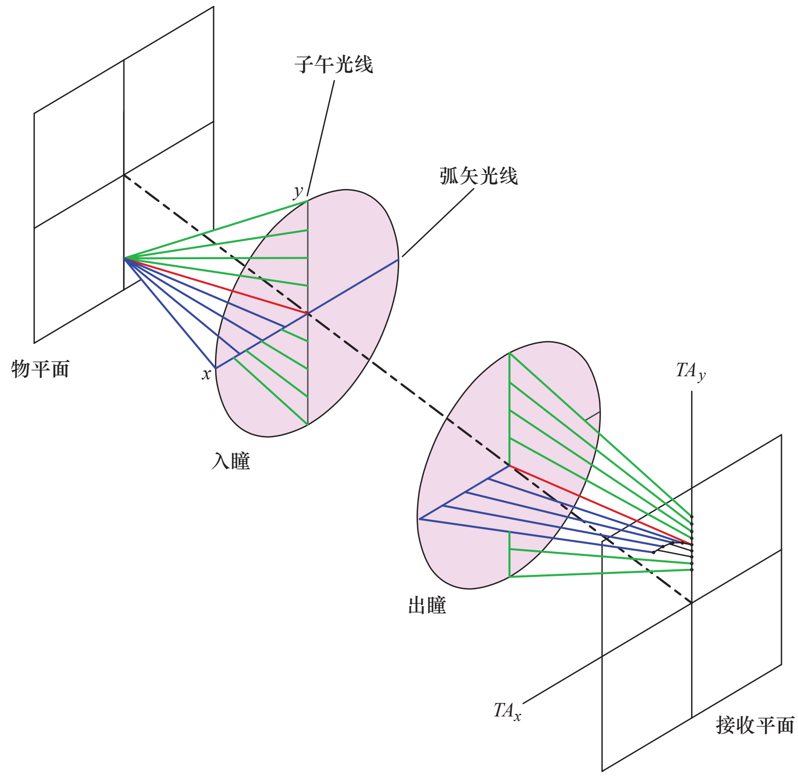


图 9-17　两种分辨率标准

a）瑞利　b）斯派罗

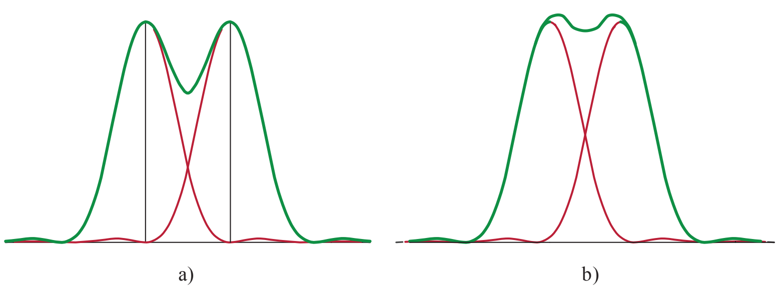


图 10–22　色散棱镜中偏转角度与波长的关系

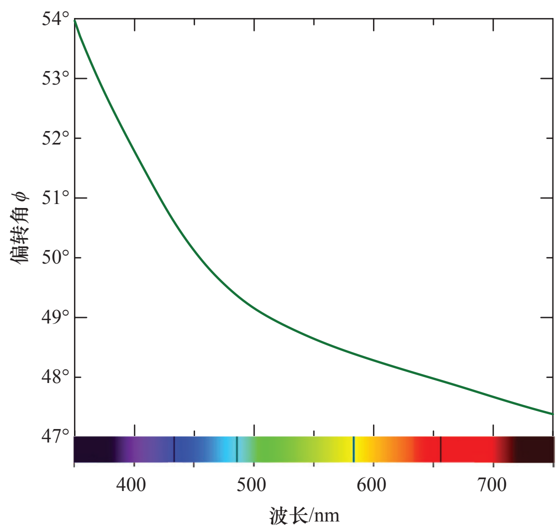


图 10–23　三角棱镜中不同波长光束的尺寸变化

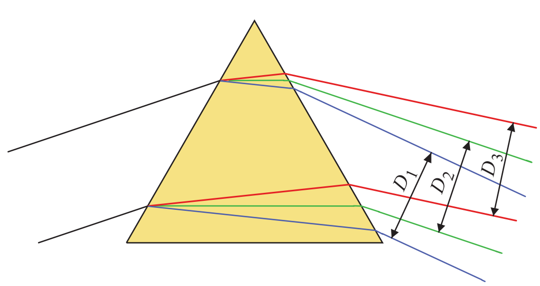


图 10–26　锥形棱镜

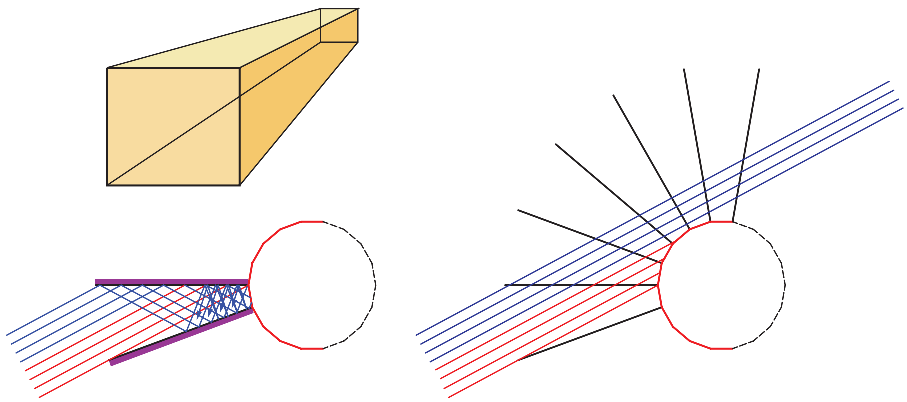


图 13–1　人眼的结构简图

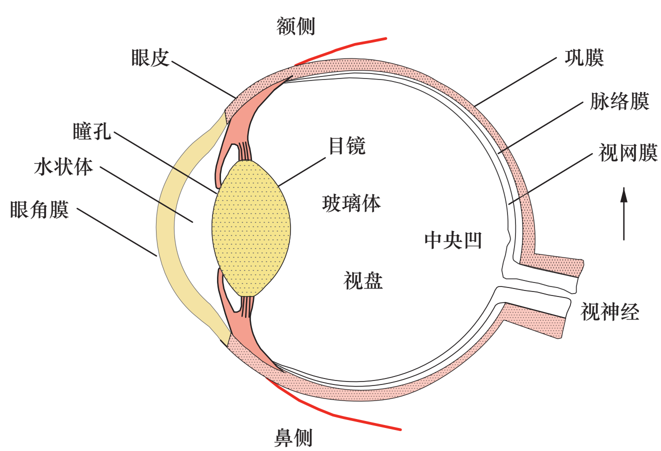


图 14-22　单片场镜的点列图

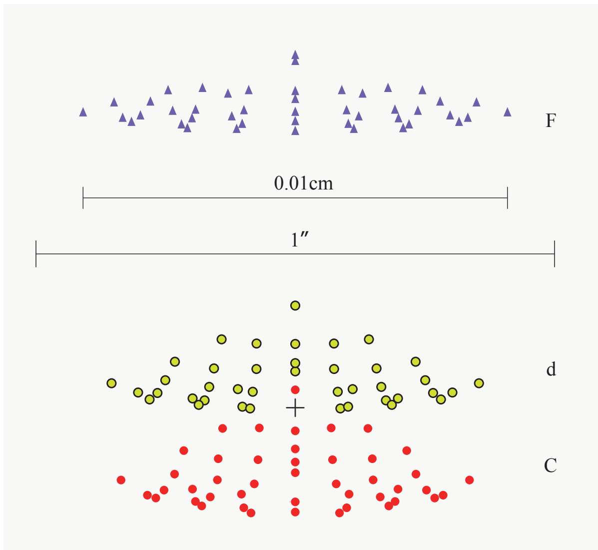


图 14-25　Wynne 校正器的点列图

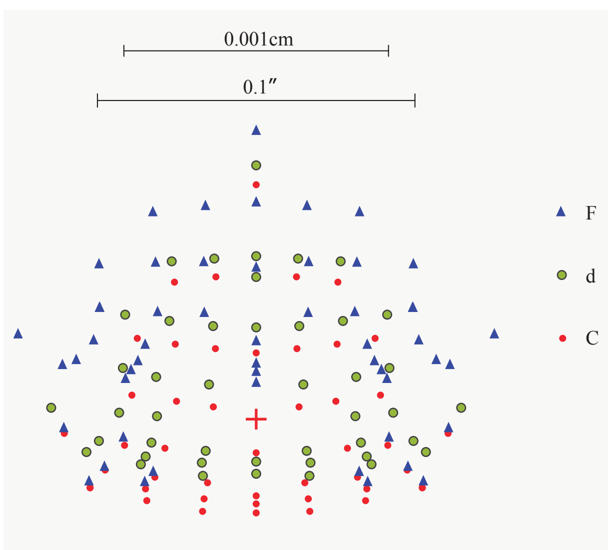


图 16-6　传统消色差物镜和用萤石消色差物镜的轴向色差曲线

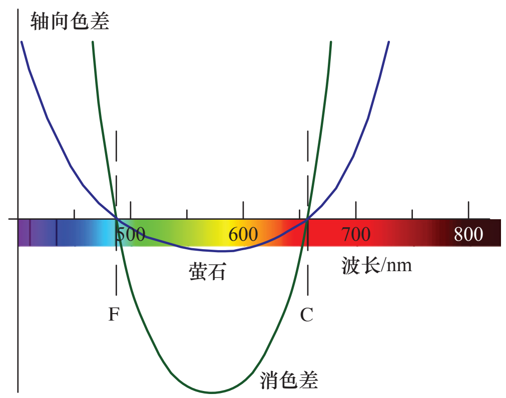


图 6-12　惠更斯目镜的设计

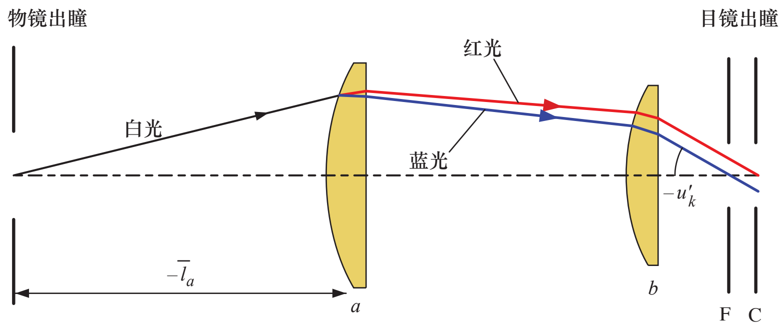


图 18–1　标准人眼的灵敏度曲线

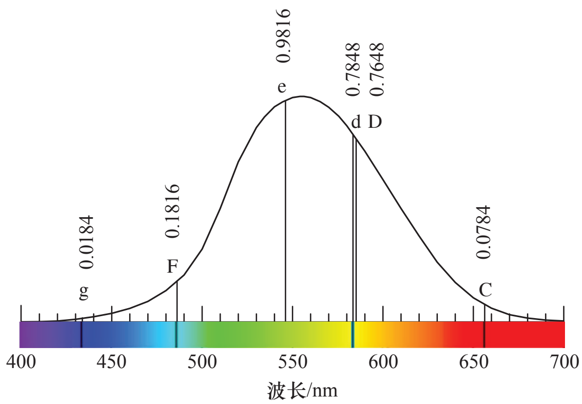
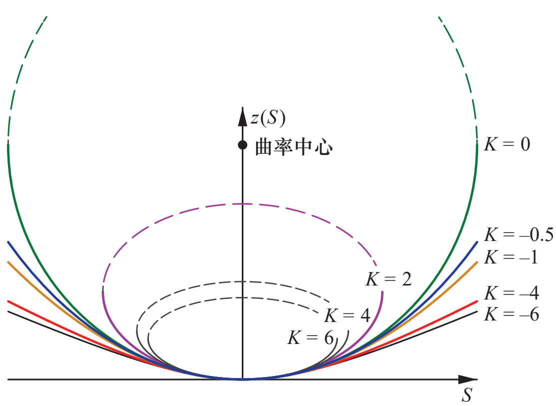


图 B–1　一些二次曲面的形状



为中华崛起传播智慧

地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037

电话服务
服务咨询热线：010-88361066
读者购书热线：010-68326294
010-88379203

网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
金书网：www.golden-book.com
教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版

策划编辑◎舒雯 / 封面设计◎鞠杨

国际视野 科技前沿

第3版的改进如下：

→ 整体进行了更新，反映了该领域的最新研究进展；

→ 增加了25个新的设计实例；

→ 增加了按新的光学玻璃设计光学系统的实例；

→ 新添加了Buchdahl高阶像差的资料；

→ 初级像差的描述更详细明确；

→ 扩展并改进了基于光程计算波前像差的方法；

→ 改进了插图，其中32张换成了彩图；

→ 更新了附录中光学材料的列表；

→ 增加了重要的新出版物的引用。

机械工业出版社科普平台　机械工业出版社制造业资讯　机械工业出版社微信公众号

CRC Press
Taylor & Francis Group

上架指导 现代设计方法

ISBN 978-7-111-57966-3

9 787111 579663

ISBN 978-7-111-57966-3

定价：169.00元